Mathtrace – příručka

VII. Aplikace: věda, ekonomie a optimalizace

Obsah

VII. Aplikace: věda, ekonomie a optimalizace

47. Chemie

48. Elektrotechnika

49. Biologie a medicína

50. Ekonomie, finance a pojišťovnictví

51. Lineární programování, doprava, přiřazení a maticové hry

52. Grafy, sítě a logistika

53. Psychometrie

47. Chemie

Chemické výpočty najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obor Chemie: vyčíslení chemické rovnice, pH roztoku kyseliny, zásady, soli nebo vícesytné kyseliny, pufr, titrace s titrační křivkou, Arrheniova rovnice a Lambertův–Beerův zákon. Ve formuláři vyberete úlohu a hledanou veličinu a vyplníte hodnoty s jednotkami; ikonka „?“ vysvětlí, odkud vzorec pochází. Malé konstanty se dají psát jako 1.8e-5 nebo 1,8·10^-5, naměřené hodnoty (tabulka teplot, kalibrace) jako čísla oddělená mezerou.

Chemickou rovnici stačí napsat do ručního zadání, třeba Fe + O2 -> Fe2O3 (šipka -> nebo =, rovnováha <=>), i s ionty MnO4^- a Fe^3+, závorkami Ca(OH)2, hydráty CuSO4·5H2O a skupenstvím (aq). Koeficienty jsou jádro matice bilance prvků (a náboje): postup napíše bilanční rovnice, matici, její redukovaný tvar Gaussovou eliminací, volný koeficient jako parametr a nejmenší celá čísla, nakonec zkoušku. Pozná i rovnici, kterou vyčíslit nejde (prvek jen na jedné straně, látka na nesprávné straně) nebo jejíž vyčíslení není jednoznačné.

pH počítá přesně (u slabé kyseliny kvadratickou rovnicí) a k tomu ukáže školní zjednodušení a stupeň disociace; u vícesytné kyseliny řeší bilanci náboje numericky a graf ukáže zastoupení forem kyseliny podle pH. U pufru po přidání silné kyseliny nebo zásady spočítá novou rovnováhu a změnu pH. Titrace určí pH podle oblasti křivky (počátek, pufrová oblast, bod ekvivalence, přebytek činidla) a v grafu ukáže celou titrační křivku. Arrheniova rovnice ze dvou měření nebo z tabulky regresí ln k proti 1/T; Lambertův–Beerův zákon ze známého ε, ze standardu nebo z kalibrační přímky.

Ukázky

Vyčíslení oxidace kyseliny chlorovodíkové manganistanem.

Zadání: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Výsledek

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{Mn(}$$

Postup

- Neznámé koeficienty označíme písmeny
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Atomy při reakci nevznikají ani nezanikají – každého prvku je vlevo stejně atomů jako vpravo

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}: &\quad a = c \\
\mathrm{Mn}: &\quad a = d \\
\mathrm{O}: &\quad 4a = f \\
\mathrm{H}: &\quad b = 2f \\
\mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g
\end{aligned}$$

- Homogenní soustava v maticovém tvaru – sloupec pro každou látku, produkty se znaménkem minus

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2
\end{pmatrix}$$

- Gaussovou eliminací převedeme matici na redukovaný stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5}
\end{pmatrix}$$

- Jeden koeficient zůstane volný, $g = t$; ostatní z něj vyjádříme

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- Zvolíme $t = 5$, aby byly všechny koeficienty nejmenší celá čísla:
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Zkouška – počty atomů vlevo a vpravo

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\
\mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\
\mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\
\mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\
\mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16
\end{aligned}$$

Iontová redoxní rovnice s bilancí náboje.

Zadání: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

Výsledek

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5\,\mathrm{Fe^{3+}} + 4\,\mathrm{H_2O}$$

Postup

- Neznámé koeficienty označíme písmeny

  $$a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$$

- Atomy při reakci nevznikají ani nezanikají a náboj se zachovává (řádek q) – pro každý prvek i pro náboj platí

  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$

- Homogenní soustava v maticovém tvaru – sloupec pro každou látku, produkty se znaménkem minus

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gaussovou eliminací převedeme matici na redukovaný stupňovitý tvar

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

- Jeden koeficient zůstane volný, $g = t$; ostatní z něj vyjádříme

  $$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$

- Zvolíme $t = 4$, aby byly všechny koeficienty nejmenší celá čísla:

  $$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$$

- Zkouška – počty atomů a náboj vlevo a vpravo

  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

pH 0,1M kyseliny octové (K_a = 1,8·10⁻⁵).

Zadání: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

Výsledek

$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

Postup

- Hledáme pH; zadáno: $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- pH je záporný dekadický logaritmus koncentrace vodíkových (oxoniových) iontů: pH = −log[H⁺]. Silná kyselina (HCl) disociuje úplně, takže [H⁺] = c; silná zásada dává [OH⁻] = c a pH = 14 − pOH. Slabá kyselina HA ⇌ H⁺ + A⁻ disociuje jen částečně podle disociační konstanty Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; z ní plyne kvadratická rovnice x² + Ka·x − Ka·c = 0. Sůl slabé kyseliny a silné zásady (octan sodný) reaguje s vodou zásaditě s Kb = Kw/Ka, sůl slabé zásady (NH_4Cl) kysele. U vícesytné kyseliny (H_2SO_4, H_3PO_4) vyřešíme bilanci náboje numericky. Počítá se při 25 °C, Kw = 10⁻¹⁴. Rovnice modelu

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Vyjádříme hledanou veličinu

$$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = -$$

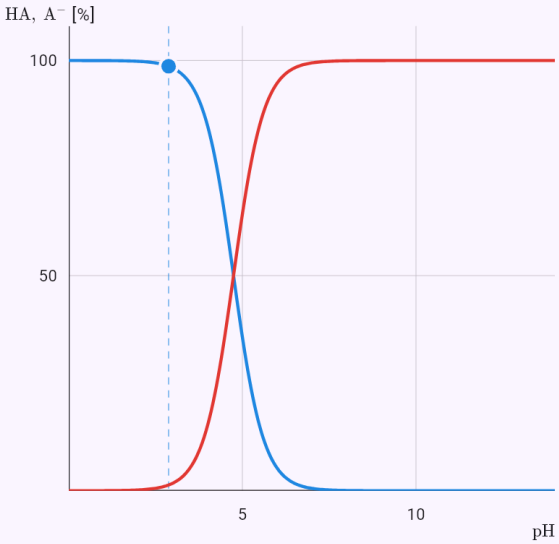
- Dosadíme

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{\left(1{,}8 \cdot 10^{-5}\right)^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$

- Stupeň disociace: $\alpha = \frac{x}{c} = \frac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- Stupeň disociace je pod 5 %, takže by stačilo i zjednodušení c − x ≈ c:
  $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$

- pH je záporný logaritmus koncentrace H⁺:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

pH 0,1M kyseliny fosforečné a zastoupení jejích forem.

Zadání: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

`13[one]; kind=polyprotic; constant=K)`

Výsledek

$$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

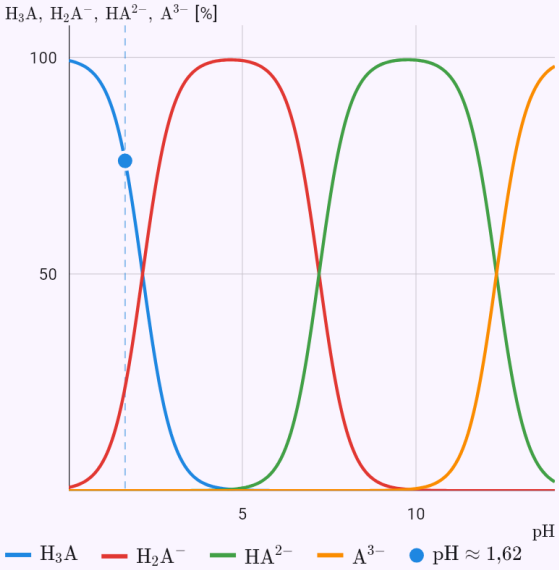
Postup

- Hledáme pH; zadáno
  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$
- pH je záporný dekadický logaritmus koncentrace vodíkových (oxoniových) iontů: pH = −log[H⁺]. Silná kyselina (HCl) disociuje úplně, takže [H⁺] = c; silná zásada dává [OH⁻] = c a pH = 14 − pOH. Slabá kyselina HA ⇌ H⁺ + A⁻ disociuje jen částečně podle disociační konstanty Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; z ní plyne kvadratická rovnice x² + Ka·x − Ka·c = 0. Sůl slabé kyseliny a silné zásady (octan sodný) reaguje s vodou zásaditě s Kb = Kw/Ka, sůl slabé zásady (NH_4Cl) kysele. U vícesytné kyseliny (H_2SO_4, H_3PO_4) vyřešíme bilanci náboje numericky. Počítá se při 25 °C, Kw = 10^{-14}. Rovnice modelu
  $$\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{H_2A^-} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{H^+} + \mathrm{HA^{2-}} \rightleftharpoons 3\,\mathrm{H^+} + \mathrm{A^{3-}}$$
- Roztok je elektricky neutrální – bilance náboje
  $$[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$$
- Koncentrace jednotlivých forem kyseliny z disociačních konstant
  $$[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1}\cdots K_{ai}\,h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$$
- Rovnici vyřešíme numericky (půlením intervalu):
  $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$
- › Postup metody: bisekce, 14 iterací
- pH je záporný logaritmus koncentrace H⁺:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$
- Druhá konstanta je mnohem menší než první, takže pH určuje hlavně první stupeň – jako u slabé jednosytné kyseliny

$$x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

- Zastoupení forem kyseliny při tomto pH
  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Octanový pufr po přidání 1 mmol silné kyseliny.

Zadání: `model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l]; V=100[ml];`

`n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

Výsledek

$$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$$

Postup

- Hledáme pH; zadáno
  $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- Převedeme jednotky
  $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- Konstanta z pK: $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Pufr je směs slabé kyseliny a její soli (CH_3COOH + CH_3COONa) nebo slabé zásady a její soli (NH_3 + NH_4Cl). Z disociační konstanty plyne Hendersonova–Hasselbalchova rovnice pH = pKa + log([A^-]/[HA]). Přidaná silná kyselina zreaguje se zásaditou složkou na kyselou (A^- + H^+ → HA), zásada naopak – poměr složek se změní jen málo, a proto se pH téměř nemění. Pufr funguje nejlépe pro poměr složek 0,1 až 10, tedy pH = pKa ± 1. Rovnice modelu
  $$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log\frac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Látková množství složek pufru
  $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- Přidaná látka zreaguje s jednou složkou pufru
  $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \to \mathrm{HA}: \quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,$ı
- Vyjádříme hledanou veličinu: $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log\frac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$
- Dosadíme: $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log\frac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH před přidáním a jeho změna:
  $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

Titrace kyseliny octové hydroxidem sodným – bod ekvivalence.

Zadání: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

`5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)`

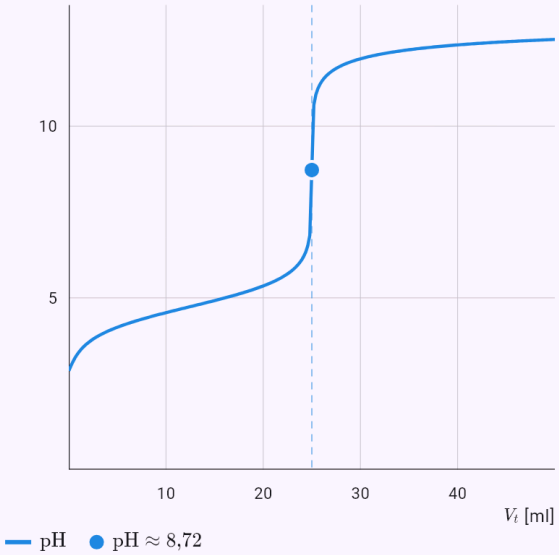
Výsledek

$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$

Postup

- Hledáme pH; zadáno
  $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- Při titraci přidáváme z byrety titrační činidlo o známé koncentraci, dokud nezreaguje veškerá titrovaná látka. Bod ekvivalence nastane, když látkové množství činidla $c_t \cdot V_t$ odpovídá látkovému množství titrované látky: $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Před ním určuje pH nezreagovaná látka (se slabou kyselinou vzniká pufr), v bodě ekvivalence reakce vzniklé soli s vodou, za ním přebytek činidla. Titrační křivka v grafu je spočtená přesně z bilance náboje. Rovnice modelu: $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Bod ekvivalence – činidla je stejné látkové množství jako titrované látky
  $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \frac{c_a V_a}{c_t} = \frac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Přidané činidlo a celkový objem:
  $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- Bod ekvivalence – všechna titrovaná látka zreagovala.
- V bodě ekvivalence je v roztoku jen vzniklá sůl – její reakce s vodou
  $c_{\mathrm{A^-}} = \frac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \frac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10^{}$
- pOH a pH (pH + pOH = 14)
  $\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Aktivační energie z tabulky rychlostních konstant.

Zadání: `model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042`

`0.0079[per_s]; input=table)`

Výsledek

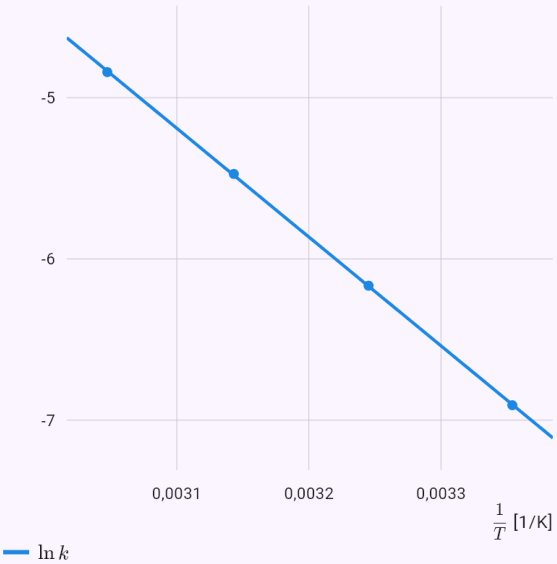
$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

Postup

- Hledáme E_a; zadáno
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- Převedeme jednotky:
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- Rychlostní konstanta reakce roste s teplotou podle Arrheniovy rovnice k = A·e^(−Ea/RT), kde Ea je aktivační energie – energetická bariéra, kterou musí srážející se molekuly překonat – a A předexponenciální faktor. Ze dvou měření plyne $\ln(k_2/k_1) = (Ea/R)(1/T_1 - 1/T_2)$. Z více měření se Ea určí regresní přímkou: ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) je přímka v proměnné 1/T (Arrheniův graf) se směrnicí −Ea/R. Rovnice modelu:
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- Zlogaritmováním dostaneme přímku
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Hodnoty pro regresní přímku
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Regresní přímka metodou nejmenších čtverců
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $E_a = -bR$
- Dosadíme:
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$

- Předexponenciální faktor: $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Koncentrace vzorku z kalibrační přímky.

Zadání: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299`

`0.452 0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

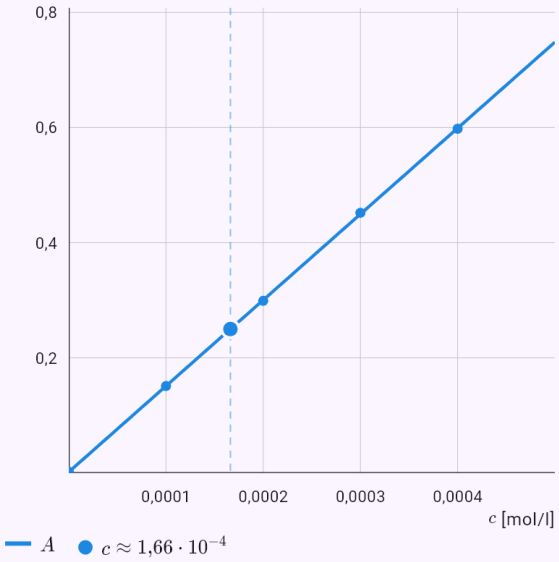
Výsledek

$$c \approx 0{,}166\,\mathrm{mmol/l}$$

Postup

- Hledáme c; zadáno
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\,\mathrm{mmol/l}, \quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- Převedeme jednotky
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot10^{-4};\ 3\cdot10^{-4};\ 4\cdot10^{-4}\right)\,\mathrm{mol/l}$
- Roztok pohlcuje světlo úměrně koncentraci absorbující látky a tloušťce vrstvy: absorbance A = ε·l·c (Lambertův–Beerův zákon), kde ε je molární absorpční koeficient a l délka kyvety. Spektrofotometr měří transmitanci T – podíl prošlého světla – a A = −log T. Neznámou koncentraci určíme ze známého ε, porovnáním se standardem o známé koncentraci, nebo z kalibrační přímky změřené na několika standardech (metoda nejmenších čtverců). Zákon platí pro zředěné roztoky. Rovnice modelu: $A = \varepsilon\, l\, c$
- Kalibrační přímka metodou nejmenších čtverců
  $A = a + b\,c: \quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\mathrm{l/m}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $c = \dfrac{A-a}{b}$
- Dosadíme: $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l}$
- Převedeme jednotky:
  $c \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l} = 0{,}1662\,\mathrm{mmol/l}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Cementace oceli – doba, za kterou má hloubka 0,5 mm 0,8 % uhlíku.

Zadání: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

`cx=0.8[pct]; x=0.5[mm]; process=carburizing)`

Výsledek

$$t \approx 7{,}047\,\mathrm{h}$$

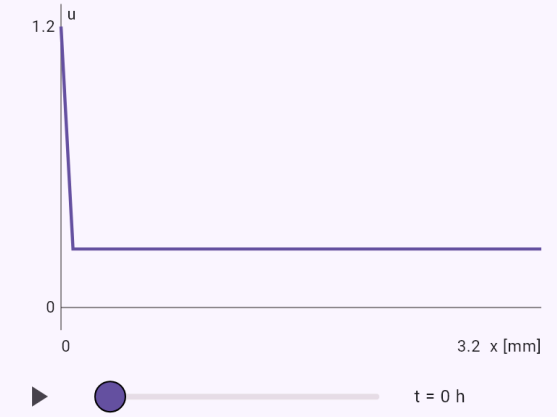
Postup

- Hledáme t; zadáno
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$
- Převedeme jednotky
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$
- Látka difunduje z povrchu, na kterém je stálá koncentrace c_s, do tělesa s počáteční koncentrací c_0 – například uhlík do oceli při cementaci. Platí difuzní rovnice c_t = D·c_xx; pro těleso, které je vzhledem k hloubce průniku nekonečně tlusté, ji vyřeší Laplaceova transformace v čase: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) s doplňkovou chybovou funkcí. Z ní se spočte koncentrace v dané hloubce, hloubka požadované koncentrace nebo potřebná doba. Rovnice modelu
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Řešení Laplaceovou transformací (polonekonečné těleso): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Inverzní doplňková chybová funkce
  $\operatorname{erfc} z = \frac{c - c_0}{c_s - c_0} = \frac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $t = \frac{x^2}{4Dz^2}$
- Dosadíme
  $t = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\mathrm{s}$

- Typická hloubka průniku je √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Dvojnásobná hloubka potřebuje čtyřnásobný čas.
- Převedeme jednotky: $t \approx 25\,370\,\mathrm{s} = 7{,}047\,\mathrm{h}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



t = 0 h

Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Koncentrace uhlíku v hloubce 0,5 mm po 7 hodinách.

Zadání: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

```
x=0.5[mm]; t=7[h]; process=carburizing)
```

Výsledek

$$c \approx 0{,}7988\,\%$$

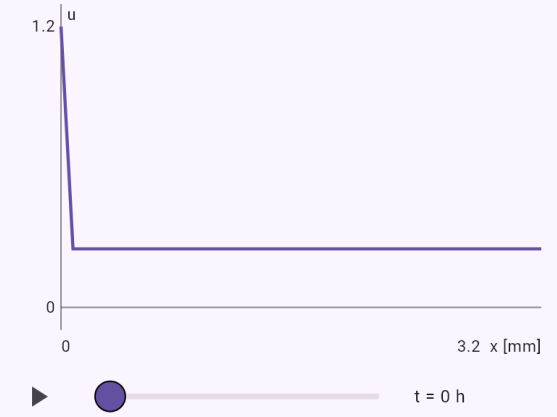
Postup

- Hledáme c; zadáno
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- Převedeme jednotky
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Látka difunduje z povrchu, na kterém je stálá koncentrace c_s, do tělesa s počáteční koncentrací c_0 – například uhlík do oceli při cementaci. Platí difuzní rovnice c_t = D·c_xx; pro těleso, které je vzhledem k hloubce průniku nekonečně tlusté, ji vyřeší Laplaceova transformace v čase: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) s doplňkovou chybovou funkcí. Z ní se spočte koncentrace v dané hloubce, hloubka požadované koncentrace nebo potřebná doba. Rovnice modelu
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Řešení Laplaceovou transformací (polonekonečné těleso): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argument chybové funkce
  $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \mathrm{erfc}$
- Dosadíme:
  $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$

- Typická hloubka průniku je √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Dvojnásobná hloubka potřebuje čtyřnásobný čas.
- Převedeme jednotky: $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



t = 0 h

Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Známá omezení

- Výpočty pH a titrace předpokládají 25 °C (Kw = 10⁻¹⁴) a zředěné roztoky – aktivitní koeficienty se nepočítají.
- Titrace jen jednosytné kyseliny nebo zásady silným činidlem; vícesytné kyseliny zatím jen jako pH roztoku.
- Chemická rovnice z fotky se zatím nerozpoznává – napište ji do ručního zadání nebo do formuláře.

48. Elektrotechnika

Elektrotechnické výpočty najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obor Elektrotechnika: sériový a paralelní obvod RLC se střídavým proudem, filtry RC a RL, rezonanční obvod, dělič napětí, Wheatstoneův můstek a kompenzace účiníku. Ve formuláři vyberete zapojení a hledanou veličinu a vyplníte hodnoty s jednotkami; ikonka „?“ vysvětlí, odkud vzorce pocházejí. Napětí a proudy jsou efektivní hodnoty, komplexní čísla se píšou s j jako v elektrotechnice.

U každého obvodu nakreslí appka jeho schéma s hodnotami součástek a u střídavého proudu frekvenční charakteristiku v logaritmické ose – impedanci a fázi, u filtrů přenos v decibelech (Bodeho diagram). Postup ukáže reaktance, impedanci v algebraickém i goniometrickém tvaru (50∠53,13° Ω), fázový posun, proudy, napětí na součástkách a výkon; vysvětlí i to, proč se napětí na součástkách sčítají jako fázory.

Sériově-paralelní obvod můžete zadat výrazem, třeba R1 + (L1 || (R2 + C1)) s hodnotami R1=100 L1=10m C1=1u (předpony m, u, n, k, M). Postup zjednodušuje obvod skupinu po skupině a pak dopočítá napětí a proud každé součástky. Obecný obvod (i s můstky a více zdroji) zadáte netlistem jako v programu SPICE – na řádek jedna součástka a její uzly, uzel 0 je zem; postup sestaví rovnice prvního Kirchhoffova zákona v uzlech, matici soustavy a vyřeší ji Gaussovou eliminací. Bez frekvence se počítá stejnosměrný proud.

Ukázky

Sériový obvod RLC: výkon, jalový výkon a účiník.

Zadání: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF]; f=50[Hz];`

parts=rlc)

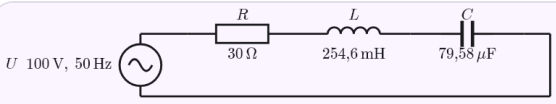
Výsledek

$$P \approx 120{,}1\ \mathrm{W}$$
$$Q \approx 160\ \mathrm{var}$$
$$S \approx 200\ \mathrm{VA}$$
$$\cos\varphi \approx 0{,}6$$

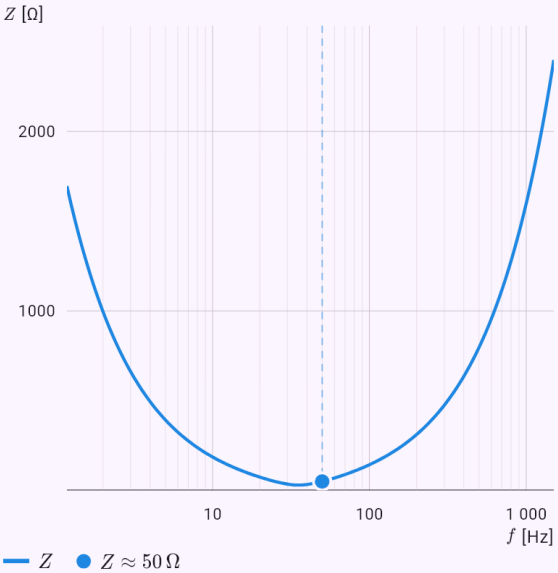
Postup

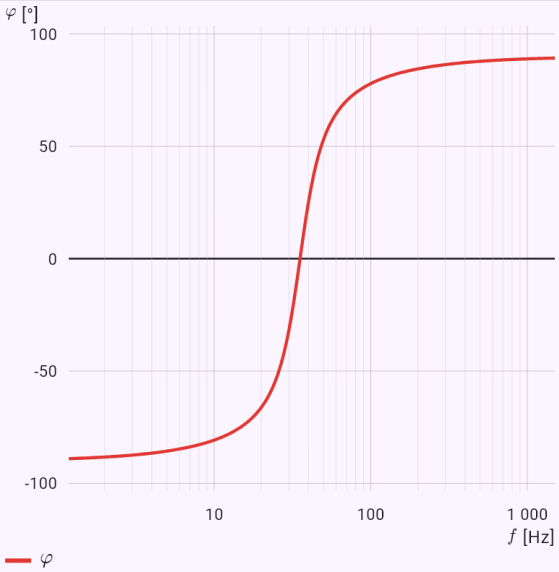
- Hledáme P; zadáno
  $U = 100\ \mathrm{V}, \quad R = 30\ \Omega, \quad L = 254{,}6\ \mathrm{mH}, \quad C = 79{,}5$
- Převedeme jednotky
  $L = 254{,}6\ \mathrm{mH} = 0{,}2546\ \mathrm{H}, \quad C = 79{,}58\ \mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- V obvodu se střídavým proudem kladou cívka a kondenzátor proudu odpor závislý na frekvenci – reaktanci: induktivní X_L = ωL roste s frekvencí, kapacitní X_C = 1/(ωC) klesá (ω = 2πf). Napětí na cívce předbíhá proud o 90°, na kondenzátoru se o 90° zpožďuje, proto se nesčítají aritmeticky, ale jako fázory – komplexní čísla s imaginární jednotkou j: impedance Z = R + j(X_L − X_C), její velikost Z = √(R² + (X_L − X_C)²) a fázový posun φ = arctan((X_L − X_C)/R). Proud I = U/Z, činný výkon P = UI·cos φ. Napětí a proudy jsou efektivní hodnoty. Rovnice modelu: $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Úhlová frekvence: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\ \mathrm{rad/s}$
- Induktivní reaktance cívky:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\ \Omega$
- Kapacitní reaktance kondenzátoru
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\ \Omega$
- Velikost impedance – reaktance a odpor jsou na sebe kolmé fázory
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- Impedance jako komplexní číslo (algebraický a goniometrický tvar)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\ \Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\ \Omega$
- Fázový posun proudu za napětím:
  $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- Obvod má induktivní charakter – proud se za napětím zpožďuje.
- Rezonanční frekvence: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\ \mathrm{Hz}$
- Proud z Ohmova zákona: $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\ \mathrm{A}$
- Činný, jalový a zdánlivý výkon
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\ \mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\ \mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\ \mathrm{VA}$
- Účiník: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

Schéma obvodu



Frekvenční charakteristika





Vodorovná osa je logaritmická – každý dílek je desetinásobek frekvence. Tečky jsou zadaná frekvence a význačné body.

Paralelní obvod RLC: proudy větvemi a celkový proud.

Zadání: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

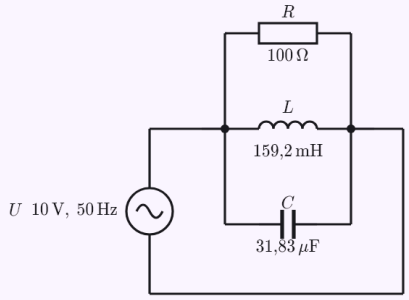
Výsledek

$$I_R \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\mathrm{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\mathrm{mA}$$

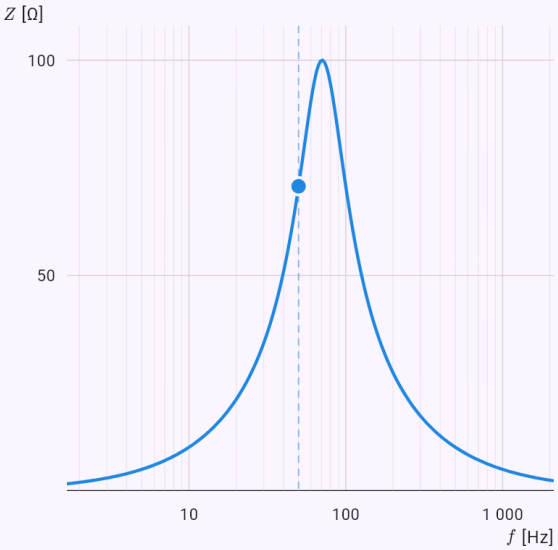
Postup

- Hledáme I; zadáno
  $U = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\mathrm{mH}, \quad C = 31{,}8$
- Převedeme jednotky
  $L = 159{,}2\,\mathrm{mH} = 0{,}1592\,\mathrm{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\mathrm{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- V paralelním obvodu je na všech větvích stejné napětí a proudy větví se sčítají jako fázory. Proto se místo impedancí sčítají jejich převrácené hodnoty – admitance: Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). Proud odporem je ve fázi s napětím, proud cívkou se zpožďuje o 90°, proud kondenzátorem o 90° předbíhá. Celkový proud I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) může být menší než proudy jednotlivými větvemi – při rezonanci se proudy cívkou a kondenzátorem vyruší. Rovnice modelu
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Úhlová frekvence: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Induktivní reaktance cívky:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- Kapacitní reaktance kondenzátoru
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Admitance – převrácené hodnoty impedancí větví se sčítají jako fázory
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\mathrm{S}, \quad \hat{Y}$$
- Impedance obvodu: $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- Impedance jako komplexní číslo (algebraický a goniometrický tvar)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \mathrm{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Fázový posun proudu za napětím
  $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- Obvod má induktivní charakter – proud se za napětím zpožďuje.
- Rezonanční frekvence: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\mathrm{Hz}$
- Proudy větvemi – na všech je stejné napětí
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\mathrm{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
- Celkový proud – fázorový součet proudů větví:
  $$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\mathrm{A}$$
- Proudy větvemi se sčítají jako fázory, ne aritmeticky – proud cívkou a kondenzátorem jsou v protifázi.

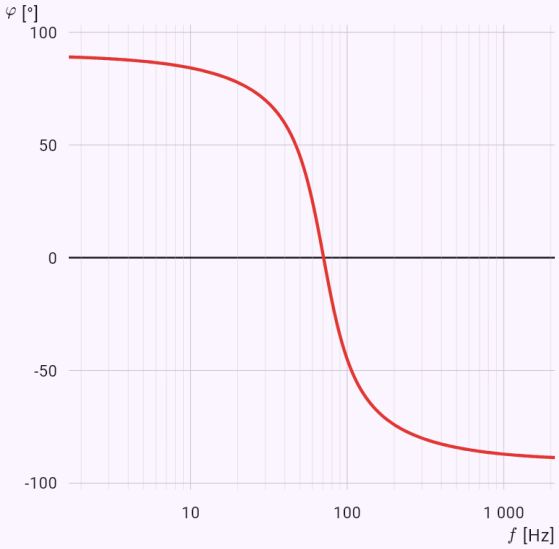
Schéma obvodu



Frekvenční charakteristika



Z $Z \approx 70{,}7\,\Omega$



φ

Vodorovná osa je logaritmická – každý dílek je desetinásobek frekvence. Tečky jsou zadaná frekvence a význačné body.

Dolní propust RC: přenos v decibelech a Bodeho diagram.

Zadání: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V]; kind=rcLow)`

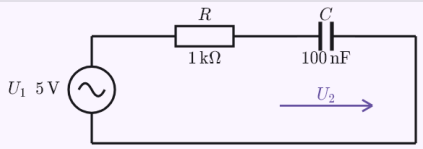
Výsledek

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

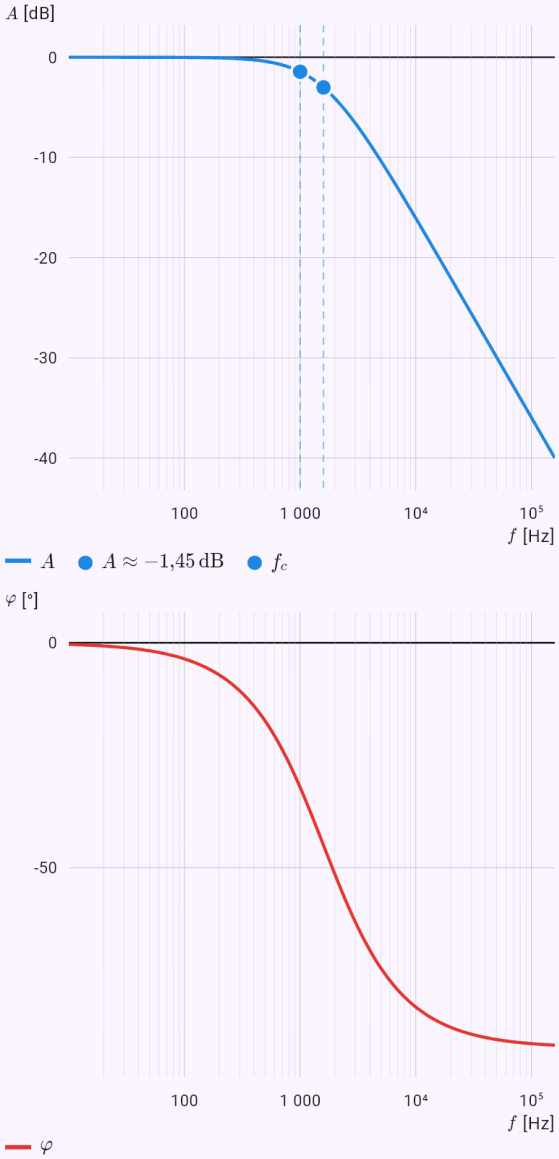
Postup

- Zadáno
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad f = 1\,\mathrm{kHz}, \quad U_1 = 5\,\mathrm{V}$
- Převedeme jednotky
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}, \quad f = 1$
- Filtr prvního řádu je dělič napětí z rezistoru a kondenzátoru (nebo cívky). Dolní propust (RC s výstupem na kondenzátoru) propouští nízké frekvence a potlačuje vysoké, horní propust naopak. Mezní frekvence f_c = 1/(2πRC), u RL f_c = R/(2πL): na ní klesne výstupní napětí na 1/√2 ≈ 70,7 % (o 3 dB) a fázový posun je 45°. Přenos H = U_2/U_1 je komplexní číslo; jeho velikost v decibelech A = 20·log|H| a fáze tvoří Bodeho diagram – nad mezní frekvencí klesá přenos dolní propusti o 20 dB na dekádu. Rovnice modelu
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Dolní propust: nízké frekvence projdou, vysoké jsou potlačeny.
- Mezní frekvence:
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\mathrm{Hz}$$
- Na mezní frekvenci je přenos 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB) a fázový posun 45°.
- Poměr frekvence k mezní: $\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$
- Velikost přenosu: $|\hat{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$
- Přenos v decibelech: $A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$
- Fázový posun výstupu proti vstupu:
  $$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Výstupní napětí: $U_2 = |\hat{H}|\,U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$

Schéma obvodu



Frekvenční charakteristika



Vodorovná osa je logaritmická – každý dílek je desetinásobek frekvence. Tečky jsou zadaná frekvence a význačné body.

Sériový rezonanční obvod: činitel jakosti a šířka pásma.

Zadání: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

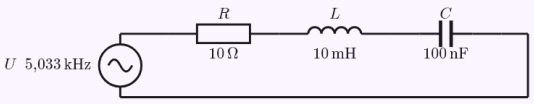
Výsledek

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\mathrm{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\mathrm{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\mathrm{Hz}$$

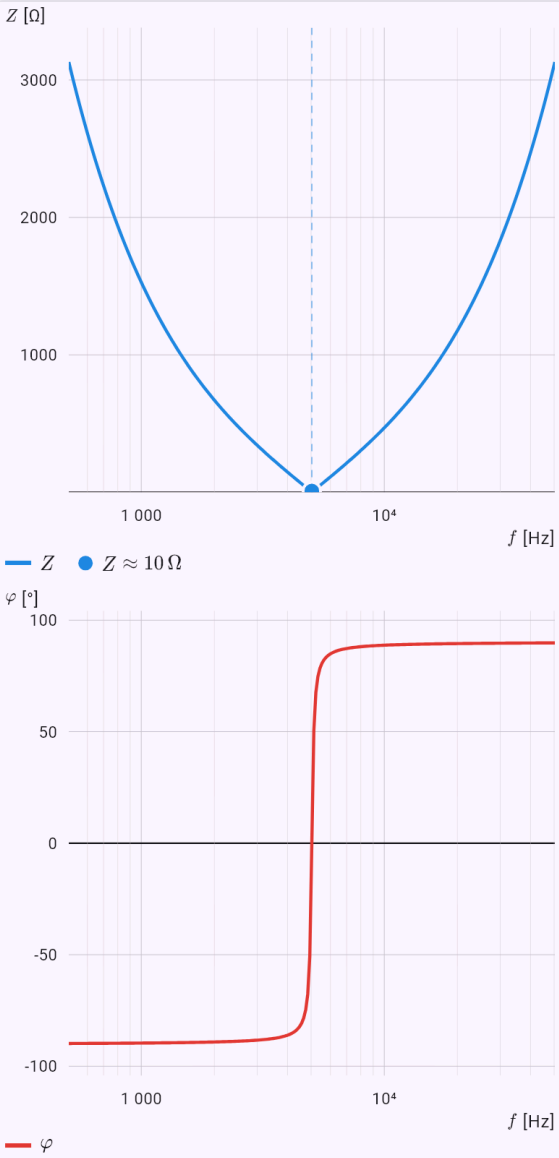
Postup

- Zadáno: $L = 10\,\mathrm{mH}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- Převedeme jednotky:
  $L = 10\,\mathrm{mH} = 0{,}01\,\mathrm{H}, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}$
- Při rezonanční frekvenci $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ jsou reaktance cívky a kondenzátoru stejné a navzájem se vyruší. Sériový obvod má pak nejmenší impedanci (jen R) a největší proud, paralelní naopak největší impedanci. Ostrost rezonance udává činitel jakosti Q – u sériového obvodu $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ – a šířka pásma $B = f_0/Q$ mezi frekvencemi, kde proud klesne na $1/\sqrt{2}$ maxima. Ladění: kapacita pro danou frekvenci $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Rovnice modelu: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
- Dosadíme: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\mathrm{Hz}$
- Při rezonanci se reaktance cívky a kondenzátoru vyruší – sériový obvod má nejmenší impedanci a největší proud.
- Činitel jakosti
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Šířka pásma: $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\mathrm{Hz}$
- Mezní frekvence pásma (pokles na $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\mathrm{Hz}, \quad f_2 \approx$$

Schéma obvodu



Frekvenční charakteristika



Vodorovná osa je logaritmická – každý dílek je desetinásobek frekvence. Tečky jsou zadaná frekvence a význačné body.

Dělič napětí se zátěží.

Zadání: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm]; load=load)`

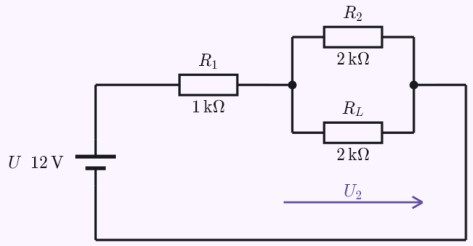
Výsledek

$$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$$

Postup

- Hledáme U_2; zadáno
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- Převedeme jednotky
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Dva sériově zapojené rezistory dělí napětí v poměru svých odporů: oběma teče stejný proud I = U/(R₁ + R₂), takže U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Připojená zátěž R_L je paralelně k R₂ a zmenší odpor dolní části na R₂R_L/(R₂ + R_L) – výstupní napětí zatíženého děliče je proto menší než naprázdno. Rovnice modelu:
  $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- Zátěž je paralelně k R₂
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- Dosadíme: $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- Naprázdno by bylo $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$ – zátěž výstupní napětí sníží.

Schéma obvodu



Vyvážení Wheatstoneova můstku.

Zadání: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

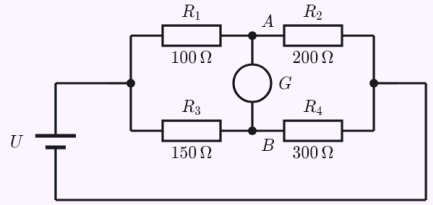
Výsledek

$$R_4 \approx 300\,\Omega$$

Postup

- Hledáme R_4; zadáno:
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- Wheatstoneův můstek tvoří dva děliče napětí zapojené paralelně; mezi jejich středy (body A a B) je měřidlo. Můstek je vyvážený – měřidlem neteče proud – když oba děliče dělí napětí ve stejném poměru: R₁/R₂ = R₃/R₄. Tak se přesně měří neznámý odpor. Nevyvážený můstek dává napětí U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)) – tak pracují například tenzometry. Rovnice modelu: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- Můstek je vyvážený – body A a B mají stejné napětí a měřidlem neteče proud.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- Dosadíme: $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

Schéma obvodu



Kondenzátor pro kompenzaci účiníku z 0,7 na 0,95.

Zadání: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

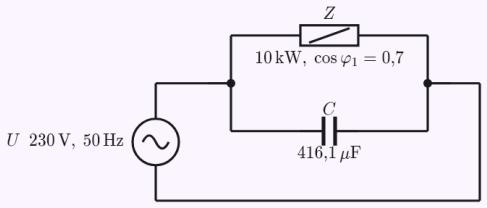
Výsledek

$$C \approx 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$$

Postup

- Hledáme C; zadáno
  $P = 10\,\mathrm{kW}, \quad U = 230\,\mathrm{V}, \quad f = 50\,\mathrm{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- Převedeme jednotky: $P = 10\,\mathrm{kW} = 10\,000\,\mathrm{W}$
- Spotřebiče s cívkami (motory, transformátory) odebírají kromě činného výkonu P i jalový výkon Q = P·tan φ, který zbytečně zatěžuje vedení větším proudem. Kondenzátor zapojený paralelně dodá jalový výkon opačného znaménka Q_C = Q₁ − Q₂ a zvýší účiník z cos φ₁ na cos φ₂. Potřebná kapacita C = Q_C/(ωU²), kde ω = 2πf. Činný výkon se nemění, proud ze sítě klesne. Rovnice modelu
  $$Q_C = P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2), \quad C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$
- Fázové posuny před a po kompenzaci
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Jalové výkony – kondenzátor dodá rozdíl
  $Q_1 = P\operatorname{tg}\varphi_1 \approx 10\,200\,\mathrm{var}$
  $Q_2 = P\operatorname{tg}\varphi_2 \approx 3287\,\mathrm{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\mathrm{var}$
- Úhlová frekvence: $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Dosadíme: $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$
- Proud ze sítě před a po kompenzaci
  $$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\mathrm{A}, \quad I_2 = \frac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\mathrm{A}$$
- Převedeme jednotky: $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F} = 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$

Schéma obvodu



Obvod zadaný výrazem – zjednodušení a proudy všemi součástkami.

Zadání: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

Výsledek

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\,\mathrm{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}$$

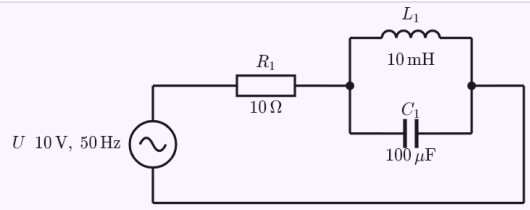
Postup

- Zapojení (+ sériově, ∥ paralelně): $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; zadané hodnoty
  $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\mathrm{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}, \quad U = 10\,\mathrm{V}$
- Úhlová frekvence: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Impedance cívek a kondenzátorů jako komplexní čísla (j je imaginární jednotka)
  $$\hat{Z}_{L_1} = \mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \mathrm{j}\,3{,}142\,\Omega$$
  $$\hat{Z}_{C_1} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} = -\mathrm{j}\frac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\mathrm{j}\,31{,}83\,\Omega$$
- Paralelní skupina – sčítají se převrácené hodnoty impedancí
  $$\hat{Z}_a = \frac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega$$
- Sériová skupina – impedance se sčítají: $\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$
- Celková impedance obvodu:
  $\hat{Z} = 10 + \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$
- Proud ze zdroje podle Ohmova zákona (napětí zdroje má fázi 0°)
  $$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$$
- Všemi částmi skupiny $\hat{Z}$ teče stejný proud – napětí na nich
  $$\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{V}$$
  $$\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\,\mathrm{V}$$
- Na všech větvích skupiny $\hat{Z}_a$ je stejné napětí – proudy větvemi
  $$\hat{I}_{L_1} = \frac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$$
  $$\hat{I}_{C_1} = \frac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\,\mathrm{A}$$
- Přehled součástek – impedance, napětí a proud (velikost ∠ fáze)

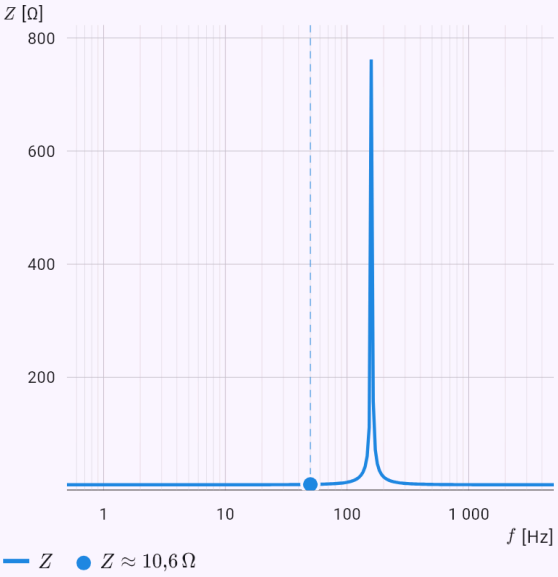
	$\hat{Z}\,[\Omega]$	$\hat{U}\,[\mathrm{V}]$	$\hat{I}\,[\mathrm{A}]$
R_1	10	$9{,}443\angle -19{,}22^\circ$	$0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$
L_1	$\mathrm{j}\,3{,}142$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$1{,}048\angle -19{,}22^\circ$
C_1	$-\mathrm{j}\,31{,}83$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$

- Výkon dodaný zdrojem
  $\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \mathrm{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}, \quad Q \approx 3{,}1$

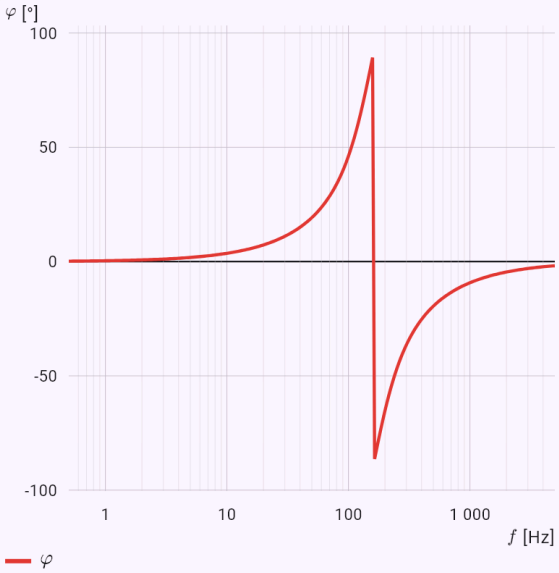
Schéma obvodu



Frekvenční charakteristika



Z $Z \approx 10{,}6\,\Omega$



φ

Vodorovná osa je logaritmická – každý dílek je desetinásobek frekvence. Tečky jsou zadaná frekvence a význačné body.

Nevyvážený můstek jako netlist – uzlová analýza.

Zadání: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Výsledek

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

Postup

- Součástky, uzly, mezi které jsou zapojeny, a jejich hodnoty

	+	−	
V_1	1	0	$12\,\mathrm{V}$
R_1	1	2	$100\,\Omega$
R_2	2	0	$200\,\Omega$
R_3	1	3	$150\,\Omega$
R_4	3	0	$250\,\Omega$
R_5	2	3	$50\,\Omega$

- Neznámé jsou napětí uzlů proti zemi a proudy zdroji napětí: $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- První Kirchhoffův zákon – součet proudů vytékajících z každého uzlu je nulový

$$1\text{: } I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2\text{: } \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3\text{: } \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- Zdroje napětí určují rozdíl napětí svých uzlů: $U_1 = 12$
- Soustava lineárních rovnic v maticovém tvaru pro neznámé $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- Gaussovou eliminací vyjdou napětí uzlů

  $U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
  $U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
  $U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$

- Napětí a proud každé součástky (od uzlu + k uzlu −)

	$U\,[\mathrm{V}]$	$I\,[\mathrm{A}]$
V_1	12	0,0701
R_1	4,158	0,04158
R_2	7,842	0,03921
R_3	4,277	0,02851
R_4	7,723	0,03089
R_5	0,1188	0,002376

Známá omezení

- Obvody jsou lineární a v ustáleném stavu – přechodové děje RC, RL a RLC počítají aplikace ve fyzice; diody, tranzistory a operační zesilovače zatím nejsou.
- Schéma se kreslí u formulářů a u obvodu zadaného výrazem; u netlistu jen tabulka součástek a uzlů. Obvod z fotky schématu se nerozpoznává.
- Netlist v jednom výpočtu buď stejnosměrný, nebo střídavý na jedné frekvenci – zdroje různých frekvencí a superpozice zatím nejsou.

49. Biologie a medicína

Výpočty z biologie, laboratoře a medicíny najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obory Biologie a Medicína: enzymová kinetika podle Michaelise a Mentenové (i s inhibitorem), Hardyho–Weinbergova rovnováha, ředění roztoků a počítání kolonií, membránový potenciál podle Nernsta a Goldmana a dávkování léků. Formulář vyplníte jako u ostatních aplikací; ikonka „?“ vysvětlí, odkud vzorce pocházejí.

Z naměřených rychlostí enzymové reakce určí K_m a V_max dvakrát: školním postupem z přímky Lineweavera a Burka a přesněji nelineární regresí; graf ukáže body i obě křivky. U Hardyho–Weinbergovy rovnováhy spočítá z počtů genotypů frekvence alel, očekávané počty a test χ^2, u recesivní choroby z jejího výskytu podíl přenašečů.

Ředění: objem zásobního roztoku podle $c_1V_1 = c_2V_2$, sériové ředění a CFU/ml z počtu kolonií. Dávkování: dávka podle hmotnosti nebo povrchu těla (Mosteller, Du Bois), rychlost infuze v ml/h a kapkách za minutu a clearance kreatininu podle Cockcrofta a Gaulta. Výpočty dávek jsou orientační a nenahrazují lékařský úsudek.

Ukázky

K_m a V_max z naměřených rychlostí – Lineweaver–Burk a nelineární regrese.

Zadání: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

81[umol_l_min]; input=table)

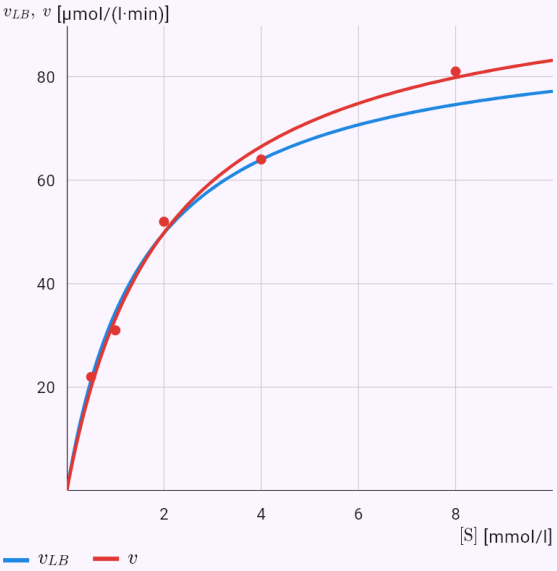
Výsledek

$$V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\,\text{mmol/l}$$

Postup

- Zadáno
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\,\text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Enzym E váže substrát S a přeměňuje ho na produkt. Rychlost reakce v roste s koncentrací substrátu, ale nasycuje se – nejvýš dosáhne limitní rychlosti V_max, když jsou všechny molekuly enzymu obsazené. Michaelisova konstanta K_m je koncentrace substrátu, při které je rychlost poloviční: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Z naměřených rychlostí se konstanty určí z přímky Lineweavera a Burka (1/v proti 1/[S], úsek 1/V_max, směrnice K_m/V_max) nebo přesněji nelineární regresí. Inhibitor: kompetitivní zvětší zdánlivé K_m, nekompetitivní zmenší V_max, akompetitivní zmenší obojí – vše faktorem α = 1 + [I]/K_i. Rovnice modelu:
  $$v = \frac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$$
- Převrácené hodnoty pro Lineweaverův–Burkův graf
  $\frac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \frac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Regresní přímka 1/v proti 1/[S]
  $\frac{1}{v} = \frac{1}{V_{max}} + \frac{K_m}{V_{max}} \cdot \frac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Konstanty z přímky (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \frac{1}{a} \approx 89{,}49\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \frac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Nelineární regrese – nejmenší čtverce přímo na křivce
  $\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i}\right)^2: \quad V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}$
- Lineweaverův–Burkův graf zveličuje chyby měření při malých koncentracích (velké 1/v) – výsledek je proto z nelineární regrese, přímka slouží jako školní postup a počáteční odhad.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Rychlost reakce s kompetitivním inhibitorem.

Zadání: model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l]; S=2[mmol_l];

`I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

Výsledek

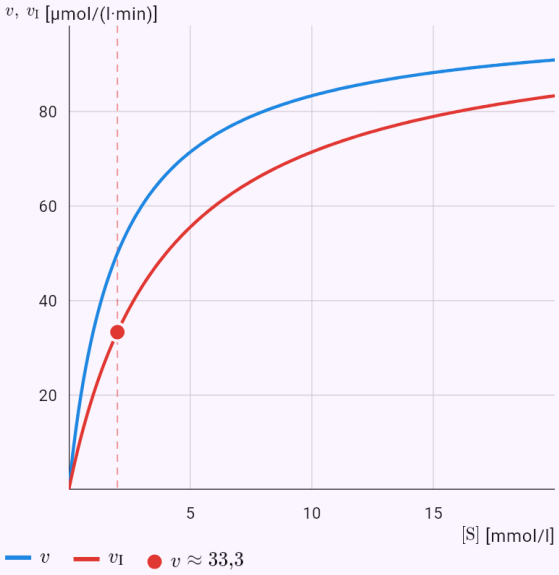
$$v \approx 33{,}33\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min})$$

Postup

- Hledáme v; zadáno $V_{max} = 100\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}), \quad K_m = 2\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{S}] =$
- Enzym E váže substrát S a přeměňuje ho na produkt. Rychlost reakce v roste s koncentrací substrátu, ale nasycuje se – nejvýš dosáhne limitní rychlosti V_max, když jsou všechny molekuly enzymu obsazené. Michaelisova konstanta K_m je koncentrace substrátu, při které je rychlost poloviční: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Z naměřených rychlostí se konstanty určí z přímky Lineweavera a Burka (1/v proti 1/[S], úsek 1/V_max, směrnice K_m/V_max) nebo přesněji nelineární regresí. Inhibitor: kompetitivní zvětší zdánlivé K_m, nekompetitivní zmenší V_max, akompetitivní zmenší obojí – vše faktorem α = 1 + [I]/K_i. Rovnice modelu: $v = \dfrac{V_{max}[\mathrm{S}]}{K_m + [\mathrm{S}]}$
- Faktor inhibice: $\alpha = 1 + \dfrac{[\mathrm{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Zdánlivé konstanty s inhibitorem $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\mathrm{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\mathrm{mol}/$
- Kompetitivní inhibitor soutěží se substrátem o aktivní místo – zvýší zdánlivé K_m, V_max se nezmění (při velké koncentraci substrátu inhibitor „přebije“).
- Dosadíme $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min})$

- Nasycení enzymu: $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Krevní skupiny MN – frekvence alel a test rovnováhy χ².

Zadání: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one];`

`aa=1303[one]; input=counts)`

Výsledek

$p \approx 0{,}5395$
$q \approx 0{,}4605$
$\chi^2 \approx 0{,}02698$
$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

Postup

- Zadáno: $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- V populaci, kde se jedinci páří náhodně a nepůsobí výběr, mutace ani migrace, zůstávají frekvence alel stálé a genotypy jsou v poměru p² : 2pq : q², kde p a q (p + q = 1) jsou frekvence alel A a a. Z počtů genotypů spočítáme p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) a očekávané počty; test χ² (1 stupeň volnosti) ukáže, zda se populace od rovnováhy odchyluje. U recesivní vlastnosti známe jen podíl homozygotů q², odtud q = √q² a podíl přenašečů 2pq. Rovnice modelu: $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frekvence alel – každý jedinec nese dvě

$p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$

- Očekávané počty při rovnováze

$E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = nq$

- Test dobré shody χ²

$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$

- p > 0,05 – odchylka od Hardyho–Weinbergovy rovnováhy není průkazná.

Podíl přenašečů recesivní choroby s výskytem 1 : 2500.

Zadání: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

Výsledek

$p \approx 0{,}98$
$q \approx 0{,}02$
$2pq \approx 0{,}0392$

Postup

- Zadáno: $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- Převedeme jednotky: $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- V populaci, kde se jedinci páří náhodně a nepůsobí výběr, mutace ani migrace, zůstávají frekvence alel stálé a genotypy jsou v poměru p² : 2pq : q², kde p a q (p + q = 1) jsou frekvence alel A a a. Z počtů genotypů spočítáme p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) a očekávané počty; test χ² (1 stupeň volnosti) ukáže, zda se populace od rovnováhy odchyluje. U recesivní vlastnosti známe jen podíl homozygotů q², odtud q = √q² a podíl přenašečů 2pq. Rovnice modelu: $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frekvence recesivní alely z podílu homozygotů

$q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$

- Frekvence genotypů:
$p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- Přenašečů (heterozygotů) je $2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

Kolik zásobního roztoku na 50 ml desetkrát zředěného.

Zadání: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

Výsledek

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

Postup

- Hledáme V_1; zadáno:
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Při ředění se látkové množství (hmotnost) rozpuštěné látky nemění: $c_1V_1 = c_2V_2$. Z toho plyne objem zásobního roztoku $V_1 = c_2V_2/c_1$, který doplníme rozpouštědlem na V_2. Při sériovém ředění se v každém kroku ředí stejným faktorem d (třeba 1 : 10), po n krocích je koncentrace c_0/d^n. V mikrobiologii se z počtu kolonií N na misce, na kterou se naneslo V_p ml ředění D, spočítá počet živých buněk v původním vzorku CFU/ml = N·D/V_p (spolehlivě pro 30 až 300 kolonií). Rovnice modelu: $c_1V_1 = c_2V_2$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $V_1 = \dfrac{c_2V_2}{c_1}$
- Dosadíme: $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Objem rozpouštědla a ředění:
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

Počet buněk ve vzorku z kolonií na misce.

Zadání: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

Výsledek

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

Postup

- Hledáme CFU; zadáno:
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Při ředění se látkové množství (hmotnost) rozpuštěné látky nemění: $c_1V_1 = c_2V_2$. Z toho plyne objem zásobního roztoku $V_1 = c_2V_2/c_1$, který doplníme rozpouštědlem na V_2. Při sériovém ředění se v každém kroku ředí stejným faktorem d (třeba 1 : 10), po n krocích je koncentrace c_0/d^n. V mikrobiologii se z počtu kolonií N na misce, na kterou se naneslo V_p ml ředění D, spočítá počet živých buněk v původním vzorku CFU/ml = N·D/V_p (spolehlivě pro 30 až 300 kolonií). Rovnice modelu:
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- Dosadíme
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

Klidový membránový potenciál neuronu (Goldman).

Zadání: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

Výsledek

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

Postup

- Hledáme V_m; zadáno $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- Převedeme jednotky: $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Ion, pro který je membrána propustná, se rozdělí tak, že elektrická síla vyrovná difuzi po koncentračním spádu. Rovnovážné napětí udává Nernstova rovnice E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i), kde c_o a c_i jsou koncentrace vně a uvnitř buňky, z náboj iontu, R plynová a F Faradayova konstanta (při 37 °C je RT/F ≈ 26,7 mV). Klidový membránový potenciál, na kterém se podílí více iontů, popisuje Goldmanova rovnice – koncentrace se v ní váží relativními propustnostmi P_K, P_Na, P_Cl (pro anion Cl^- jsou vnitřní a vnější prohozené). Rovnice modelu $V_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$
- Konstanta RT/F při dané teplotě: $\frac{RT}{F} = \frac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$
- Vážené koncentrace vně (o) a uvnitř (i) $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- Dosadíme: $V_m = 26{,}73 \cdot \ln \frac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- Klidový potenciál je blízko rovnovážnému potenciálu iontu s největší propustností – v klidu draslíku.

Dávka cytostatika podle povrchu těla.

Zadání: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

Výsledek

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

Postup

- Hledáme D; zadáno:
  $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Orientační výpočet – nenahrazuje lékařský úsudek, příbalový leták ani standardy pracoviště.
- Dávka podle hmotnosti D = d·m (mg/kg × kg); ze známé koncentrace roztoku plyne objem V = D/c. U cytostatik a u dětí se dávka počítá na povrch těla: Mostellerův vzorec S = √(výška·hmotnost/3600) (cm, kg, m²), pro srovnání i Du Boisův. Rychlost infuze v ml/h je objem děleno dobou, v kapkách za minutu ještě krát kapkový faktor soupravy (obvykle 20 kapek/ml). Clearance kreatininu podle Cockcrofta a Gaulta odhaduje funkci ledvin: Cl = (140 − věk)·hmotnost/(72·S_cr) s kreatininem v mg/dl (µmol/l děleno 88,4), u žen krát 0,85. Výpočty jsou orientační – nenahrazují lékařský úsudek ani příbalový leták. Rovnice modelu: $S = \sqrt{\dfrac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$
- Povrch těla (Mosteller): $S = \sqrt{\dfrac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Pro srovnání Du Bois:
  $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Dosadíme: $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

Clearance kreatininu u ženy (Cockcroft–Gault).

Zadání: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl;`

`sex=female)`

Výsledek

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Postup

- Hledáme Cl_{cr}; zadáno
  $a = 60\,\mathrm{let}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Orientační výpočet – nenahrazuje lékařský úsudek, příbalový leták ani standardy pracoviště.
- Dávka podle hmotnosti D = d·m (mg/kg × kg); ze známé koncentrace roztoku plyne objem V = D/c. U cytostatik a u dětí se dávka počítá na povrch těla: Mostellerův vzorec S = √(výška·hmotnost/3600) (cm, kg, m²), pro srovnání i Du Boisův. Rychlost infuze v ml/h je objem děleno dobou, v kapkách za minutu ještě krát kapkový faktor soupravy (obvykle 20 kapek/ml). Clearance kreatininu podle Cockcrofta a Gaulta odhaduje funkci ledvin: Cl = (140 − věk)·hmotnost/(72·S_cr) s kreatininem v mg/dl (µmol/l děleno 88,4), u žen krát 0,85. Výpočty jsou orientační – nenahrazují lékařský úsudek ani příbalový leták. Rovnice modelu: $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Kreatinin v mg/dl (µmol/l děleno 88,4):
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- Dosadíme
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - 60) \cdot 72}{72 \cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

Známá omezení

- Enzymová kinetika jen pro jeden substrát v ustáleném stavu (Michaelis–Menten); alosterické enzymy (Hillova rovnice) zatím nejsou.
- Hardy–Weinberg pro jeden gen se dvěma alelami; více alel a vázané geny na X zatím nejsou.
- Dávkování je orientační – nezohledňuje lékové interakce, věkové skupiny ani úpravy podle funkce orgánů kromě clearance kreatininu.

50. Ekonomie, finance a pojišťovnictví

Finanční a ekonomické výpočty najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obor Ekonomie: úročení vkladu (jednoduché, složené, spojité, smíšené, s daní a inflací), úročení na dny (30E/360, ACT/360, ACT/365), směnka a její diskont, pravidelné spoření (i s počátečním vkladem a ročním připisováním úroků), důchod z naspořené částky (dočasný, odložený, věčný), úvěr splácený anuitou nebo konstantním úmorem s umořovacím plánem a RPSN, dluhopis, investice (NPV, IRR, doba návratnosti), převod měn, bod zvratu, maximalizace zisku, tržní rovnováha, Leontiefův model a Markovovy řetězce, k tomu pojistná matematika – úmrtnostní tabulky, životní pojištění, důchody, rezervy a neživotní pojištění s bonus-malusem.

Investice do úvěrů P2P počítá hodnotu portfolia (hotovost na účtu a nesplacená jistina) po měsících: vklad se investuje po celých částkách na úvěr, úvěry se splácejí anuitně, platforma bere poplatek ze sjednání a podíl z úroků, ztráty jsou roční mírou nesplácení; pro srovnání uzavřený vzorec se spojitou reinvesticí. Opačně najde měsíční vklad nebo dobu pro cílovou částku.

Částky můžete počítat v libovolné měně – vyberete ji ve formuláři (výchozí je podle země telefonu); výpočet na měně nezávisí. Převod měn bere denní kurzovní lístek České národní banky (v češtině nebo na telefonu z Česka) nebo referenční kurzy Evropské centrální banky (v ostatních jazycích) a libovolný pár měn převede přes společnou měnu; ukáže zdroj a datum kurzu.

Částky v měnách jsou zapsané podle zvyklostí jazyka aplikace a regionu z nastavení telefonu (2 431,50 Kč; v angličtině 2,431.50; v němčině 2.431,50, ve Švýcarsku 2’431.50), stejně datum kurzovního lístku.

Postup ukazuje vzorce, dosazení a mezivýsledky: efektivní a reálnou sazbu, umořovací plán, současnou hodnotu toků, mezní tržbu a náklady jako derivace, přebytky jako integrály, Leontiefovu inverzi a stacionární rozdělení řešením soustavy. Pojistná matematika počítá z komutačních čísel; rezervu ukáže prospektivně i retrospektivně.

Ukázky

Vklad s měsíčním připisováním, daní z úroků a inflací.

Zadání: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledek

$$K_n \approx 152\,844{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno:
  $K_0 = 100\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- Převedeme jednotky:
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- Při jednoduchém úročení se úrok počítá stále z původního vkladu: K_n = K_0(1 + pn). Při složeném se úroky připisují a dál úročí: K_n = K_0(1 + p/m)^(mn), kde m je počet připsání za rok (roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční). Spojité úročení je limita pro m → ∞: K_n = K_0e^(pn). Daň z úroků d (v ČR 15 %) snižuje sazbu na p(1 − d). Efektivní roční sazba porovná různé frekvence. Diskontování je opačný výpočet – kolik vložit dnes. S inflací π je reálná hodnota K_n/(1 + π)^n. Smíšené úročení (jak banky připisují úroky jednou ročně) úročí celé roky složeně a zbytek posledního roku jednoduše: K_n = K_0(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Rovnice modelu:
  $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Připsání úroků za rok: $m = 12$
- Sazba po zdanění úroků:
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Efektivní roční sazba: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- Dosadíme
  $K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152\,844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Úroky celkem: $K_n - K_0 \approx 52\,844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Reálná hodnota (v dnešních cenách):
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113\,730{,}47\,\mathrm{CZK}$
- Reálná úroková sazba: $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- Úroková sazba je vyšší než inflace – reálná hodnota peněz roste.

Pravidelné měsíční spoření na 15 let.

Zadání: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledek

$$S \approx 438\,907{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $a = 2\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- Převedeme jednotky:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Při pravidelném spoření vkládáme každé období (měsíc, rok) částku a. Každý vklad se úročí jinak dlouho, proto je naspořená částka součet geometrické řady: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) pro vklady na začátku období (předlhůtně), bez prvního q pro vklady na konci (polhůtně); q = 1 + p/m a N = mn je počet vkladů. Z rovnice jde vyjádřit potřebný vklad nebo dobu spoření. Volitelný počáteční vklad K_0 se úročí celou dobu – přičte se K_0·q^N. Při ročním připisování úroků (v ČR obvyklé, ve škole „krátkodobé a dlouhodobé spoření“) se měsíční vklady během roku úročí jednoduše – za rok dají A = a(12 + p·13/2) při vkladech na začátku měsíce, a(12 + p·11/2) na konci – a teprve roční částky se úročí složeně. Rovnice modelu:
  $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Sazba po zdanění úroků:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Úročitel za období: $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- Dosadíme
  $S = 2\,000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438\,907{,}24\,\mathrm{C}$
- Vloženo celkem a úroky
  $N \cdot a = 180 \cdot 2\,000 = 360\,000\,\mathrm{CZK}, \quad S - Na \approx 78\,90$

Hypotéka 3 mil. Kč na 25 let – splátka, umořovací plán a RPSN.

Zadání: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledek

$$a \approx 17\,537{,}70\,\mathrm{CZK}$$

$$\mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

Postup

- Zadáno:
  $D = 3\,000\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15\,000$
- Převedeme jednotky: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Anuitní úvěr se splácí stejnými splátkami a. Každá splátka nejdřív zaplatí úrok z dlužné částky a zbytek sníží dluh (úmor), proto podíl úroku postupně klesá. Současná hodnota všech splátek se rovná výši úvěru, z toho a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Umořovací plán ukazuje pro každou splátku úrok, úmor a zbývající dluh. RPSN zahrnuje i poplatky – je to sazba, při které se současná hodnota splátek rovná skutečně vyplacené částce. Při splácení konstantním úmorem se dluh každé období sníží o stejnou částku M = D/N a splátka a_k = M + U_k s klesajícím úrokem postupně klesá – úroků se zaplatí méně než u anuity, první splátky jsou ale vyšší. Umořovací plán ukáže první rok a poslední splátku, nebo celý. Rovnice modelu:
  $$a = D\,\frac{q^N(q-1)}{q^N-1}, \quad q = 1 + \frac{p}{m}, \quad N = mn$$
- Úrok za období:
  $$i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$$
- Dosadíme
  $$a = 3\,000\,000 \cdot \frac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17\,537{,}70$$
- Umořovací plán (U úrok, M úmor, D zbývající dluh)

k	a	U_k	M_k	D_k
1	17 537,70	12 500	5 037,70	2 994 962,30
2	17 537,70	12 479,01	5 058,69	2 989 903,61
3	17 537,70	12 457,93	5 079,77	2 984 823,84
4	17 537,70	12 436,77	5 100,94	2 979 722,90
5	17 537,70	12 415,51	5 122,19	2 974 600,71
6	17 537,70	12 394,17	5 143,53	2 969 457,18
7	17 537,70	12 372,74	5 164,96	2 964 292,22
8	17 537,70	12 351,22	5 186,48	2 959 105,73
9	17 537,70	12 329,61	5 208,09	2 953 897,64
10	17 537,70	12 307,91	5 229,79	2 948 667,85
11	17 537,70	12 286,12	5 251,59	2 943 416,26
12	17 537,70	12 264,23	5 273,47	2 938 142,79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	17 537,70	72,77	17 464,93	0

- Zaplaceno celkem a z toho úroky
  $$\sum a \approx 5\,261\,310{,}37\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2\,261\,310{,}37\,\mathrm{CZ}$$
- RPSN – roční procentní sazba nákladů s poplatky
  $$D - F = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{(1+\mathrm{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$
- › Postup metody: bisekce, 14 iterací

Spoření po 1 000 Kč měsíčně s počátečním vkladem a ročním připisováním úroků (jak se učí ve škole).

Zadání: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

Výsledek

$$S \approx 85\,206{,}62\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $a = 1\,000, \quad K_0 = 20\,000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- Převedeme jednotky: $p = 2\,\% = 0{,}02$
- Při pravidelném spoření vkládáme každé období (měsíc, rok) částku a. Každý vklad se úročí jinak dlouho, proto je naspořená částka součet geometrické řady: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) pro vklady na začátku období (předlhůtně), bez prvního q pro vklady na konci (polhůtně); q = 1 + p/m a N = mn je počet vkladů. Z rovnice jde vyjádřit potřebný vklad nebo dobu spoření. Volitelný počáteční vklad K_0 se úročí celou dobu – přičte se K_0·q^N. Při ročním připisování úroků (v ČR obvyklé, ve škole „krátkodobé a dlouhodobé spoření“) se měsíční vklady během roku úročí jednoduše – za rok dají A = a(12 + p·13/2) při vkladech na začátku měsíce, a(12 + p·11/2) na konci – a teprve roční částky se úročí složeně. Rovnice modelu

$$A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$$

- Vklady za rok i s úroky během roku:
  $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Úročitel za období: $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- Dosadíme
  $S = 1\,000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20\,000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85\,206,$
- Vloženo celkem a úroky
  $K_0 + N \cdot a = 20\,000 + 60 \cdot 1\,000 = 80\,000\,\mathrm{CZK}, \quad S -$

Investice do úvěrů (P2P): 2 000 Kč měsíčně na 10 let, po 200 Kč na úvěr, s poplatkem a ztrátami.

Zadání: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct];`

```
L=200[one]; M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)
```

Výsledek

$$V \approx 318\,974{,}12\ \mathrm{CZK}$$

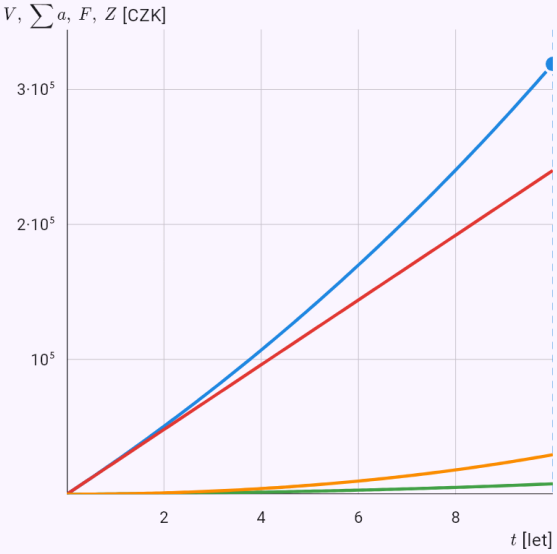
Postup

- Zadáno
  $a = 2\,000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20$
- Převedeme jednotky:
  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$
- Na platformě P2P půjček investor každý měsíc vloží na účet částku a. Hotovost se investuje po celých násobcích částky L na jeden úvěr (např. 200 Kč), zbytek čeká na účtu. Z každé investice si platforma strhne poplatek ze sjednání f, do úvěru jde L(1 − f). Úvěry se splácejí anuitně stejnými měsíčními splátkami s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) po M měsíců, i = p/12; platforma si z úroků ponechá podíl g. Míra nesplácení λ (ročně) odepíše každý měsíc část jistiny λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). Splátky se vracejí na účet a znovu investují. Hodnota portfolia V = H + P je hotovost na účtu H plus nesplacená jistina v úvěrech P. Výpočet simuluje měsíc po měsíci a pro srovnání uvádí uzavřený vzorec se spojitou reinvesticí: V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). Opačná úloha najde potřebný měsíční vklad nebo dobu pro cílovou hodnotu. Jde o odhad s pevnou výkonností – skutečný výsledek určují hlavně ztráty. Výkonnost uváděná platformou bývá už po poplatcích a ztrátách, ty pak nezadávejte znovu. Nejde o investiční doporučení. Rovnice modelu
  $V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1 - \lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$
- Měsíční úrok, měsíční ztráty a anuitní splátka
  $i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1 - \lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$
- Dosadíme
  $V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10\,735{,}19 + 308\,238{,}93 \approx 318\,97$
- Simulace po měsících – stav na konci roků (k v měsících): vloženo, jistina v úvěrech P, hotovost H, poplatky F, ztráty Z, hodnota V

k	$\sum a$	P_k	H_k	F_k	
12	24 000	23 784,39	726,58	266	26
24	48 000	49 198,83	1 248,72	606	1 03
36	72 000	75 757,04	2 129,17	1 032	2 33
48	96 000	103 744,84	3 148,57	1 568	4 21
60	120 000	133 102,33	4 439,70	2 240	6 69
72	144 000	164 382,06	5 541,37	3 054	9 80
84	168 000	197 551,52	6 600,52	4 002	13 58
96	192 000	232 369,52	7 962,71	5 094	18 07
108	216 000	269 327,69	9 238,91	6 346	23 30
120	240 000	308 238,93	10 735,19	7 764	29 33

- Vloženo, poplatky F, ztráty Z, čisté úroky U a zisk
  $\sum a = 240\,000\,\mathrm{CZK}, \quad F = 7\,764\,\mathrm{CZK}, \quad Z = 29\,337$
- Pro srovnání: uzavřený vzorec se spojitou reinvesticí
  $r = p(1 - g)(1 - f) - \lambda - f\,\frac{24}{M + 1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$
- Jde o odhad s pevnou výkonností a stálou mírou ztrát – skutečnost určují hlavně ztráty. Výkonnost uváděná platformou bývá už po poplatcích a ztrátách. Nejde o investiční doporučení.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Úvěr splácený konstantním úmorem – klesající splátky a srovnání s anuitou.

Zadání: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

Výsledek

$$a_1 \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}$$
$$a_N \approx 10\,041{,}67\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $D = 1\,200\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- Převedeme jednotky: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Anuitní úvěr se splácí stejnými splátkami a. Každá splátka nejdřív zaplatí úrok z dlužné částky a zbytek sníží dluh (úmor), proto podíl úroku postupně klesá. Současná hodnota všech splátek se rovná výši úvěru, z toho a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Umořovací plán ukazuje pro každou splátku úrok, úmor a zbývající dluh. RPSN zahrnuje i poplatky – je to sazba, při které se současná hodnota splátek rovná skutečně vyplacené částce. Při splácení konstantním úmorem se dluh každé období sníží o stejnou částku M = D/N a splátka a_k = M + U_k s klesajícím úrokem postupně klesá – úroků se zaplatí méně než u anuity, první splátky jsou ale vyšší. Umořovací plán ukáže první rok a poslední splátku, nebo celý. Rovnice modelu
  $$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\, i, \quad i = \frac{p}{m},$$
- Úrok za období: $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- Dosadíme: $M = \dfrac{1\,200\,000}{120} \approx 10\,000\,\mathrm{CZK}$
- První a poslední splátka
  $a_1 = M + D\, i \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1 + i) \approx 10\,0$
- Umořovací plán (U úrok, M úmor, D zbývající dluh)

k	a_k	U_k	M_k	D_k
1	15 000	5 000	10 000	1 190 000
2	14 958,33	4 958,33	10 000	1 180 000
3	14 916,67	4 916,67	10 000	1 170 000
4	14 875	4 875	10 000	1 160 000
5	14 833,33	4 833,33	10 000	1 150 000
6	14 791,67	4 791,67	10 000	1 140 000
7	14 750	4 750	10 000	1 130 000
8	14 708,33	4 708,33	10 000	1 120 000
9	14 666,67	4 666,67	10 000	1 110 000
10	14 625	4 625	10 000	1 100 000
11	14 583,33	4 583,33	10 000	1 090 000
12	14 541,67	4 541,67	10 000	1 080 000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	10 041,67	41,67	10 000	0

- Zaplaceno celkem a z toho úroky:
  $\sum a_k \approx 1\,502\,500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302\,500\,\mathrm{CZK}$
- Pro srovnání anuitou – splátka a úroky celkem:
  $a \approx 12\,727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327\,343{,}42\,\mathrm{CZK}$
- Splácení konstantním úmorem ušetří na úrocích $24\,843{,}42\,\mathrm{CZK}$, první splátky jsou ale vyšší.

Úrok za dny podle standardu 30E/360 s daní 15 %.

Zadání: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15; end=2026-`

`09-20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

Výsledek

$$u' \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$$
$$K_n \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $K_0 = 50\,000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- Převedeme jednotky:
  $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Krátkodobé vklady se úročí jednoduše za počet dní t: u = $K_0 \cdot p \cdot t/B$. Počet dní a délku roku B určuje standard počítání dní: 30E/360 (banky a školy v ČR a Německu) počítá každý měsíc za 30 dní (31. den jako 30.) a rok za 360 dní, ACT/360 (Francie, Španělsko, peněžní trh) skutečné dny a rok 360 dní, ACT/365 (Velká Británie) skutečné dny a rok 365 dní. Dny se spočítají z data vložení a výběru, nebo je zadejte přímo. Daň z úroků se odečte z úroku. Opačný výpočet – kolik vložit dnes, aby vznikla daná částka – je diskontování. Rovnice modelu:
  $u = K_0 \cdot p \cdot \dfrac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$

- Standard počítání dní a délka roku:
  $30\mathrm{E}/360: \quad B = 360$
- Počet dní (30E/360: měsíc 30 dní, 31. jako 30.)
  $15.\,3.\,2026 \to 20.\,9.\,2026: \quad t = 360 \cdot (2026 - 2026)$ -
- Dosadíme: $u = 50\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \dfrac{185}{360} \approx 513{,}89\ \mathrm{CZK}$
- Daň z úroku a úrok po zdanění
  $u \cdot d \approx 77{,}08\ \mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
- Úroky celkem: $K_n = K_0 + u' \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$

Diskont směnky – kolik banka vyplatí 90 dní před splatností.

Zadání: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

Výsledek

$$K \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$$
$$D \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $N = 100\,000, \quad d = 6\,\%$
- Převedeme jednotky: $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Směnka je závazek zaplatit v den splatnosti směnečnou částku N. Banka ji může koupit dřív (eskontovat) a vyplatí ji sníženou o diskont D = N·d·t/B, kde d je diskontní sazba a t počet dní do splatnosti: K = N(1 − d·t/B). Diskont se počítá z konečné částky, ne z vyplacené, proto je skutečná výnosnost banky i = d/(1 − d·t/B) vyšší než diskontní sazba. Obvyklý je standard ACT/360. Rovnice modelu:
  $D = N \cdot d \cdot \dfrac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\dfrac{t}{B}\right)$
- Standard počítání dní a délka roku:
  $\mathrm{ACT}/360: \quad B = 360$

- Počet dní podle kalendáře:
  $10.\,1.\,2026 \to 10.\,4.\,2026: \quad t = 90$
- Dosadíme: $D = 100\,000 \cdot 0{,}06 \cdot \dfrac{90}{360} \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$
- Vyplacená částka: $K = N - D \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$
- Skutečná výnosnost banky: $i = \dfrac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- Diskont se počítá z konečné částky – banka proto ve skutečnosti vydělá víc, než je diskontní sazba.

Měsíční důchod ze 2 mil. Kč na 20 let, odložený o 5 let.

Zadání: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledek

$$a \approx 12\,884{,}60\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $K = 2\,000\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- Převedeme jednotky: $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Důchod (renta) je pravidelná výplata a z naspořené částky K, která se mezitím dál úročí. Současná hodnota N výplat je K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m − stejný vzorec jako u splácení úvěru. Výplaty na začátku období (předlhůtní) násobí vzorec q. Odložený důchod začne vyplácet až po k letech, částka mezitím naroste na K·q^(mk). Věčný důchod vyplácí jen úroky a jistina zůstává: K = a/(q − 1). Vyjde výše výplaty, potřebná částka, nebo jak dlouho výplaty vydrží. Rovnice modelu: $K = a\,\dfrac{1 - q^{-N}}{q - 1} \cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \dfrac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Úročitel za období: $q = 1 + \dfrac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$
- Diskontování o dobu odkladu: $q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $a = \dfrac{K(q-1)q^{mk}}{1 - q^{-N}}$
- Dosadíme: $a \approx 12\,884{,}60\ \mathrm{CZK}$
- Naspořená částka na začátku výplat: $K\,q^{mk} \approx 2\,323\,233{,}56\ \mathrm{CZK}$

- Průběh výplat (U úrok, K zůstatek)

k	a	U_k	K_k
1	12 884,60	5 808,08	2 316 157,05
2	12 884,60	5 790,39	2 309 062,84
3	12 884,60	5 772,66	2 301 950,90
4	12 884,60	5 754,88	2 294 821,18
5	12 884,60	5 737,05	2 287 673,64
6	12 884,60	5 719,18	2 280 508,23
7	12 884,60	5 701,27	2 273 324,90
8	12 884,60	5 683,31	2 266 123,61
9	12 884,60	5 665,31	2 258 904,33
10	12 884,60	5 647,26	2 251 666,99
11	12 884,60	5 629,17	2 244 411,56
12	12 884,60	5 611,03	2 237 137,99
⋮	⋮	⋮	⋮
240	12 884,60	32,13	0

- Vyplaceno celkem a z toho úroky $\sum a \approx 3\,092\,303{,}41\ \mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1\,092\,303{,}41$

Cena dluhopisu a jeho durace.

Zadání: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct]; freq=annual; cur=EUR)`

Výsledek

$$P \approx 1\,044{,}52\ \text{▮}$$

Postup

- Zadáno: $N = 1\,000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- Převedeme jednotky: $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Dluhopis vyplácí každé období kupón C = c·N/m a na konci jmenovitou hodnotu N. Jeho cena je současná hodnota těchto plateb diskontovaných tržním výnosem y. Když je tržní výnos nižší než kupón, prodává se dluhopis nad nominálem (s prémií), jinak pod ním. Výnos do splatnosti je sazba, při které se současná hodnota plateb rovná ceně – řeší se numericky. Durace je vážená průměrná doba plateb a udává citlivost ceny na změnu úrokových sazeb. Rovnice modelu $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^k} + \frac{N_{nom}}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^N}$

- Kupón za období: $C = \dfrac{c \cdot N_{nom}}{m} = 50\,\text{▮}, \quad N = 5$
- Dosadíme $P = 50 \cdot \dfrac{1 - 0{,}961538^5}{0{,}04} + \dfrac{1\,000}{1{,}04^5} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$
- Tržní výnos je nižší než kupón – dluhopis se prodává nad jmenovitou hodnotou.
- Durace (Macaulayova a modifikovaná) $D = \dfrac{1}{P}\displaystyle\sum_k t_k\,PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \dfrac{D}{1 + \frac{y}{m}} \approx 4{,}382$

Vnitřní výnosové procento investice.

Zadání: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

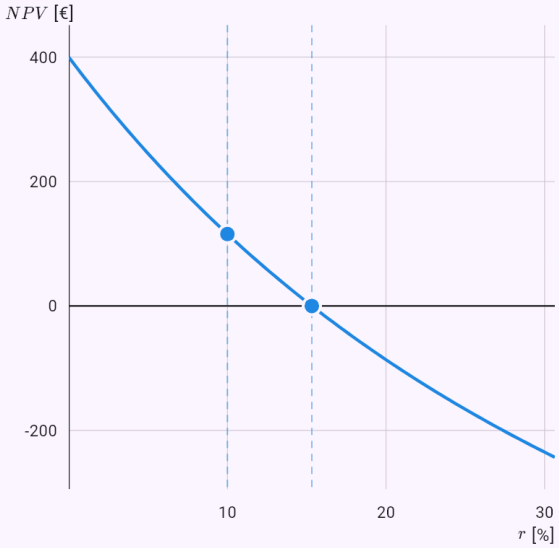
Výsledek

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Postup

- Zadáno:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Převedeme jednotky: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Čistá současná hodnota NPV sečte peněžní toky projektu CF_0, CF_1, … diskontované požadovanou výnosností r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Projekt s NPV > 0 vydělá víc, než je požadovaný výnos. Vnitřní výnosové procento IRR je sazba, při které NPV = 0 – kořen polynomiální rovnice, hledá se numericky. Doba návratnosti udává, kdy součet toků (prostý, nebo diskontovaný) přestane být záporný. Rovnice modelu:
  $$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$
- Čistá současná hodnota
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^{1}} + \frac{400}{1{,}1^{2}} + \frac{500}{1{,}1^{3}} + \frac{200}{1{,}1^{4}} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – projekt vynese aspoň požadovaný výnos.
- Rovnici vyřešíme numericky (půlením intervalu):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Postup metody: bisekce, 14 iterací

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Převod eur na koruny podle dnešního kurzu ČNB.

Zadání: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

Výsledek

$$2\,443{,}50\,\mathrm{CZK}$$

$$1\,€ \approx 24{,}435\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $A = 100$
- Kurz udává cenu jednotky cizí měny. Česká národní banka vyhlašuje každý pracovní den kurz koruny k ostatním měnám, Evropská centrální banka referenční kurz eura. Částku převedeme přes společnou měnu: $A_2 = A_1 \cdot k_1 / k_2$, kde k_1 a k_2 jsou hodnoty obou měn v koruně (ČNB), nebo v euru (ECB) – tzv. křížový kurz. Banky a směnárny používají vlastní nákupní a prodejní kurzy s přirážkou; výpočet je orientační. Rovnice modelu: $A_2 = A_1 \cdot \frac{k_1}{k_2}$
- Kurzovní lístek: $\mathrm{ČNB},\ 27.\ 11.\ 2026$
- Kurzy: $1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$
- Dosadíme: $A_2 = 100 \cdot \frac{24{,}435}{1} \approx 2\,443{,}50\,\mathrm{CZK}$
- Banky a směnárny používají vlastní kurzy s přirážkou – výpočet je orientační.

Maximální zisk z mezní tržby a mezních nákladů.

Zadání: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

`e=0.5[one]; cur=CZK)`

Výsledek

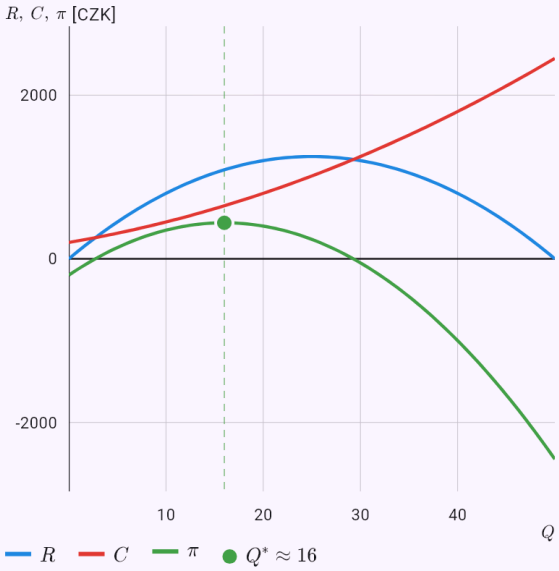
$$Q^* \approx 16$$
$$p^* \approx 68\,\text{CZK}$$
$$\pi^* \approx 440\,\text{CZK}$$

Postup

- Zadáno:
  $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Firma s lineární poptávkou p = a − bQ má tržby R = pQ a náklady C(Q) = F + cQ + eQ². Zisk π = R − C je největší, kde je jeho derivace nulová, tedy mezní tržba se rovná mezním nákladům: MR = R′(Q) = MC = C′(Q). Druhá derivace ověří, že jde o maximum. Cenová pružnost poptávky ε = (dQ/dp)·(p/Q) říká, o kolik procent se změní poptávané množství při změně ceny o 1 %; |ε| > 1 je pružná poptávka. Rovnice modelu:
  $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Tržby a náklady:
  $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Mezní tržba a mezní náklady (derivace):
  $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- Dosadíme:
  $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- Druhá derivace zisku je záporná − maximum:
  $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Cena a zisk v optimu:
  $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\text{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\text{CZK}$

- Cenová pružnost poptávky: $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Tržní rovnováha, přebytky a dopad daně.

Zadání: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

`t=5[one]; cur=CZK)`

Výsledek

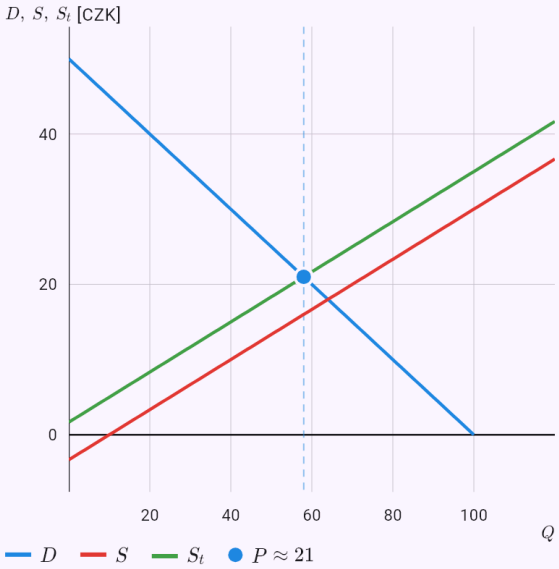
$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

Postup

- Zadáno: $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- Poptávka Q_D = a − bP klesá s cenou, nabídka Q_S = c + dP roste. Trh je v rovnováze, kde se protnou: P* = (a − c)/(b + d). Přebytek spotřebitele je plocha mezi poptávkovou křivkou a cenou (co by kupující byli ochotni zaplatit navíc), přebytek výrobce plocha mezi cenou a nabídkovou křivkou – obojí integrál. Daň t za kus posune nabídku o t nahoru: kupující platí víc, prodávající dostanou méně, obchoduje se méně a vzniká ztráta mrtvé váhy. Rovnice modelu:
  $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- Dosadíme:
  $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- S daní: cena pro kupující a pro prodávající
  $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Výnos daně a ztráta mrtvé váhy
  $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Přebytek spotřebitele:
  $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Přebytek výrobce:
  $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$

- Pružnost poptávky a nabídky v rovnováze
  $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Leontiefův model tří odvětví.

Zadání: `model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100 200`

```
150[one])
```

Výsledek

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

Postup

- Zadáno
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- Leontiefův model popisuje ekonomiku z n odvětví, která si navzájem dodávají produkci. Prvek a_ij matice technických koeficientů A říká, kolik produkce odvětví i spotřebuje odvětví j na jednotku své produkce. Celková produkce x musí pokrýt mezispotřebu Ax i konečnou poptávku y: x = Ax + y, odtud x = (I − A)⁻¹y. Leontiefova inverze (I − A)⁻¹ ukazuje, kolik musí každé odvětví vyrobit na jednotku konečné poptávky. Rovnice modelu:
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Matice technických koeficientů a konečná poptávka
  $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$
- Matice I − A
  $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$
- Leontiefova inverze
  $(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$
- Dosadíme: $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Meziodvětvové toky
  $x_{ij} = a_{ij}x_j:\quad \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$

Dlouhodobé podíly zákazníků tří značek.

Zadání: `model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15 0.8[one])`

Výsledek

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

Postup

- Zadáno:
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Markovův řetězec přechází mezi stavy s pravděpodobnostmi p_ij, které závisí jen na současném stavu (ne na historii). Řádky matice přechodu P mají součet 1. Rozdělení po jednom kroku je $\pi_1 = \pi_0 P$, po n krocích $\pi_n = \pi_0 P^n$. Stacionární rozdělení splňuje $\pi P = \pi$ a ukazuje dlouhodobé podíly stavů – podíly zákazníků značek, tříd bonus-malus, stavů stroje. Rovnice modelu:
  $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Matice přechodu
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- Soustava pro stacionární rozdělení
  $$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3 \\ \pi_3 &= 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3 \end{aligned}$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- Po dlouhé době se rozdělení ustálí na stacionárním bez ohledu na počáteční stav (u regulárního řetězce).

Naděje dožití 65leté ženy.

Zadání: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

Výsledek

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

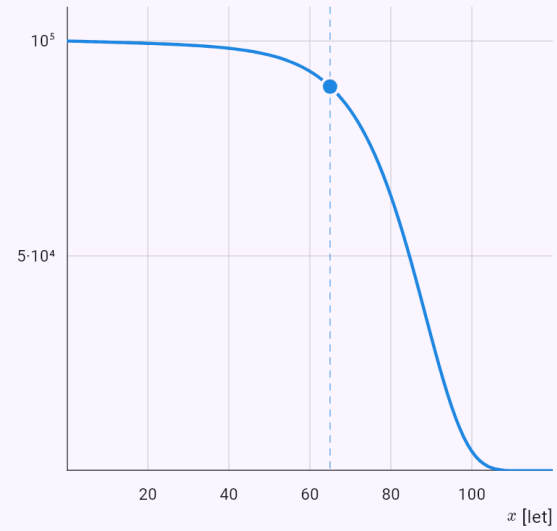
Postup

- Zadáno: $x = 65$
- Modelová tabulka (Gompertz–Makeham) přibližně podle obyvatel ČR – pro přesné výpočty zadejte qₓ z tabulek ČSÚ nebo pojišťovny.
- Úmrtnostní tabulka udává, kolik z výchozích 100 000 narozených (l_x) se dožije věku x. Pravděpodobnost, že x-letý se dožije dalších n let, je ₙpₓ = l_{x+n}/l_x, pravděpodobnost úmrtí ₙqₓ = 1 − ₙpₓ. Naděje dožití e_x je průměrný počet let, které x-letý ještě prožije. Modelová tabulka podle Gompertzova–Makehamova zákona μ(x) = A + B·c^x je nastavená přibližně podle obyvatel ČR; přesné výpočty používají tabulky ČSÚ – zadejte vlastní qₓ. Rovnice modelu

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\geq 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$

- Počet dožívajících z tabulky: $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- Dosadíme: $e_{65} \approx 20{,}57$
- Průměrně se dožije věku $85{,}57$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Roční pojistné smíšeného pojištění.

Zadání: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct]; S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

Výsledek

$$P \approx 40\,227{,}05\ \text{CZK}$$

Postup

- Zadáno:
  $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1\,000\,000$
- Převedeme jednotky: $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Modelová tabulka (Gompertz–Makeham) přibližně podle obyvatel ČR – pro přesné výpočty zadejte qₓ z tabulek ČSÚ nebo pojišťovny.
- Netto pojistné se počítá z principu ekvivalence: současná hodnota pojistného se rovná současné hodnotě budoucích plnění. Pomocí komutačních čísel D_x = v^x l_x, N_x, C_x a M_x (v = 1/(1 + i), i je technická úroková míra) je jednorázové pojistné pro pojištění pro případ smrti na n let (M_x − M_{x+n})/D_x, pro dožití D_{x+n}/D_x, smíšené jejich součet; důchod ä = (N_x − N_{x+n})/D_x. Běžné roční pojistné vznikne dělením anuitou ä. Rezerva v roce t je současná hodnota budoucích plnění minus budoucího pojistného (prospektivně) – a vyjde stejně jako naspořené pojistné minus vyplacená plnění (retrospektivně). Rovnice modelu

$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k\geq x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k\geq}$$

- Komutační čísla
  $D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$
- Jednorázové netto pojistné
  $A_{x:\overline{20}|} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20}|} \approx 622\,543{,}08\ \text{CZK}$
- Běžné roční pojistné

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} \approx 15{,}4757, \quad P = \frac{S \cdot A_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} \approx 40\,227{,}05\ \text{CZK}$$

Systém bonus-malus a průměrná úroveň pojistného.

Zadání: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

Výsledek

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

Postup

- Zadáno: $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- Převedeme jednotky: $q = 10\,\% = 0{,}1$
- U neživotního pojištění (auta, majetek) je očekávaná roční škoda pojištěného E[S] = λ·m, kde λ je střední počet škod za rok a m průměrná výše škody. Rizikové pojistné se zvyšuje o přirážku θ na náklady a bezpečnost. Systém bonus-malus mění pojistné podle škodního průběhu: rok bez škody posune do lepší třídy, škoda zpět. Třídy tvoří Markovův řetězec; jeho stacionární rozdělení dá dlouhodobé podíly tříd a průměrnou úroveň pojistného.
  Rovnice modelu: $\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$
- Rok bez škody posune o třídu níž (sleva), škoda vrátí do první třídy.
- Matice přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

- Soustava pro stacionární rozdělení

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

- Dlouhodobé podíly tříd:
  $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- Dosadíme: $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

Známá omezení

- Úmrtnostní tabulky jsou modelové (Gompertz–Makeham, přibližně podle ČR); pro přesné výpočty zadejte vlastní q_x z tabulek ČSÚ nebo pojišťovny.
- Kurzy jsou referenční – banky a směnárny počítají s vlastními kurzy a poplatky.
- Mikroekonomie s lineární poptávkou a kvadratickými náklady; obecné funkce zadané vzorcem zatím nejsou.
- Den splatnosti a svátky standardy neřeší – úrok se počítá za dny mezi zadanými daty; u úvěru se neuvažují mimořádné splátky ani změna sazby.
- Investice do úvěrů P2P je odhad s pevnou výkonností a stálou mírou ztrát; nezohledňuje vymáhání dlužných částek, předčasné splacení, sekundární trh ani daně. Nejde o investiční doporučení.

51. Lineární programování, doprava, přiřazení a maticové hry

Optimalizační úlohy najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obor Logistika a sítě (lineární programování i v oboru Ekonomie): lineární a celočíselné programování, dopravní problém a přiřazovací problém. Úlohu lineárního programování můžete i napsat nebo vyfotit, třeba max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – omezení na samostatných řádcích nebo za středníkem, místo max lze psát min a slovo integer udělá úlohu celočíselnou.

Postup ukazuje standardní tvar s doplňkovými a pomocnými proměnnými a simplexové tabulky v přesných zlomcích s vyznačeným pivotem. Omezení ≥ a = řeší výchozí dvoufázová metoda, čipem lze zvolit metodu velkého M. K optimu přidá duální úlohu, stínové ceny omezení a citlivostní analýzu (rozmezí koeficientů účelové funkce a pravých stran). U dvou proměnných nakreslí přípustnou oblast, vrcholy s hodnotami účelové funkce a vrstevnici procházející optimem. Celočíselnou úlohu řeší metodou větví a mezí a strom větvení projdete šipkami jako graf.

Dopravní problém se zadává maticí jednotkových nákladů, nabídkou dodavatelů a poptávkou odběratelů; nevyrovnanou úlohu doplní fiktivním dodavatelem nebo odběratelem. Výchozí řešení dá metoda severozápadního rohu, minimálního prvku nebo Vogelova aproximační metoda, optimum metoda MODI s potenciály a uzavřenými okruhy; plán přepravy se ukáže i jako graf. Přiřazovací problém řeší maďarská metoda – redukce řádků a sloupců, pokrytí nul čarami a výběr nezávislých nul; umí i maximalizaci a obdélníkovou matici.

Maticové hry dvou hráčů (obor Logistika a sítě, nebo zápis game(3 -1 2; -2 4 1) – řádky jsou strategie hráče A, sloupce hráče B): hra s nulovým součtem nejdřív hledá sedlový bod (maximin = minimax), pak vyškrtá dominované strategie a smíšené strategie spočítá vzorcem u hry 2 × 2, graficky u hry 2 × n a m × 2 (dolní a horní obálka přímek) a u větší hry lineárním programováním se simplexovými tabulkami – duální úloha dá strategii druhého hráče. Výsledkem jsou optimální strategie obou hráčů a cena hry v přesných zlomcích. Bimaticová hra (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), výplaty A | výplaty B) ukáže nejlepší odpovědi a Nashovy rovnováhy v čistých strategiích, u hry 2 × 2 i smíšenou rovnováhu.

Ukázky

Výrobní plán simplexovou metodou se stínovými cenami a citlivostí.

Zadání: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

Výsledek

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

Postup

- Úloha lineárního programování

  $\max z = 3x_1 + 5x_2$
  $x_1 \le 4$
  $2x_2 \le 12$
  $3x_1 + 2x_2 \le 18$
  $x_1, x_2 \ge 0$

- Podmínky nezápornosti nejsou zadané – předpokládáme $x_1, x_2 \ge 0$
- Standardní tvar: k omezení ≤ přičteme doplňkovou proměnnou s, od omezení ≥ ji odečteme a přidáme pomocnou (umělou) proměnnou a, k rovnosti jen pomocnou. Výchozí bázi tvoří s a a

  $x_1 + s_1 = 4$
  $2x_2 + s_2 = 12$
  $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

- 1. simplexová tabulka: vstupuje x_2 (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_2 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	–
s_2	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12	6
s_3	3	2	0	0	1	18	9
z	−3	−5	0	0	0	0	

- 2. simplexová tabulka: vstupuje x_1 (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_3 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	–
s_3	$\boxed{3}$	0	0	−1	1	6	2
z	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	

- 3. tabulka: žádné $z_j - c_j$ není záporné – řešení je optimální.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

- Optimální řešení přečteme z poslední tabulky (proměnné mimo bázi jsou nulové): $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\quad z_{max} = 36$
- Duální úloha – každému omezení odpovídá jedna duální proměnná, každé proměnné jedno omezení

  $\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
  $y_1 + 3y_3 \ge 3$
  $2y_2 + 2y_3 \ge 5$
  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- Stínové ceny (optimální duální proměnné) z poslední tabulky: o kolik se změní optimum, když pravou stranu omezení zvětšíme o 1. Nevyčerpané omezení (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má stínovou cenu 0.

	$b_i - a_i x$	y_i
1	2	0
2	0	$\frac{3}{2}$
3	0	1

- Optimum duální úlohy se rovná optimu původní:

  $$w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$$

- Citlivostní analýza – v jakém rozmezí se mohou měnit koeficienty účelové funkce, aby zůstalo optimální stejné řešení

	c_j	
x_1	3	$\langle 0;\ \frac{15}{2}\rangle$
x_2	5	$\langle 2;\ \infty)$

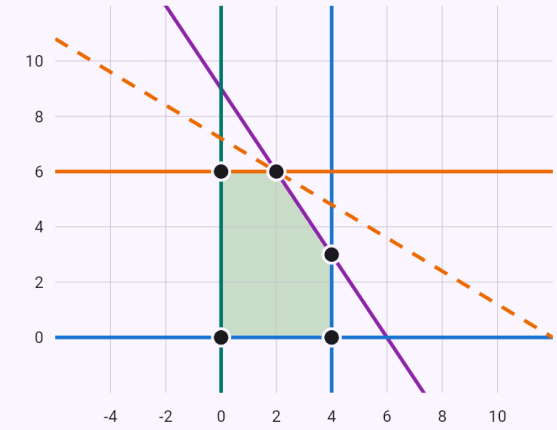
- V jakém rozmezí se mohou měnit pravé strany, aby zůstala optimální stejná báze (stínové ceny platí jen v něm)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ \infty)$
2	12	$\langle 6;\ 18\rangle$
3	18	$\langle 12;\ 24\rangle$

- Grafické řešení: přípustná oblast je mnohoúhelník, optimum leží v některém vrcholu. Hodnoty účelové funkce ve vrcholech (★ optimum)

$[x_1;\ x_2]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 6]$	30	
$[2;\ 6]$	36	★
$[4;\ 0]$	12	
$[4;\ 3]$	27	

Graf



- $x \le 4 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty;\ 4\rangle$
- $2y \le 12 \ \Leftrightarrow\ y \in (-\infty;\ 6\rangle$
- $3x + 2y \le 18 \ \Leftrightarrow\ y \le 9 - \frac{3x}{2}$
- $x \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \langle 0;\ \infty)$
- $y \ge 0 \ \Leftrightarrow\ y \in \langle 0;\ \infty)$
- $z = 36 \ \Leftrightarrow\ 3x + 5y = 36$

Řešením jsou průsečíky křivek ve vybarvené oblasti (plný bod); prázdný bod nerovnicím nevyhovuje.

Průsečíky grafů:

● $[0;0]$ ● $[0;6]$ ● $[2;6]$ ● $[4;0]$ ● $[4;3]$

Úloha napsaná zápisem – grafické řešení pro dvě proměnné.

Zadání: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

Výsledek

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

Postup

- Úloha lineárního programování

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \leq 4$
  $x + 3y \leq 6$
  $x, y \geq 0$

- Standardní tvar: k omezení ≤ přičteme doplňkovou proměnnou s, od omezení ≥ ji odečteme a přidáme pomocnou (umělou) proměnnou a, k rovnosti jen pomocnou. Výchozí bázi tvoří s a a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- 1. simplexová tabulka: vstupuje x (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_1 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{1}$	1	1	0	4	4
s_2	1	3	0	1	6	6
z	-3	-2	0	0	0	

- 2. tabulka: žádné $z_j - c_j$ není záporné – řešení je optimální.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	1	0	4
s_2	0	2	-1	1	2
z	0	1	3	0	12

- Optimální řešení přečteme z poslední tabulky (proměnné mimo bázi jsou nulové): $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 12$

- Duální úloha – každému omezení odpovídá jedna duální proměnná, každé proměnné jedno omezení

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \geq 3$
  $u_1 + 3u_2 \geq 2$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Stínové ceny (optimální duální proměnné) z poslední tabulky: o kolik se změní optimum, když pravou stranu omezení zvětšíme o 1. Nevyčerpané omezení (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má stínovou cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	3
2	2	0

- Optimum duální úlohy se rovná optimu původní: $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Citlivostní analýza – v jakém rozmezí se mohou měnit koeficienty účelové funkce, aby zůstalo optimální stejné řešení

	c_j	
x	3	$\langle 2;\ \infty)$
y	2	$(-\infty;\ 3\rangle$

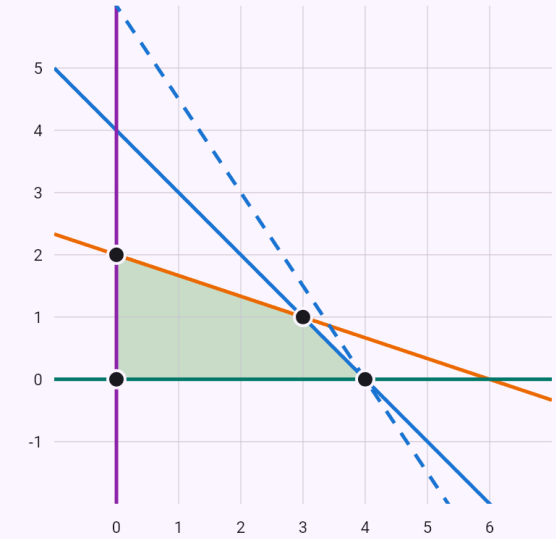
- V jakém rozmezí se mohou měnit pravé strany, aby zůstala optimální stejná báze (stínové ceny platí jen v něm)

	b_i	
1	4	$\langle 0;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ \infty)$

- Grafické řešení: přípustná oblast je mnohoúhelník, optimum leží v některém vrcholu. Hodnoty účelové funkce ve vrcholech (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 2]$	4	
$[3;\ 1]$	11	
$[4;\ 0]$	12	★

Graf



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$

$x + 3y \leq 6 \ \Leftrightarrow \ y \leq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$

$z = 12 \ \Leftrightarrow \ 3x + 2y = 12$

Řešením jsou průsečíky křivek ve vybarvené oblasti (plný bod); prázdný bod nerovnicím nevyhovuje.

Průsečíky grafů:

● $[0;0]$ ● $[0;2]$ ● $[3;1]$ ● $[4;0]$

Minimalizace s omezeními ≥ dvoufázovou metodou.

Zadání: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

Výsledek

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Postup

- Úloha lineárního programování

  $\min z = 2x + 3y$

  $x + y \geq 4$

  $x + 3y \geq 6$

  $x, y \geq 0$

- Podmínky nezápornosti nejsou zadané – předpokládáme $x, y \geq 0$
- Minimum hledáme jako maximum opačné funkce: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- Standardní tvar: k omezení ≤ přičteme doplňkovou proměnnou s, od omezení ≥ ji odečteme a přidáme pomocnou (umělou) proměnnou a, k rovnosti jen pomocnou. Výchozí bázi tvoří s a a

  $x + y - s_1 + a_1 = 4$

  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- První fáze: pomocné proměnné nejsou skutečným řešením, proto je nejdřív vynulujeme – minimalizujeme jejich součet $\min w = a_1 + a_2$
- 1. simplexová tabulka: vstupuje y (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje a_2 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	1	1	−1	0	1	0	4	4
a_2	1	**3**	0	−1	0	1	6	2
w	−2	−4	1	1	0	0	−10	

- 2. simplexová tabulka: vstupuje x (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje a_1 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	**$\frac{2}{3}$**	0	−1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	3
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	6
w	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	−2	

- Na konci první fáze je w = 0 – pomocné proměnné jsou nulové a vypustíme je. Druhá fáze pokračuje se skutečnou účelovou funkcí.
- 3. tabulka: žádné $z_j - c_j$ není záporné – řešení je optimální.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−9

- Optimální řešení přečteme z poslední tabulky (proměnné mimo bázi jsou nulové): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- Duální úloha – každému omezení odpovídá jedna duální proměnná, každé proměnné jedno omezení

  $\max v = 4u_1 + 6u_2$

  $u_1 + u_2 \leq 2$

  $u_1 + 3u_2 \leq 3$

  $u_1, u_2 \geq 0$

- Stínové ceny (optimální duální proměnné) z poslední tabulky: o kolik se změní optimum, když pravou stranu omezení zvětšíme o 1. Nevyčerpané omezení (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má stínovou cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Optimum duální úlohy se rovná optimu původní:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Citlivostní analýza – v jakém rozmezí se mohou měnit koeficienty účelové funkce, aby zůstalo optimální stejné řešení

	c_j	
x	2	$\langle 1;\ 3\rangle$
y	3	$\langle 2;\ 6\rangle$

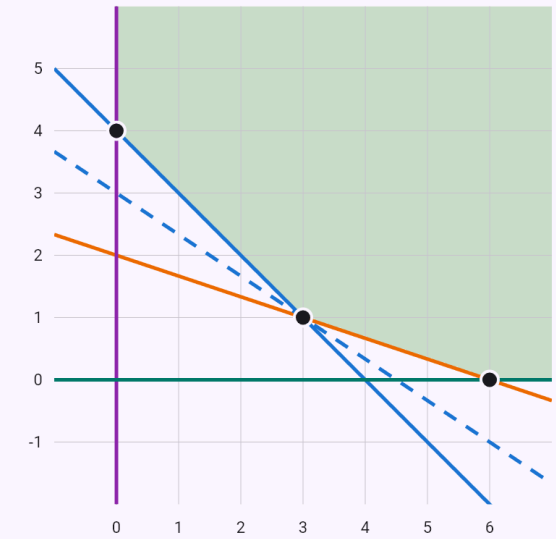
- V jakém rozmezí se mohou měnit pravé strany, aby zůstala optimální stejná báze (stínové ceny platí jen v něm)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- Grafické řešení: přípustná oblast je mnohoúhelník, optimum leží v některém vrcholu. Hodnoty účelové funkce ve vrcholech (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graf



- $x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
- $x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
- $x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$
- $y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$
- $z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Řešením jsou průsečíky křivek ve vybarvené oblasti (plný bod); prázdný bod nerovnicím nevyhovuje.

Průsečíky grafů:

● $[0; 4]$ ● $[3; 1]$ ● $[6; 0]$

Stejná úloha metodou velkého M.

Zadání: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

Výsledek

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Postup

- Úloha lineárního programování

  $\min z = 2x + 3y$

  $x + y \geq 4$

  $x + 3y \geq 6$

  $x, y \geq 0$

- Podmínky nezápornosti nejsou zadané – předpokládáme $x, y \geq 0$
- Minimum hledáme jako maximum opačné funkce: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- Standardní tvar: k omezení ≤ přičteme doplňkovou proměnnou s, od omezení ≥ ji odečteme a přidáme pomocnou (umělou) proměnnou a, k rovnosti jen pomocnou. Výchozí bázi tvoří s a a

  $x + y - s_1 + a_1 = 4$

  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Metoda velkého M: pomocné proměnné dáme do účelové funkce s velkou pokutou −M, aby je simplexová metoda vytlačila z báze: $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$
- 1. simplexová tabulka: vstupuje y (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje a_2 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	6
z	$-2M+2$	$-4M+3$	M	M	0	0	-10

- 2. simplexová tabulka: vstupuje x (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje a_1 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{2}{3}M+1$	0	M	$-\frac{1}{3}M+1$	0	$\frac{4}{3}M-1$

- 3. tabulka: žádné $z_j - c_j$ není záporné – řešení je optimální.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-9

- Optimální řešení přečteme z poslední tabulky (proměnné mimo bázi jsou nulové): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- Duální úloha – každému omezení odpovídá jedna duální proměnná, každé proměnné jedno omezení

  $\max v = 4u_1 + 6u_2$

  $u_1 + u_2 \leq 2$

  $u_1 + 3u_2 \leq 3$

  $u_1, u_2 \geq 0$

- Stínové ceny (optimální duální proměnné) z poslední tabulky: o kolik se změní optimum, když pravou stranu omezení zvětšíme o 1. Nevyčerpané omezení (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má stínovou cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Optimum duální úlohy se rovná optimu původní:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Citlivostní analýza – v jakém rozmezí se mohou měnit koeficienty účelové funkce, aby zůstalo optimální stejné řešení

	c_j	
x	2	$\langle 3;\ 1\rangle$
y	3	$\langle 6;\ 2\rangle$

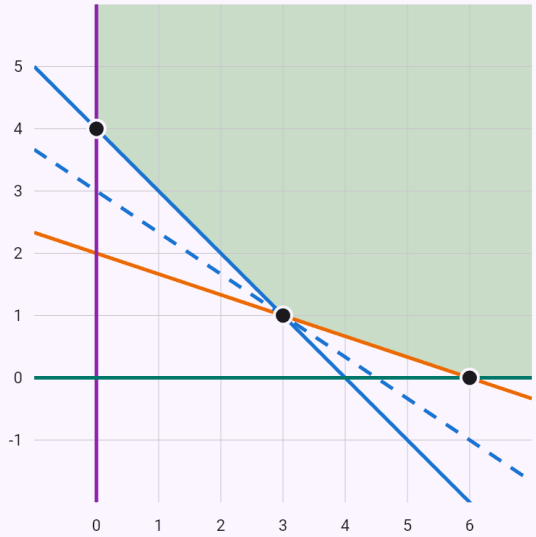
- V jakém rozmezí se mohou měnit pravé strany, aby zůstala optimální stejná báze (stínové ceny platí jen v něm)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- Grafické řešení: přípustná oblast je mnohoúhelník, optimum leží v některém vrcholu. Hodnoty účelové funkce ve vrcholech (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graf



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$
$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Řešením jsou průsečíky křivek ve vybarvené oblasti (plný bod); prázdný bod nerovnicím nevyhovuje.

Průsečíky grafů:

● $[0; 4]$ ● $[3; 1]$ ● $[6; 0]$

Celočíselné řešení metodou větví a mezí.

Zadání: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

Výsledek

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 20$$

Postup

- Úloha lineárního programování

  $\max z = 5x + 4y$

  $6x + 4y \le 24$

  $x + 2y \le 6$

  $x, y \ge 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$

- Podmínky nezápornosti nejsou zadané – předpokládáme $x, y \ge 0$
- Standardní tvar: k omezení ≤ přičteme doplňkovou proměnnou s, od omezení ≥ ji odečteme a přidáme pomocnou (umělou) proměnnou a, k rovnosti jen pomocnou. Výchozí bázi tvoří s a a

  $6x + 4y + s_1 = 24$

  $x + 2y + s_2 = 6$

- 1. simplexová tabulka: vstupuje x (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_1 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{6}$	4	1	0	24	4
s_2	1	2	0	1	6	6
z	−5	−4	0	0	0	

- 2. simplexová tabulka: vstupuje y (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_2 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
x	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	4	6
s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	2	$\frac{3}{2}$
z	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	20	

- 3. tabulka: žádné $z_j - c_j$ není záporné – řešení je optimální.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	21

- Optimální řešení přečteme z poslední tabulky (proměnné mimo bázi jsou nulové): $x = 3,\ y = \frac{3}{2},\quad z_{max} = 21$

- Úloha je celočíselná – použijeme metodu větví a mezí. Řešení bez podmínky celočíselnosti výše je kořen stromu P_0.
- Uzly stromu (procházíme do hloubky, nejdřív větev ≤): necelou proměnnou rozdělíme na dvě větve; × – úloha nemá přípustné řešení, z ≤ z* – větev nemůže dát lepší řešení než nejlepší nalezené (ořízneme), ✓ – celočíselné řešení.

		x, y	z	
P_0	–	$3,\ \frac{3}{2}$	21	$y \le 1,\ y \ge 2$
P_1	$y \le 1$	$\frac{10}{3},\ 1$	$\frac{62}{3}$	$x \le 3,\ x \ge 4$
P_2	$x \le 3$	$3,\ 1$	19	✓ $z^* = 19$
P_3	$x \ge 4$	$4,\ 0$	20	✓ $z^* = 20$
P_4	$y \ge 2$	$2,\ 2$	18	$z \le z^*$

- Nejlepší celočíselné řešení: $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

Graf



Výchozí stav

$P_0:\ x = 3,\ y = \frac{3}{2}$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Dopravní problém – Vogelova metoda a MODI.

Zadání: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

Výsledek

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

Postup

- Jednotkové náklady, nabídka dodavatelů a_i a poptávka odběratelů b_j

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	30	50	10	7
A_2	70	30	40	60	9
A_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

- Nabídka se rovná poptávce – úloha je vyrovnaná:
  $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- Vogelova aproximační metoda: v každém kroku spočítáme pokuty – rozdíl dvou nejnižších cen v řádku a sloupci – a v řádku či sloupci s největší pokutou (v rámečku) obsadíme pole s nejnižší cenou.

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	9	10	12	21	**22**	10	10	$(3,2)$
2	9	20	20	**21**		10	10	$(1,1)$
3	40	20	**50**			10	10	$(3,4)$
4	40	20				10	**50**	$(1,4)$
5		20				40	**60**	$(2,4)$
6		**40**				40		$(2,3)$

- Výchozí řešení (malé číslo je cena, tučně množství) – náklady
  $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}.$	$^{50}.$	$^{10}\mathbf{2}$	7
A_2	$^{70}.$	$^{30}.$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9
A_3	$^{40}.$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}.$	$^{20}\mathbf{10}$	18
b_j	5	8	7	14	

- 1. iterace metodou MODI: potenciály z $u_i + v_j = c_{ij}$ v obsazených polích ($u_1 = 0$), v neobsazených polích $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (v závorce). Nejzápornější d = -18 má pole $(2,2)$ – obsadíme ho. Uzavřený okruh $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, přesouváme θ = 2 (nejmenší množství v polích se znaménkem −).

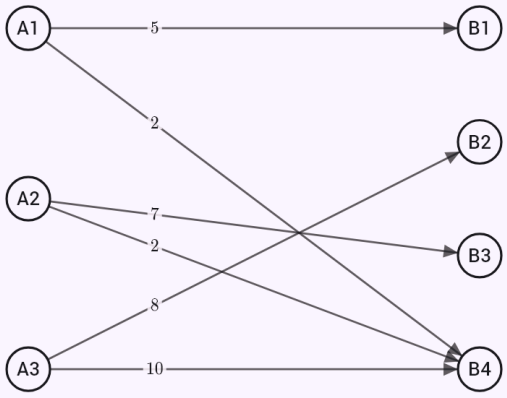
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(60)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(1)$	$^{30}\boxed{-18}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9	50
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}(70)$	$^{20}\mathbf{10}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	-10	10		

- Žádné d_{ij} není záporné – plán přepravy je optimální.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(42)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(19)$	$^{30}\mathbf{2}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}(18)$	9	32
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{6}$	$^{70}(52)$	$^{20}\mathbf{12}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	8	10		

- Celkové náklady:
  $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

Graf



Výchozí stav
$\sum$ =779

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Nevyrovnaný dopravní problém s fiktivním odběratelem.

Zadání: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

Výsledek

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

Postup

- Jednotkové náklady, nabídka dodavatelů a_i a poptávka odběratelů b_j

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	50
A_2	5	7	3	60
b_j	30	40	20	

- Nabídka převyšuje poptávku ($\sum a_i = 110,\quad \sum b_j = 90$) – přidáme fiktivního odběratele B_4^* s poptávkou 20 a nulovými náklady (zboží, které zůstane u dodavatelů).

- Výchozí řešení metodou severozápadního rohu: obsazujeme od levého horního pole co nejvíce a posouváme se doprava nebo dolů (malé číslo je cena, tučně přepravované množství), náklady $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}.$	$^{0}.$	50
A_2	$^{5}.$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60
b_j	30	40	20	20	

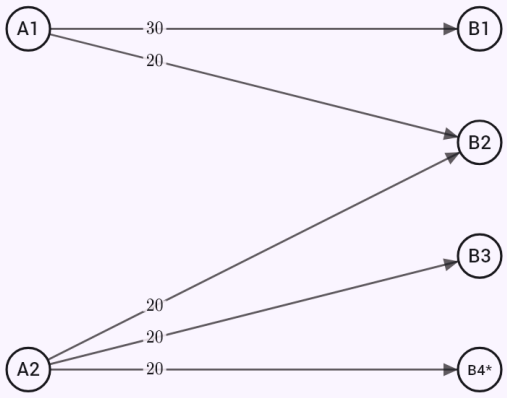
- Žádné d_{ij} není záporné – plán přepravy je optimální.

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i	u_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}(6)$	$^{0}(1)$	50	0
A_2	$^{5}(0)$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60	1
b_j	30	40	20	20		
v_j	4	6	2	−1		

- Některé d_{ij} je nulové – existuje i jiné optimální řešení se stejnými náklady.

- Celkové náklady: $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

Graf



Výchozí stav
$\sum = 440$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Přiřazení pracovníků k úkolům s nejmenšími náklady.

Zadání: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

Výsledek

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

Postup

- Náklady – řádky jsou pracovníci (stroje), sloupce úkoly

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Od každého řádku odečteme jeho minimum $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	0	5	6
R_2	3	1	0	4
R_3	4	7	0	7
R_4	3	2	5	0

- Od každého sloupce odečteme jeho minimum ($3,\ 0,\ 0,\ 0$)

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	0	5	6
R_2	0	1	0	4
R_3	1	7	0	7
R_4	0	2	5	0

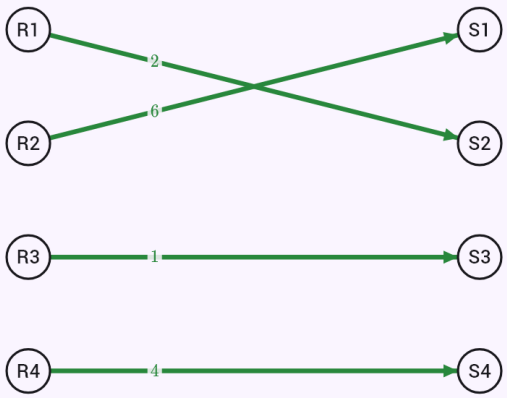
- K pokrytí nul je potřeba 4 čar – vybereme nezávislé nuly, v každém řádku i sloupci jednu (v rámečku).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	$\boxed{0}$	5	6
R_2	$\boxed{0}$	1	0	4
R_3	1	7	$\boxed{0}$	7
R_4	0	2	5	$\boxed{0}$

- Přiřazení s původními náklady – celkem $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

		c
R_1	S_2	2
R_2	S_1	6
R_3	S_3	1
R_4	S_4	4

Graf



Přiřazení s největším ziskem.

Zadání: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

Výsledek

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

Postup

- Náklady – řádky jsou pracovníci (stroje), sloupce úkoly

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Hledáme maximum – převedeme ho na minimum: od největšího čísla 9 odečteme každý prvek.

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	3	5	6	2
R_3	4	1	8	1
R_4	2	3	0	5

- Od každého řádku odečteme jeho minimum $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

- Od každého sloupce odečteme jeho minimum ($0,\ 0,\ 0,\ 0$)

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

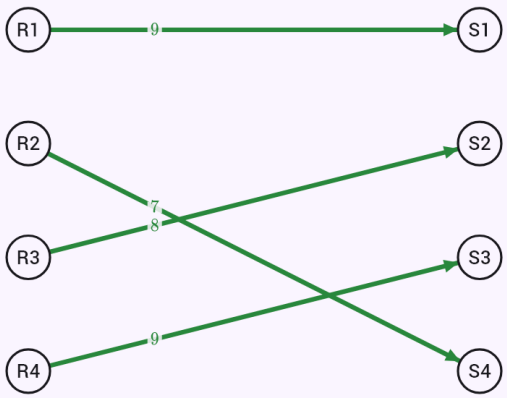
- K pokrytí nul je potřeba 4 čar – vybereme nezávislé nuly, v každém řádku i sloupci jednu (v rámečku).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	$\boxed{0}$	7	2	1
R_2	1	3	4	$\boxed{0}$
R_3	3	$\boxed{0}$	7	0
R_4	2	3	$\boxed{0}$	5

- Přiřazení s původními náklady – celkem
  $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

		c
R_1	S_1	9
R_2	S_4	7
R_3	S_2	8
R_4	S_3	9

Graf



Hra se sedlovým bodem – maximin se rovná minimaxu.

Zadání: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

Výsledek

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

Postup

- Výplatní matice (3×3): řádky jsou strategie hráče A, sloupce strategie hráče B, čísla výhry A (prohry B). A chce výhru co největší, B co nejmenší.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	1	6
A_3	6	0	2

- Hledáme sedlový bod: v každém řádku minimum (to si A zaručí), v každém sloupci maximum (víc B neprohraje). $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2, \quad \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2$ – maximin se rovná minimaxu, hra má sedlový bod.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	4	2	5	2
A_2	3	1	6	1
A_3	6	0	2	0
max	6	2	6	

- Optimální čisté strategie (sedlové body): (A_1, B_2); cena hry $v = 2$

Hra 2 × 2 bez sedlového bodu – smíšené strategie vzorcem.

Zadání: `game(3 -1; -2 4)`

Výsledek

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Postup

- Výplatní matice (2×2): řádky jsou strategie hráče A, sloupce strategie hráče B, čísla výhry A (prohry B). A chce výhru co největší, B co nejmenší.

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Hledáme sedlový bod: v každém řádku minimum (to si A zaručí), v každém sloupci maximum (víc B neprohraje). $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = -1, \quad \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – sedlový bod neexistuje. Hráči budou volit smíšené strategie – každou čistou strategii s jistou pravděpodobností.

	B_1	B_2	min
A_1	3	-1	-1
A_2	-2	4	-2
max	3	4	

- Hra 2 × 2 bez sedlového bodu (strategie A_1, A_2 a B_1, B_2): A volí první řádek s pravděpodobností p tak, aby měl proti oběma sloupcům stejnou střední výhru, B volí první sloupec s pravděpodobností q obdobně. Pro matici (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Optimální smíšené strategie: $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; cena hry $v = 1$

Dominované strategie vyškrtnuté jedna po druhé.

Zadání: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

Výsledek

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Postup

- Výplatní matice (3×3): řádky jsou strategie hráče A, sloupce strategie hráče B, čísla výhry A (prohry B). A chce výhru co největší, B co nejmenší.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5
A_3	1	-2	3

- Hledáme sedlový bod: v každém řádku minimum (to si A zaručí), v každém sloupci maximum (víc B neprohraje). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ _ sedlový bod neexistuje. Hráči budou volit smíšené strategie – každou čistou strategii s jistou pravděpodobností.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	3	-1	4	-1
A_2	-2	4	5	-2
A_3	1	-2	3	-2
max	3	4	5	

- Strategie A_3 je dominovaná strategií A_1 – ta dává hráči A v každém sloupci aspoň stejně. A ji nezvolí, vyškrtneme ji

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5

- Strategie B_3 je dominovaná strategií B_1 – s ní hráč B v žádném řádku neprohraje víc. B ji nezvolí, vyškrtneme ji

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Hra 2 × 2 bez sedlového bodu (strategie A_1, A_2 a B_1, B_2): A volí první řádek s pravděpodobností p tak, aby měl proti oběma sloupcům stejnou střední výhru, B volí první sloupec s pravděpodobností q obdobně. Pro matici (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Optimální smíšené strategie: $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; cena hry $v = 1$

Hra 2 × 4 graficky – maximum dolní obálky.

Zadání: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

Výsledek

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

Postup

- Výplatní matice (2×4): řádky jsou strategie hráče A, sloupce strategie hráče B, čísla výhry A (prohry B). A chce výhru co největší, B co nejmenší.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	1	6	0

- Hledáme sedlový bod: v každém řádku minimum (to si A zaručí), v každém sloupci maximum (víc B neprohraje). $\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$ _ sedlový bod neexistuje. Hráči budou volit smíšené strategie – každou čistou strategii s jistou pravděpodobností.

	B_1	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	3	1	5	1
A_2	4	1	6	0	0
max	4	3	6	5	

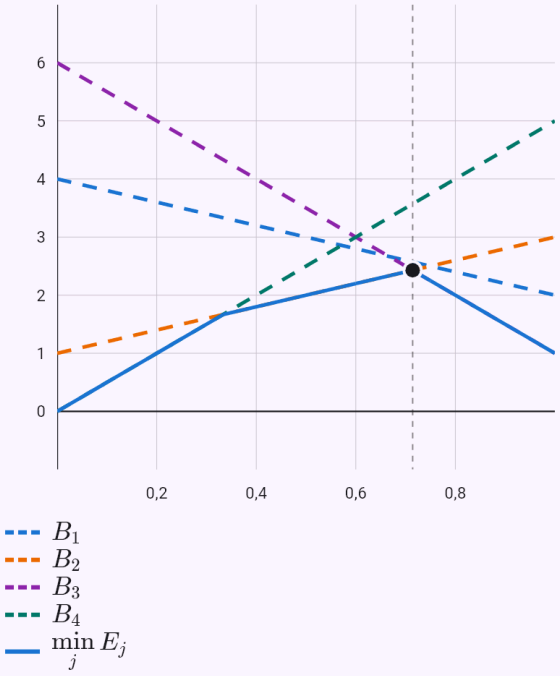
- Grafická metoda: A hraje první řádek s pravděpodobností p, druhý s 1 − p. Jeho střední výhra proti každé strategii B je přímka v p; B zvolí tu nejmenší, A proto hledá nejvyšší bod dolní obálky přímek – maximum $p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Přímky

$$B_1: \ E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \ E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \ E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \ E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- Optimum leží na průsečíku přímek B_2, B_3. B je míchá s pravděpodobnostmi w a 1 − w tak, aby bylo A jedno, který řádek hraje: $2w + (-5)(1-w) = 0 \ \Rightarrow \ w = \frac{5}{7}$

- Optimální smíšené strategie: $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; cena hry $v = \frac{17}{7}$

Graf



Přímky jsou střední výhry hráče A proti jednotlivým strategiím B podle p; zvýrazněná dolní obálka je to, co si A zaručí, bod je její maximum.

Kámen, nůžky, papír lineárním programováním – každá strategie s pravděpodobností 1/3.

Zadání: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

Výsledek

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left($$

Postup

- Výplatní matice (3 × 3): řádky jsou strategie hráče A, sloupce strategie hráče B, čísla výhry A (prohry B). A chce výhru co největší, B co nejmenší.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	−1	1
A_2	1	0	−1
A_3	−1	1	0

- Hledáme sedlový bod: v každém řádku minimum (to si A zaručí), v každém sloupci maximum (víc B neprohraje). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$ _ sedlový bod neexistuje. Hráči budou volit smíšené strategie – každou čistou strategii s jistou pravděpodobností.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	−1	1	−1
A_2	1	0	−1	−1
A_3	−1	1	0	−1
max	1	1	1	

- Ke všem prvkům matice přičteme k = 2, aby byly kladné – optimální strategie se tím nezmění, cena hry vzroste o k.
- Větší hru převedeme na lineární programování. Hráč B: max Σ y⃗ při Σ⃗ a'⃗⃗·y⃗ ≤ 1, y⃗ ≥ 0, kde $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k$. Duální úloha k ní patří hráči A.
- Úloha lineárního programování

$$\max z = y_1 + y_2 + y_3$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- Standardní tvar: k omezení ≤ přičteme doplňkovou proměnnou s, od omezení ≥ ji odečteme a přidáme pomocnou (umělou) proměnnou a, k rovnosti jen pomocnou. Výchozí bázi tvoří s a a

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$$

- 1. simplexová tabulka: vstupuje y_1 (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_2 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	2	1	3	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
s_2	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
s_3	1	3	2	0	0	1	1	1
z	−1	−1	−1	0	0	0	0	

- 2. simplexová tabulka: vstupuje y_3 (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_1 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
s_3	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

- 3. simplexová tabulka: vstupuje y_2 (nejzápornější $z_j - c_j$), vystupuje s_3 (nejmenší podíl b/a); pivot je v rámečku.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
y_3	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	–
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
s_3	0	$\boxed{\frac{18}{7}}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	

- 4. tabulka: žádné $z_j - c_j$ není záporné – řešení je

optimální.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b
y_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

- Optimální řešení přečteme z poslední tabulky (proměnné mimo bázi jsou nulové)

$$y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$$

- Duální úloha – každému omezení odpovídá jedna duální proměnná, každé proměnné jedno omezení

$$\min v = u_1 + u_2 + u_3$$
$$2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$$
$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$$
$$3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$
$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

- Stínové ceny (optimální duální proměnné) z poslední tabulky: o kolik se změní optimum, když pravou stranu omezení zvětšíme o 1. Nevyčerpané omezení (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má stínovou cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$

- Optimum duální úlohy se rovná optimu původní:

$$v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$$

- Citlivostní analýza – v jakém rozmezí se mohou měnit koeficienty účelové funkce, aby zůstalo optimální stejné řešení

	c_j	
y_1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- V jakém rozmezí se mohou měnit pravé strany, aby zůstala optimální stejná báze (stínové ceny platí jen v něm)

	b_i	
1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- Z optima: $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$. Strategie dostaneme vynásobením optimálních y⃰ (u hráče A stínových cen) číslem v'.

- Optimální smíšené strategie: $p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; cena hry $v = 0$

Bimaticová hra (souboj pohlaví) – dvě čisté a jedna smíšená Nashova rovnováha.

Zadání: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

Výsledek

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Postup

- Bimaticová hra (2 × 2): v každém poli je dvojice (výhra A, výhra B) a každý hráč chce svou výhru co největší.

	B_1	B_2
A_1	$(2,\ 1)$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$(1,\ 2)$

- Nejlepší odpovědi: v každém sloupci podtrhneme největší výhru A, v každém řádku nadtrhneme největší výhru B. Pole, kde jsou obě (v rámečku), jsou Nashovy rovnováhy v čistých strategiích: $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

	B_1	B_2
A_1	$\boxed{(\underline{2},\ \overline{1})}$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$\boxed{(\underline{1},\ \overline{2})}$

- Smíšená rovnováha: A volí p tak, aby bylo B jedno, který sloupec hraje, B volí q tak, aby bylo A jedno, který řádek hraje (střední výhry $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow\ p = \frac{2}{3}$$

$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow\ q = \frac{1}{3}$$

Známá omezení

- Nejvýš 12 proměnných a 15 omezení; celočíselné úlohy do 6 proměnných. Všechny proměnné musí být nezáporné – volné proměnné zatím nejsou.
- Dopravní a přiřazovací problém do rozměru 8 × 8.
- Maticové hry do 6 × 6; smíšenou Nashovu rovnováhu bimaticové hry počítá jen u hry 2 × 2.

52. Grafy, sítě a logistika

Úlohy na grafech a sítích najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obor Logistika a sítě: nejkratší cesta (Dijkstrův, Bellmanův–Fordův a Floydův–Warshallův algoritmus), minimální kostra (Kruskal, Prim), maximální tok a minimální řez, měnová arbitráž jako hledání záporného cyklu a kritická cesta projektu (CPM, PERT).

Graf zadáte do víceřádkového pole: na řádek jedna hrana – A-B 4 je neorientovaná hrana s váhou 4, A->B 4 orientovaná, u toku A->B 3/7 daný tok a kapacita; bez čísla má hrana váhu 1. Místo hran můžete vložit matici vah po řádcích (-, ∞ nebo 0 znamená, že hrana není), nad ni případně řádek s názvy uzlů. Uzly se mohou jmenovat písmenem i slovem (PHA, Brno). Činnosti projektu se zadávají názvem, dobou trvání a předchůdci (D 5 B C), pro PERT třemi odhady (B 3/4/11 A).

U arbitráže můžete místo vlastních kurzů zvolit dnešní kurzovní lístek ČNB nebo ECB – stačí vypsat měny (CZK EUR USD GBP). S jedním lístkem arbitráž nikdy nevyjde (postup ukáže proč), s oběma lístky najednou se pro každou dvojici měn vezme výhodnější kurz a cyklus nad 1 vyjít může. Tlačítko „Doplnit kurzy k úpravě“ vloží kurzy jednoho lístku do pole Směnné kurzy – upravíte je třeba podle lístku směnárny s nákupem a prodejem.

Postup ukazuje tabulku iterací jako ve skriptech – trvalé a dočasné značky Dijkstrova algoritmu, průchody Bellmanova–Fordova, matice Floydova–Warshallova po každém uzlu, seřazené hrany Kruskalova algoritmu, zlepšující cesty toku, dopředný a zpětný průchod CPM. Pod výsledkem je graf, kterým šipkami projdete krok za krokem: červeně je změna v daném kroku, modře to, co už je rozhodnuté, zeleně výsledek.

Ukázky

Nejkratší cesta Dijkstrovým algoritmem.

Zadání: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2;`

`from=A; to=F; method=dijkstra)`

Výsledek

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

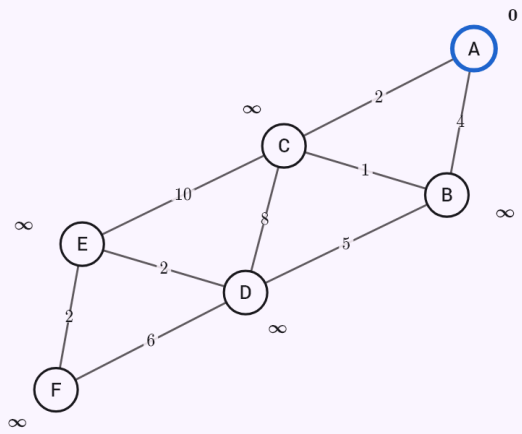
Postup

- Neorientovaný graf s 6 uzly a 9 hranami.
- Dijkstrův algoritmus: v každém kroku trvale označíme uzel s nejmenší dočasnou značkou (v rámečku) a snížíme značky jeho sousedů, pokud přes něj vede kratší cesta (tučně); dolní index je předchůdce.

		A	B	C	D	E	F
0		0	∞	∞	∞	∞	∞
1	A	$\boxed{0}$	$\mathbf{4_A}$	$\mathbf{2_A}$	∞	∞	∞
2	C		$\mathbf{3_C}$	$\boxed{2_A}$	$\mathbf{10_C}$	$\mathbf{12_C}$	∞
3	B		$\boxed{3_C}$		$\mathbf{8_B}$	12_C	∞
4	D				$\boxed{8_B}$	$\mathbf{10_D}$	$\mathbf{14_D}$
5	E					$\boxed{10_D}$	$\mathbf{12_E}$
6	F						$\boxed{12_E}$

- Cestu přečteme zpětně podle předchůdců: $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, její délka $2+1+5+2+2 = 12$

Graf



Výchozí stav
$d(\mathrm{A}) = 0$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Záporná váha hrany – Bellmanův–Fordův algoritmus.

Zadání: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

Výsledek

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

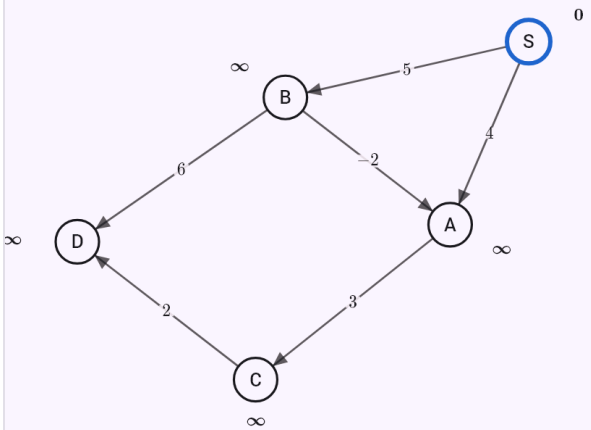
Postup

- Orientovaný graf s 5 uzly a 6 hranami.
- Bellmanův–Fordův algoritmus: v každém průchodu zkusíme zkrátit cestu přes každou hranu, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; změněné značky jsou tučně, dolní index je předchůdce.

	S	A	B	C	D
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{3_B}$	$\mathbf{5_S}$	$\mathbf{6_A}$	$\mathbf{8_C}$

- V 2. průchodu se už žádná značka nezměnila – vzdálenosti jsou konečné.
- Cestu přečteme zpětně podle předchůdců: $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, její délka $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

Graf



Výchozí stav
$d(\mathrm{S}) = 0$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Vzdálenosti mezi všemi dvojicemi uzlů.

Zadání: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

Výsledek

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Postup

- Orientovaný graf s 4 uzly a 6 hranami.
- Floydův–Warshallův algoritmus začíná maticí vah hran (∞ – hrana není)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Povolíme uzel A jako mezizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, zkrácené vzdálenosti jsou tučně.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Povolíme uzel B jako mezizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, zkrácené vzdálenosti jsou tučně.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

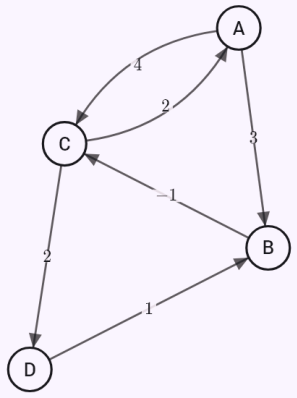
- Povolíme uzel C jako mezizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, zkrácené vzdálenosti jsou tučně.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Povolíme uzel D jako mezizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, zkrácené vzdálenosti jsou tučně.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Graf



Výchozí stav
$D^{(0)}$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Minimální kostra Kruskalovým algoritmem.

Zadání: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G 9;`

`F-G 11; method=kruskal)`

Výsledek

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

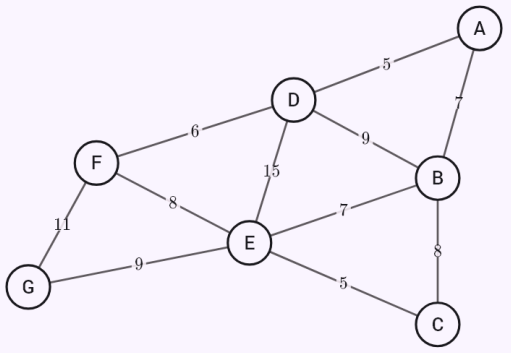
Postup

- Neorientovaný graf s 7 uzly a 11 hranami.
- Kruskalův algoritmus: hrany seřadíme od nejlevnější a každou přidáme (✓), pokud neuzavře cyklus (×).

	w	
AD	5	✓
CE	5	✓
DF	6	✓
AB	7	✓
BE	7	✓
BC	8	×
EF	8	×
BD	9	×
EG	9	✓

- Součet vah hran kostry: $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

Graf



Výchozí stav

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Nejkratší síť spojující krajská města Primovým algoritmem.

Zadání: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

Výsledek

$w = 697$

$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{LBC},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$
$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK},\ \mathrm{JI}-\mathrm{BRN},\ \mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$
$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$

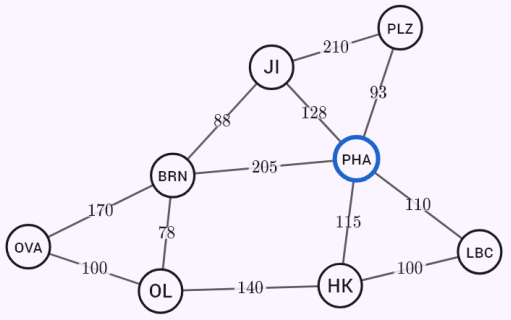
Postup

- Neorientovaný graf s 8 uzly a 12 hranami.
- Primův algoritmus od uzlu PHA: v každém kroku připojíme nejlevnější hranu, která vede ze stromu k uzlu mimo něj.

		w
1	$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ}$	93
2	$\mathrm{PHA}-\mathrm{LBC}$	110
3	$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK}$	100
4	$\mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$	128
5	$\mathrm{JI}-\mathrm{BRN}$	88
6	$\mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$	78
7	$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$	100

- Součet vah hran kostry:
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

Graf



Výchozí stav
PHA

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Maximální tok a minimální řez.

Zadání: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

Výsledek

$$f_{max} = 23$$

$$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$$

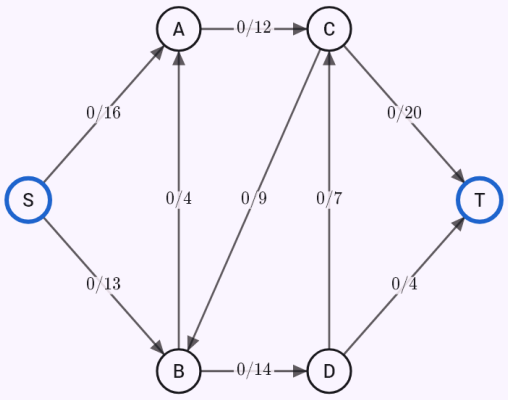
Postup

- Hledáme maximální tok ze zdroje S do stoku T, začínáme s tokem velikosti 0
- 1. zlepšující cesta (nejkratší v reziduální síti): $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Tok zvýšíme o nejmenší rezervu $\min(16, 12, 20) = 12$, velikost toku je teď 12
- 2. zlepšující cesta (nejkratší v reziduální síti): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Tok zvýšíme o nejmenší rezervu $\min(13, 14, 4) = 4$, velikost toku je teď 16
- 3. zlepšující cesta (nejkratší v reziduální síti): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Tok zvýšíme o nejmenší rezervu $\min(9, 10, 7, 8) = 7$, velikost toku je teď 23
- Další zlepšující cesta neexistuje – ze zdroje se v reziduální síti dostaneme jen do uzlů $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- Tok po hranách (f) a jejich kapacity (c)

	f	c
$\mathrm{S} \to \mathrm{A}$	12	16
$\mathrm{S} \to \mathrm{B}$	11	13
$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	0	4
$\mathrm{A} \to \mathrm{C}$	12	12
$\mathrm{C} \to \mathrm{B}$	0	9
$\mathrm{B} \to \mathrm{D}$	11	14
$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$	7	7
$\mathrm{C} \to \mathrm{T}$	19	20
$\mathrm{D} \to \mathrm{T}$	4	4

- Hrany z množiny S ven tvoří minimální řez: $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Jsou všechny plné a součet jejich kapacit $12 + 7 + 4 = 23$ se rovná maximálnímu toku.

Graf



Výchozí stav
$f = 0$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Výdělečný cyklus směn tří měn.

Zadání: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24;`

```
USD->GBP 0.7)
```

Výsledek

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

Postup

- Kurzy a váhy hran $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}9$	$0{,}10536$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}8$	$0{,}22314$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}4$	$-0{,}33647$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}1$	$-0{,}09531$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}24$	$-0{,}21511$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}7$	$0{,}35667$

- Cyklus vydělá, když je součin kurzů větší než 1 – po zlogaritmování je to záporný cyklus vah

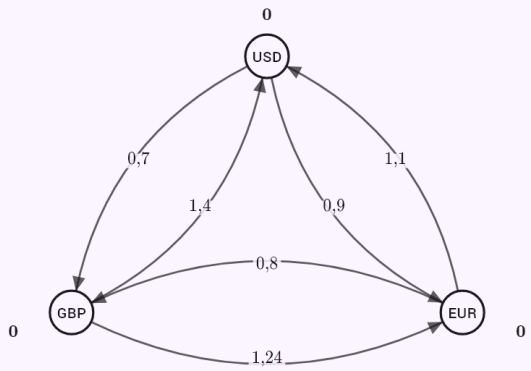
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- Bellmanův–Fordův algoritmus začneme ze všech měn najednou (všechny značky 0); změněné značky jsou tučně, dolní index je předchůdce.

	USD	EUR	GBP
0	0	0	0
1	$\mathbf{-0{,}336472_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}215111_{\mathrm{GBP}}}$	0
2	$\mathbf{-0{,}34444_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}231112_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}007968}$
3	$\mathbf{-0{,}352409_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}23908_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}015936}$

- Značky se mění i v n-tém průchodu – podle předchůdců najdeme záporný cyklus $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Součin kurzů $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, zisk $0{,}8\,\%$: z 1000 jednotek je po jednom oběhu 1008

Graf



Výchozí stav
$d = 0$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Konzistentní kurzy zadané maticí – arbitráž neexistuje.

Zadání: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

Výsledek

Arbitráž neexistuje – žádný cyklus směn nevydělá.

Postup

- Kurzy a váhy hran $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
CZK → EUR	0,04	3,2189
CZK → USD	0,0432	3,1419
EUR → CZK	25	−3,2189
EUR → USD	1,08	−0,076961
USD → CZK	23,1481	−3,1419
USD → EUR	0,925926	0,076961

- Cyklus vydělá, když je součin kurzů větší než 1 – po zlogaritmování je to záporný cyklus vah
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

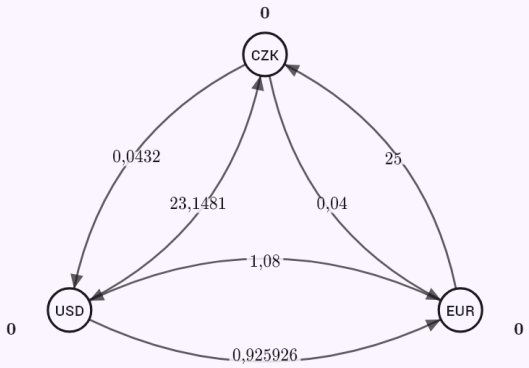
- Bellmanův–Fordův algoritmus začneme ze všech měn najednou (všechny značky 0); změněné značky jsou tučně, dolní index je předchůdce.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$	0	$\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$

- V 2. průchodu se už žádná značka nezměnila – vzdálenosti jsou konečné.
- Ani v n-tém průchodu se značky nezměnily – záporný cyklus a tedy ani arbitráž neexistuje. Potenciály p = −d jsou logaritmy konzistentních „cen“ měn: pro každý kurz platí $\ln r \le p$(cílová) − p(výchozí).

	$p = -d$
CZK	3,2189
EUR	0
USD	0,076961

Graf



Výchozí stav
$d = 0$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Kurzy jednoho lístku (ČNB) – arbitráž nikdy nevyjde.

Zadání: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

Výsledek

Arbitráž neexistuje – žádný cyklus směn nevydělá.

Postup

- Kurzy z kurzovního lístku: $\text{ČNB},\ 27.\ 11.\ 2026$
- Lístek uvádí hodnotu jedné jednotky každé měny v základní měně CZK (k) – a její logaritmus p = ln k

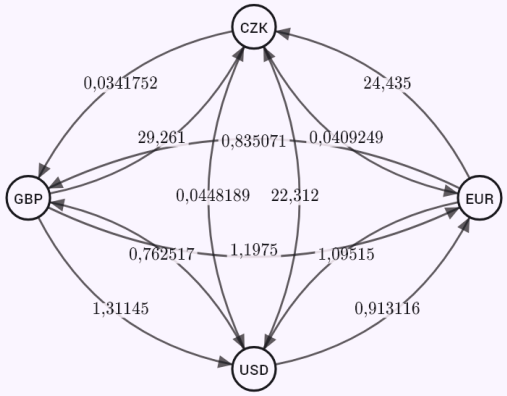
	k	$p = \ln k$
CZK	1	0
EUR	$1\,€ = 24{,}435\,\text{CZK}$	$3{,}196$
USD	$1\,\$ = 22{,}312\,\text{CZK}$	$3{,}1051$
GBP	$1\,\text{GBP} = 29{,}261\,\text{CZK}$	$3{,}3763$

- Kurz mezi dvěma měnami je křížový kurz přes základní měnu: $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- Na každém cyklu se hodnoty k zkrátí a součin kurzů je přesně 1. Kurzy jednoho lístku (ČNB) jsou konzistentní, arbitráž z nich nikdy nevyjde – logaritmy p = ln k jsou „ceny“ měn, které to dokládají.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- ČNB i ECB vyhlašují jen střední (referenční) kurzy, bez nákupu a prodeje. S kurzy směnárny (nákup a prodej) každý cyklus prodělá.

Graf



Kurzy ČNB a ECB dohromady – nepatrný „zisk“ mezi referenčními kurzy.

Zadání: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

Výsledek

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}0009332 \;(+0{,}09332\,\%)$$

Postup

- Kurzy z kurzovního lístku:
  $\text{ČNB},\ 27.\ 11.\ 2026;\quad \text{ECB},\ 27.\ 11.\ 2026$
- Pro každou dvojici měn vezmeme výhodnější ze dvou kurzů – ČNB, nebo ECB (poslední sloupec tabulky). Ten druhý by žádný cyklus nezlepšil.
- Kurzy a váhy hran $w = -\ln r$

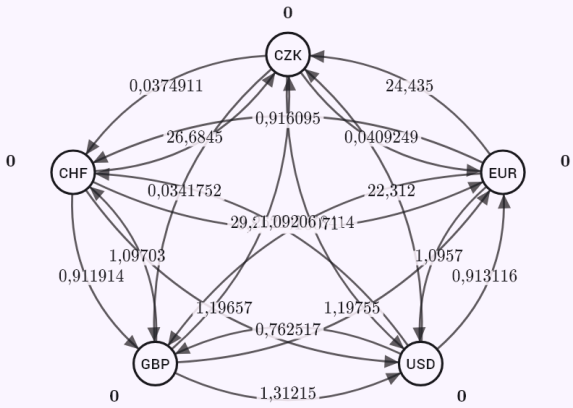
	r	$w = -\ln r$	
CZK → EUR	0,0409249	3,196	ČNB
CZK → USD	0,0448414	3,1046	ECB
CZK → GBP	0,0341752	3,3763	ČNB
CZK → CHF	0,0374911	3,2837	ČNB
EUR → CZK	24,435	−3,196	ČNB
EUR → USD	1,0957	−0,091393	ECB
EUR → GBP	0,835071	0,18024	ČNB
EUR → CHF	0,916095	0,087635	ČNB
USD → CZK	22,312	−3,1051	ČNB
USD → EUR	0,913116	0,090892	ČNB
USD → GBP	0,762517	0,27113	ČNB
USD → CHF	0,836501	0,17853	ČNB
GBP → CZK	29,2621	−3,3763	ECB
GBP → EUR	1,19755	−0,18028	ECB
GBP → USD	1,31215	−0,27167	ECB
GBP → CHF	1,09703	−0,092604	ČNB
CHF → CZK	26,6845	−3,2841	ECB
CHF → EUR	1,09206	−0,088066	ECB
CHF → USD	1,19657	−0,17946	ECB
CHF → GBP	0,911914	0,092209	ECB

- Cyklus vydělá, když je součin kurzů větší než 1 – po zlogaritmování je to záporný cyklus vah
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- Bellmanův–Fordův algoritmus začneme ze všech měn najednou (všechny značky 0); změněné značky jsou tučně, dolní index je předchůdce.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}376687_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}18067_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272064_{(}}$
2	$\mathbf{-3{,}37762_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}181603_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272996_{(}}$
3	$\mathbf{-3{,}378552_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}182536_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}273929_{(}}$
4	$\mathbf{-3{,}379485_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}183468_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}274862_{(}}$
5	$\mathbf{-3{,}380418_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}184401_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}275795_{(}}$

- Značky se mění i v n-tém průchodu – podle předchůdců najdeme záporný cyklus $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Součin kurzů $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, zisk $0{,}09332\,\%$: z 1000 jednotek je po jednom oběhu $1000{,}933$
- Cyklus vyšel jen mezi referenčními kurzy dvou bank, které se stanovují v jinou dobu a jinak zaokrouhlují. Za tyto kurzy se neobchoduje – zisk je prakticky nevydělatelný.

Graf



Výchozí stav
$d = 0$

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Kritická cesta a rezervy činností.

Zadání: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

Výsledek

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

Postup

- Činnosti, jejich doby trvání a předchůdci

	t	
A	3	–
B	4	A
C	2	A
D	5	B, C
E	3	C
F	2	D, E

- Dopředný průchod: činnost začne nejdříve, až skončí všichni její předchůdci (ES = největší EF předchůdců), skončí v EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	7
C	3	5
D	$\max(7, 5) = 7$	12
E	5	8
F	$\max(12, 8) = 12$	14

- Doba trvání projektu je nejpozdější z nejdřívějších konců: $T = 14$
- Zpětný průchod: činnost musí skončit nejpozději, než musí začít její následníci (LF = nejmenší LS následníků), začít nejpozději v LS = LF − t.

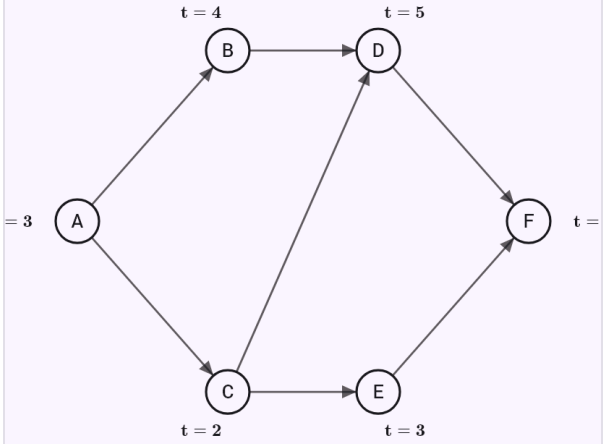
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
F	14	12
E	12	9
D	12	7
C	$\min(7, 9) = 7$	5
B	7	3
A	$\min(3, 5) = 3$	0

- Rezerva každé činnosti; kritické činnosti (★) žádnou nemají

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	2	
D	0	★
E	4	
F	0	★

- Kritická cesta – zpoždění kterékoli její činnosti zpozdí celý projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

Graf



Výchozí stav

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

PERT – pravděpodobnost dokončení projektu do termínu.

Zadání: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Výsledek

$$T = 13$$
$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$$
$$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$$

Postup

- Činnosti, jejich doby trvání a předchůdci

	t	
A	3	–
B	5	A
C	2	A
D	5	B, C

- PERT: očekávané doby trvání a rozptyly ze tří odhadů

	a	m	b	$t = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	2	3	4	3	0,1111
B	3	4	11	5	1,778
C	1	2	3	2	0,1111
D	4	5	6	5	0,1111

- Dopředný průchod: činnost začne nejdříve, až skončí všichni její předchůdci (ES = největší EF předchůdců), skončí v EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	8
C	3	5
D	$\max(8, 5) = 8$	13

- Doba trvání projektu je nejpozdější z nejdřívějších konců: $T = 13$
- Zpětný průchod: činnost musí skončit nejpozději, než musí začít její následníci (LF = nejmenší LS následníků), začít nejpozději v LS = LF − t.

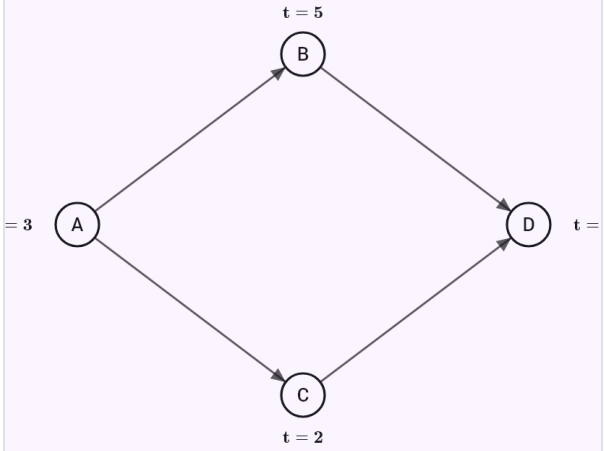
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
D	13	8
C	8	6
B	8	3
A	$\min(3, 6) = 3$	0

- Rezerva každé činnosti; kritické činnosti (★) žádnou nemají

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	3	
D	0	★

- Kritická cesta – zpoždění kterékoli její činnosti zpozdí celý projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- Rozptyl doby trvání projektu je součet rozptylů činností na kritické cestě:
  $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- Doba trvání má přibližně normální rozdělení – pravděpodobnost dokončení do termínu:
  $$P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15 - 13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$$

Graf



Výchozí stav

Šipkami projdete jednotlivé kroky algoritmu. Červeně je změna v tomto kroku, modře to, co je už rozhodnuté, zeleně výsledek. U uzlů jsou jejich značky (vzdálenost, nejdřívější a nejpozdější termíny).

Známá omezení

- Graf může mít nejvýš 30 uzlů a 200 hran; matice Floydova–Warshallova algoritmu po jednotlivých uzlech se ukazují do 6 uzlů, u větších grafů jen výsledná matice.
- Arbitráž hledá jeden výdělečný cyklus (ne nutně nejvýnosnější); rozdíly pod 0,0001 % se považují za zaokrouhlení kurzů.

- ČNB i ECB vyhlašují jen střední (referenční) kurzy, za které se neobchoduje; „zisk“ z obou lístků najednou je řádově setiny procenta a prakticky nevydělatelný.
- S oběma lístky jen měny, které vyhlašují obě banky (ruský rubl ani jedna).
- Okružní jízdy, problém batohu, zásoby a fronty připravujeme; lineární programování, dopravní a přiřazovací problém jsou v samostatné kapitole.

53. Psychometrie

Psychometrické výpočty pro interpretaci výsledků testů (podle skript „Klinická psychometrie – od čísla k interpretaci“) najdete ve formuláři „Statistika a psychometrie“ – sekce „Aplikace“ na úvodní obrazovce, obor Psychologie. Vyberete úlohu, škálu a hledanou veličinu a vyplníte naměřené hodnoty; průměr a směrodatnou odchylku normy předvyplní volba škály (IQ 100; 15, T 50; 10, vážený skór 10; 3, z 0; 1, sten 5,5; 2, stanin 5; 2), „Vlastní“ nechá zadat normu jiného testu. Ikonka „?“ vysvětlí, odkud vzorec pochází.

Nápověda přímo v aplikaci: ikonka „?“ u každé úlohy formuláře vysvětlí, co úloha počítá a odkud vzorec pochází. Ve výsledku je postup krok za krokem a odborné pojmy v něm (Cohenova κ, ROC křivka, interval spolehlivosti, p-hodnota, percentil, pravý skór, prediktivní hodnoty …) jsou tečkovaně podtržené – klepnutím na pojem se zobrazí jeho krátké vysvětlení obyčejnými slovy, často s příkladem. Poznámky na konci postupu upozorní, jak výsledek interpretovat a na co si dát pozor.

Převody standardních skórů: z = (X − M)/SD a z něj T, IQ, vážený skór, sten a stanin (zaokrouhlené na celé číslo v rozsahu škály) i percentil. Skór a percentil: percentilové pořadí PR = 100·Φ(z) za předpokladu normálního rozdělení a obráceně skór k zadanému percentilu.

Standardní chyba měření SEM = SD·√(1 − r) z reliability r. Interval spolehlivosti kolem pozorovaného skóru X ± z·SEM na hladině 80, 90, 95 nebo 99 % (z = 1,28; 1,645; 1,96; 2,576). Odhad pravého skóru T′ = M + r(X − M) – regrese k průměru – s intervalem kolem T′ a standardní chybou odhadu SEE = SD·√(r(1 − r)).

Významnost rozdílu dvou skórů téže škály (např. indexů WAIS): standardní chyba rozdílu SE_diff = SD·√(2 − r_{11} − r_{22}) a kritický rozdíl z·SE_diff. Prediktivní hodnoty testu podle Bayesovy věty: PPV a NPV ze senzitivity, specificity a prevalence – nebo z tabulky 2×2 (skutečně a falešně pozitivní a negativní), volitelně s prevalencí populace, na které se test použije – a k nim věrohodnostní poměry LR^+ a LR^-.

Spearmanův–Brownův vzorec (ve stejném formuláři) spočítá reliabilitu testu prodlouženého k-krát, r′ = k·r / (1 + (k − 1)·r), nebo obráceně, kolikrát test prodloužit pro cílovou reliabilitu – se zadaným počtem položek i potřebný počet položek. Bonferroniho korekce dá přísnější hladinu α′ = α/m pro m srovnání a k ní pravděpodobnost falešně významného výsledku bez korekce a Šidákovu korekci.

Reliabilitu a shodu z naměřených dat spočítají čipy u zápisu data(…) nebo u mřížky „Jako data“ (vložení z Excelu, soubor CSV): Cronbachovo α – položky ve sloupcích, respondenti v řádcích – s položkovou analýzou (korelace položky se zbytkem testu, α po vyřazení položky); ICC – hodnotitelé ve sloupcích, subjekty v řádcích – všech šest variant podle Shrouta a Fleisse z tabulky analýzy rozptylu; Cohenova κ ze dvou sloupců hodnocení (kategorie jako čísla) nebo ze čtvercové tabulky shody; ROC křivka a AUC ze sloupce skórů a sloupce stavu 0/1 (1 = porucha) přes Mannovu–Whitneyho statistiku U, s hraničním skórem podle Youdenova indexu a grafem ROC křivky. K α, ICC, κ i AUC patří interval spolehlivosti (90, 95 nebo 99 % čipem): α podle Feldta, ICC z F-rozdělení, κ z asymptotické směrodatné chyby, AUC podle

Hanleyho a McNeila. U pořadových kategorií spočítá κ i s lineárními nebo kvadratickými vahami. ROC křivku vezme i ze dvou sloupců skórů dvou skupin (první pozitivní, smějí mít různou délku) a k AUC přidá Mannův–Whitneyho test. Tři sloupce – skóry dvou testů a stav – porovná DeLongovým testem s oběma křivkami v jednom grafu.

Postup končí interpretační poznámkou: percentily jsou pořadová škála (nesčítají se ani neprůměrují), převod na percentil platí jen u normálně rozloženého skóru, statisticky významný rozdíl ještě není neobvyklý (base rate diskrepance), prediktivní hodnoty závisí na prevalenci. Graf ukáže normální křivku s vyznačeným skórem, intervalem nebo kritickou oblastí.

Ukázky

IQ 85 ve všech škálách: z = −1, T = 40, vážený skór 7.

Zadání: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Výsledek

$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

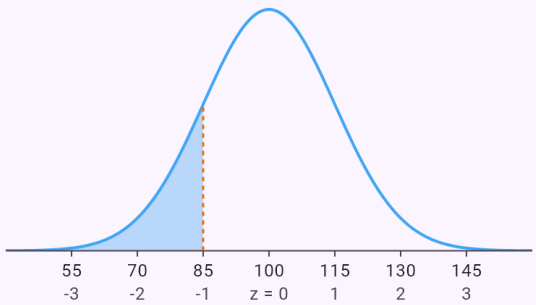
Postup

- Zadáno: $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Standardní skóry vyjadřují, jak daleko je výkon od průměru normy, v jednotkách směrodatné odchylky. Nejdřív spočítáme z = (X − M)/SD, potom ho převedeme na jinou škálu: T = 50 + 10z, IQ = 100 + 15z, vážený (škálovaný) skór = 10 + 3z, sten = 5,5 + 2z (1–10), stanin = 5 + 2z (1–9). Percentil udává, kolik procent populace má nižší skór – platí jen pro normálně rozložený skór.
  Rovnice modelu: $z = \frac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Dosadíme: $z = \frac{85 - 100}{15} = -1$
- Dosadíme: $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- Dosadíme: $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- Dosadíme: $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- Dosadíme
  $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- Dosadíme:
  $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$

- Sten a stanin jsou celá čísla – vypočtenou hodnotu zaokrouhlíme a omezíme na rozsah škály (1–10, 1–9).
- Dosadíme: $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- Převod na percentil platí jen pro normálně rozložený skór. U zešikmených testů (např. časové skóry TMT) je potřeba percentil vyčíst přímo z normativní tabulky.
- Percentily jsou pořadová škála – nestejně „velké“ kroky (uprostřed je mezi 50. a 60. percentilem malý rozdíl skóru, na okrajích velký). Percentily proto nesčítáme, neprůměrujeme ani neodečítáme.

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$PR \approx 16 \quad X = 85$

IQ 130 odpovídá 98. percentilu.

Zadání: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Výsledek

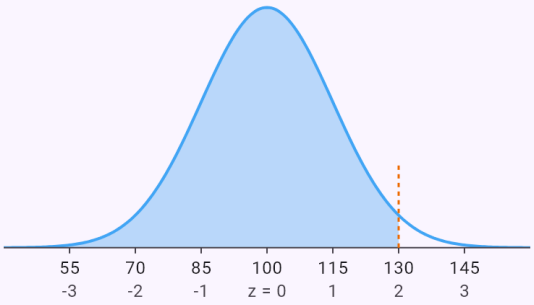
$$PR \approx 98$$

Postup

- Hledáme PR; zadáno: $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Percentil (percentilové pořadí) říká, kolik procent normativní populace dosáhlo nižšího skóru. Za předpokladu normálního rozdělení ho dostaneme z z-skóru distribuční funkcí: PR = 100·Φ(z), a obráceně skór z percentilu přes kvantil z = Φ⁻¹(PR/100). Rovnice modelu: $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Dosadíme: $z = \frac{130 - 100}{15} = 2$
- Dosadíme: $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- Převod na percentil platí jen pro normálně rozložený skór. U zešikmených testů (např. časové skóry TMT) je potřeba percentil vyčíst přímo z normativní tabulky.
- Percentily jsou pořadová škála – nestejně „velké“ kroky (uprostřed je mezi 50. a 60. percentilem malý rozdíl skóru, na okrajích velký). Percentily proto nesčítáme, neprůměrujeme ani neodečítáme.

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$PR \approx 98 \quad X = 130$

T-skór odpovídající 16. percentilu.

Zadání: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

Výsledek

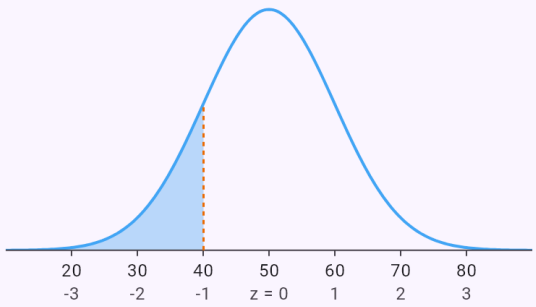
$$X \approx 40{,}1$$

Postup

- Hledáme X; zadáno: $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- Převedeme jednotky: $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- Percentil (percentilové pořadí) říká, kolik procent normativní populace dosáhlo nižšího skóru. Za předpokladu normálního rozdělení ho dostaneme z z-skóru distribuční funkcí: PR = 100·Φ(z), a obráceně skór z percentilu přes kvantil z = Φ⁻¹(PR/100). Rovnice modelu: $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $z = \Phi^{-1}\left(\frac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$
- Dosadíme $z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$
- Převod na percentil platí jen pro normálně rozložený skór. U zešikmených testů (např. časové skóry TMT) je potřeba percentil vyčíst přímo z normativní tabulky.
- Percentily jsou pořadová škála – nestejně „velké“ kroky (uprostřed je mezi 50. a 60. percentilem malý rozdíl skóru, na okrajích velký). Percentily proto nesčítáme, neprůměrujeme ani neodečítáme.

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

Standardní chyba měření testu s reliabilitou 0,97.

Zadání: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

Výsledek

$$SEM \approx 2{,}6$$

Postup

- Hledáme SEM; zadáno: $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Žádné měření není přesné: pozorovaný skór X = pravý skór T + chyba E. Standardní chyba měření SEM = SD·√(1 − r) udává, o kolik se pozorovaný skór typicky liší od pravého; r je reliabilita testu (např. test-retest nebo Cronbachovo α). Čím vyšší reliabilita, tím menší chyba. Rovnice modelu: $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Standardní chyba měření: $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$

95% interval spolehlivosti kolem IQ 95.

Zadání: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq;`

`level=95)`

Výsledek

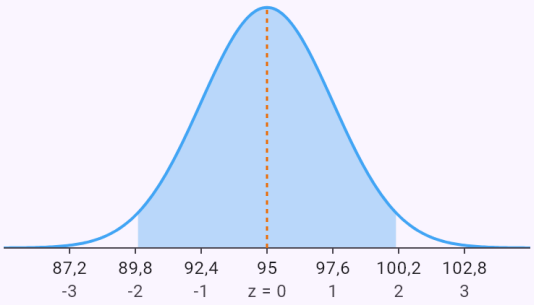
$95\,\%:\ \langle 89{,}9;\ 100{,}1\rangle$

Postup

- Hledáme X; zadáno:
  $X = 95,\quad SD = 15,\quad r_{xx} = 0{,}97$
- Kolem pozorovaného skóru vytyčíme pásmo, ve kterém s danou spolehlivostí leží pravý skór: X ± z·SEM, kde z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) nebo 2,576 (99 %). Skór je tak potřeba chápat jako interval, ne jako přesné číslo. Rovnice modelu
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Standardní chyba měření:
  $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Kritická hodnota normovaného rozdělení:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Dosadíme
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow \langle 89{,}91;\ 100{,}1\rangle$
- Interval je postavený kolem pozorovaného skóru. Přesnější (hlavně u extrémních skórů) je interval kolem odhadu pravého skóru – model „Odhad pravého skóru“.

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$95\,\%:\ \langle 89{,}9;\ 100{,}1\rangle \quad X = 95$

Odhad pravého skóru IQ 74 při reliabilitě 0,92.

Zadání: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

Výsledek

$$T' \approx 76{,}1$$

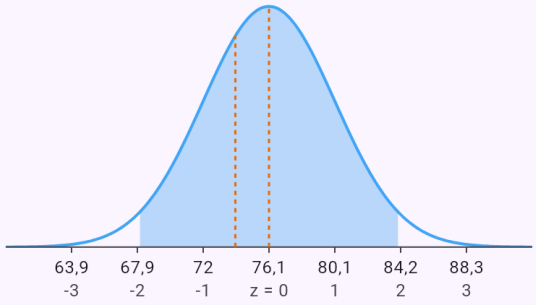
$$95\,\% : \ \langle 68{,}1;\ 84{,}1 \rangle$$

Postup

- Hledáme T'; zadáno:
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- U extrémních skórů se pravý skór odhaduje blíž k průměru (regrese k průměru): T' = M + r(X − M). Interval spolehlivosti se pak staví kolem T' se standardní chybou odhadu SEE = SD·√(r(1 − r)). Tento postup je přesnější než interval kolem pozorovaného skóru, hlavně u nízké reliability. Rovnice modelu
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- Dosadíme: $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- Odhad pravého skóru je blíž průměru než pozorovaný skór – při opakovaném měření by extrémní výsledek pravděpodobně vyšel méně extrémní.
- Standardní chyba odhadu pravého skóru:
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Kritická hodnota normovaného rozdělení:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Dosadíme
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow \langle 68{,}1;\ 84{,}06 \rangle$

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$X = 74 \quad T'$

Rozdíl dvou indexů 112 a 97 – je významný?

Zadání: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one]; r1=0.95[one];`

`r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

Výsledek

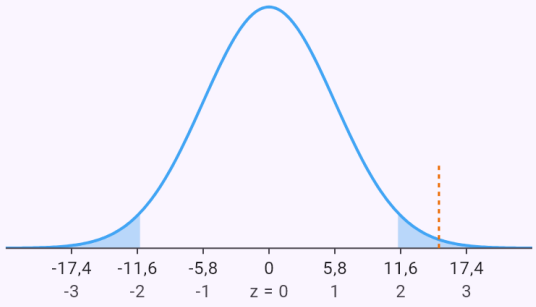
$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

Postup

- Hledáme D; zadáno:
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- Liší se dva skóry (např. indexy WAIS) víc, než by způsobila chyba měření? Standardní chyba rozdílu SE_diff = SD·√(2 − r_{11} − r_{22}) a kritický rozdíl z·SE_diff. Rozdíl, který ho dosáhne, je statisticky významný – to ale neznamená, že je neobvyklý. Rovnice modelu
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- Standardní chyba rozdílu:
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Kritická hodnota normovaného rozdělení:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Kritický rozdíl: $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- Dosadíme: $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- Rozdíl dosahuje kritické hodnoty – je statisticky významný (nelze ho vysvětlit jen chybou měření).
- Statisticky významný rozdíl ještě neznamená neobvyklý: rozdíly indexů této velikosti má v normativním vzorku často 20–30 % lidí (base rate diskrepance). Pro interpretaci je potřeba zjistit i četnost rozdílu v normě.

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$95\,\%$ $D = 15$

Screening se senzitivitou 92,5 % a specificitou 74,6 % při prevalenci 2 %.

Zadání: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

`input=rates)`

Výsledek

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

Postup

- Hledáme PPV; zadáno:
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- Převedeme jednotky:
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- Senzitivita (Se) je podíl nemocných, které test zachytí, specificita (Sp) podíl zdravých, které test správně vyloučí. Pro praxi je ale důležité, jak velká je pravděpodobnost poruchy při pozitivním výsledku – pozitivní prediktivní hodnota PPV. Podle Bayesovy věty závisí na prevalenci p: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), negativní NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p).
  Rovnice modelu
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$

- Dosadíme
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- Dosadíme
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Věrohodnostní poměry:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- Prediktivní hodnoty závisí na prevalenci: při nízké prevalenci je i u dobrého testu většina pozitivních výsledků falešně pozitivních. Pozitivní výsledek screeningu je proto třeba ověřit.

Prediktivní hodnoty z tabulky 2×2.

Zadání: `model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)`

Výsledek

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

Postup

- Hledáme PPV; zadáno:
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Senzitivita: $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Specificita: $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- Prevalence ve vzorku: $p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$
- Senzitivita (Se) je podíl nemocných, které test zachytí, specificita (Sp) podíl zdravých, které test správně vyloučí. Pro praxi je ale důležité, jak velká je pravděpodobnost poruchy při pozitivním výsledku – pozitivní prediktivní hodnota PPV. Podle Bayesovy věty závisí na prevalenci p: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), negativní NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p).
  Rovnice modelu
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$

- Dosadíme
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- Dosadíme
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Věrohodnostní poměry:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- Prediktivní hodnoty závisí na prevalenci: při nízké prevalenci je i u dobrého testu většina pozitivních výsledků falešně pozitivních. Pozitivní výsledek screeningu je proto třeba ověřit.

Vnitřní konzistence dotazníku se čtyřmi položkami.

Zadání: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Cronbachovo α

Výsledek

$$\alpha \approx 0{,}9343$$

$$95\,\%:\ \langle 0{,}765;\ 0{,}990\rangle$$

Postup

- Počet položek (sloupců) k = 4, počet respondentů (řádků) 6
- Výběrové rozptyly položek a jejich součet

  $s^2_{P1} = 2,\ s^2_{P2} \approx 1{,}467,\ s^2_{P3} = 1{,}1,\ s^2_{P4} \approx 2{,}667$

  $$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- Celkový skór každého respondenta (součet jeho odpovědí): $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. Rozptyl celkových skórů: $s^2_X \approx 24{,}17$
- Cronbachovo α – vnitřní konzistence je výborná.

  $$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Položková analýza – průměr, rozptyl, korelace položky se zbytkem testu a α po vyřazení položky

	$\bar{x}_i$	s_i^2	r_{it}	α_{-i}
P1	3	2	0,957	0,875
P2	3,333	1,467	0,825	0,922
P3	3,5	1,1	0,804	0,934
P4	3,333	2,667	0,869	0,918

- Interval spolehlivosti 95 % podle Feldta – podíl (1 − α)/(1 − α) má F-rozdělení s n − 1 a (n − 1)(k − 1) stupni volnosti

  $F_{0{,}975}(5;\ 15) = 3{,}576$

  $F_{0{,}025}(5;\ 15) = 0{,}1556$

  $$\alpha_L = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

  $$\alpha_U = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Orientační hodnocení α: ≥ 0,9 výborná, ≥ 0,8 dobrá, ≥ 0,7 přijatelná vnitřní konzistence. Pro výzkum stačí zhruba 0,7, pro rozhodování o jednotlivci (diagnostiku) se doporučuje aspoň 0,9.
- Vysoké α ještě neznamená, že test měří jedinou vlastnost, a roste i se samotným počtem položek. Vzroste-li α po vyřazení některé položky (poslední sloupec tabulky), položka do škály nejspíš nepatří.

Shoda čtyř hodnotitelů u šesti subjektů (příklad Shrouta a Fleisse).

Zadání: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

ICC (shoda hodnotitelů)

Výsledek

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \;\; \langle -0{,}133;\, 0{,}723 \rangle$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \;\; \langle -0{,}884;\, 0{,}912 \rangle$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \;\; \langle 0{,}019;\, 0{,}761 \rangle$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \;\; \langle 0{,}071;\, 0{,}927 \rangle$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \;\; \langle 0{,}342;\, 0{,}946 \rangle$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \;\; \langle 0{,}676;\, 0{,}986 \rangle$$

Postup

- Počet hodnocených subjektů (řádků) 6, počet hodnotitelů (sloupců) k = 4, celkový průměr $\bar{x} = 5{,}292$
- Analýza rozptylu – součty čtverců SS, stupně volnosti df a průměrné čtverce MS mezi subjekty (R), mezi hodnotiteli (C), reziduální (E) a uvnitř subjektů (W)

	SS	df	MS
R	56,21	5	11,24
C	97,46	3	32,49
E	15,29	15	1,019
W	112,7	18	6,264
$\sum$	169	23	

- Jednofaktorový model – každý subjekt mohou hodnotit jiní hodnotitelé

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Dvoufaktorový model s náhodnými hodnotiteli – absolutní shoda

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Dvoufaktorový model s pevnými hodnotiteli – konzistence

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- Intervaly spolehlivosti 95 % z F-rozdělení (Shrout a Fleiss) – poměry průměrných čtverců a jejich meze

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\, 18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\, 5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\, 15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\, 5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Všech šest ICC s intervaly spolehlivosti 95 %

	ICC	95 %
$ICC(1,1)$	0,166	$\langle -0{,}133;\, 0{,}723 \rangle$
$ICC(1,4)$	0,443	$\langle -0{,}884;\, 0{,}912 \rangle$
$ICC(2,1)$	0,290	$\langle 0{,}019;\, 0{,}761 \rangle$
$ICC(2,4)$	0,620	$\langle 0{,}071;\, 0{,}927 \rangle$
$ICC(3,1)$	0,715	$\langle 0{,}342;\, 0{,}946 \rangle$
$ICC(3,4)$	0,909	$\langle 0{,}676;\, 0{,}986 \rangle$

- Kterou ICC použít: ICC(1,·) – každý subjekt hodnotí jiní hodnotitelé; ICC(2,·) – hodnotitelé jsou náhodný výběr a zajímá nás absolutní shoda; ICC(3,·) – pevně dané hodnotitelé, zajímá nás konzistence. ICC(·,1) platí pro jednoho hodnotitele, ICC(·,k) pro průměr k hodnotitelů. Orientačně (Koo a Li): pod 0,5 slabá, 0,5–0,75 střední, 0,75–0,9 dobrá, nad 0,9 výborná reliabilita.
- ICC(3,k) se rovná Cronbachovu α spočítanému z týchž dat (hodnotitelé jako položky).
- Interval spolehlivosti ICC bývá při malém počtu subjektů široký – i vysoké ICC může mít dolní mez nízkou. ICC(2,·) mají interval přibližný (Satterthwaitovy stupně volnosti).
- Pozor: dat je málo, odhady (hlavně rozptylu a kvartilů) jsou nejisté.

Shoda dvou lékařů ve třech diagnostických kategoriích.

Zadání: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)` Cohenova κ

Výsledek

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\%: \ \langle 0{,}256;\ 0{,}986\rangle$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

Postup

- Z dvojic hodnocení sestavíme tabulku shody (řádky hodnotitel A, sloupce hodnotitel B, na diagonále shoda)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Pozorovaná shoda – podíl případů na diagonále:
  $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$
- Shoda čekaná náhodou – z řádkových a sloupcových součtů
  $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 3}{12^2} = \frac{49}{144} \approx 0{,}3403$
- Cohenova κ – shoda je značná (Landis a Koch).

$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$

- Interval spolehlivosti 95 % z asymptotické směrodatné chyby (Fleiss, Cohen a Everitt)
  $SE \approx 0{,}1861$
  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow \langle 0{,}256;\ 0{,}986\rangle$
- κ očišťuje shodu o shodu čekanou náhodou: 0 znamená jen náhodnou shodu, 1 úplnou shodu. Převažuje-li jedna kategorie, vychází κ nízká i při vysoké procentuální shodě – proto uvádíme i p_o.
- Kategorie bereme jako nominální – každý nesoulad váží stejně. U pořadových kategorií (např. stupeň závažnosti) se používá vážená κ, která menší nesoulad trestá méně.

Tytéž diagnózy s kvadratickými vahami – sousední kategorie se počítají jako částečná shoda.

Zadání: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Cohenova κ, Kvadratické váhy

Výsledek

$\kappa_w \approx 0{,}7955$

$95\,\% : \ \langle 0{,}576;\ 1{,}000 \rangle$

$p_o = 0{,}9375$

$p_e \approx 0{,}6944$

Postup

- Z dvojic hodnocení sestavíme tabulku shody (řádky hodnotitel A, sloupce hodnotitel B, na diagonále shoda)

$A \backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Kvadratické váhy shody – malý nesoulad se trestá málo, velký hodně: $w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$

	1	2	3
1	1	0,75	0
2	0,75	1	0,75
3	0	0,75	1

- Vážená pozorovaná shoda – četnosti tabulky násobené vahami: $p_o = \frac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \frac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$

- Vážená shoda čekaná náhodou – ze součtů řádků a sloupců s vahami: $p_e = \frac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \frac{100}{144} \approx 0{,}6944$

- Vážená Cohenova κ – shoda je značná (Landis a Koch).

  $\kappa_w = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$

- Interval spolehlivosti 95 % z asymptotické směrodatné chyby (Fleiss, Cohen a Everitt)

  $SE \approx 0{,}1119$

  $\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow \langle 0{,}576;\ 1{,}000 \rangle$

- κ očišťuje shodu o shodu čekanou náhodou: 0 znamená jen náhodnou shodu, 1 úplnou shodu. Převažuje-li jedna kategorie, vychází κ nízká i při vysoké procentuální shodě – proto uvádíme i p_o.

- Vážená κ počítá i částečnou shodu: hodnocení o jeden stupeň vedle se nepočítá jako úplný nesoulad. S kvadratickými vahami se vážená κ blíží ICC; volbu vah je dobré uvést.

Cohenova κ z tabulky shody 2×2.

Zadání: `data(20 5; 10 15)` Cohenova κ

Výsledek

$\kappa = 0{,}4$

$95\,\% : \ \langle 0{,}151;\ 0{,}649 \rangle$

$p_o = 0{,}7$

$p_e = 0{,}5$

Postup

- Tabulka shody (řádky hodnotitel A, sloupce hodnotitel B, na diagonále shoda) s řádkovými a sloupcovými součty

$A \backslash B$	1	2	$\sum$
1	**20**	5	25
2	10	**15**	25
$\sum$	30	20	50

- Pozorovaná shoda – podíl případů na diagonále: $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{20 + 15}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7$

- Shoda čekaná náhodou – z řádkových a sloupcových součtů

  $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{25 \cdot 30 + 25 \cdot 20}{50^2} = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$

- Cohenova κ: $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – shoda je mírná (Landis a Koch).

- Interval spolehlivosti 95 % z asymptotické směrodatné chyby (Fleiss, Cohen a Everitt)

  $SE \approx 0{,}127$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow \langle 0{,}151;\ 0{,}649 \rangle$

- κ očišťuje shodu o shodu čekanou náhodou: 0 znamená jen náhodnou shodu, 1 úplnou shodu. Převažuje-li jedna kategorie, vychází κ nízká i při vysoké procentuální shodě – proto uvádíme i p_o.

Jak dobře skór testu odlišuje pacienty (stav 1) od zdravých (stav 0).

Zadání: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` ROC křivka a AUC

Výsledek

$$AUC \approx 0{,}9167$$

$$95\,\%: \ \langle 0{,}706;\ 1{,}000\rangle$$

$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$

$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

Postup

- Pozitivní případy (stav 1) a negativní (stav 0): $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Všechny skóry seřadíme a očíslujeme pořadím. Součet pořadí pozitivních případů: $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- Mannova–Whitneyho statistika U – počet dvojic (pozitivní, negativní), kde má pozitivní případ vyšší skór: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- Plocha pod ROC křivkou: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – rozlišovací schopnost testu je vynikající.
- Interval spolehlivosti 95 % podle Hanleyho a McNeila

  $$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$

  $$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$

  $$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + }{n_1 n_0}}$$

  $$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow \langle 0{,}706;\ 1{,}0$$
- Nulová hypotéza: test nerozlišuje (AUC = 0,5), alternativní: rozlišuje – Mannův–Whitneyho test: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má normované normální rozdělení: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- Kritická hodnota na hladině α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \ge 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Protože $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Hraniční skór s největším Youdenovým indexem je 14 (pozitivní je skór ≥ 14)

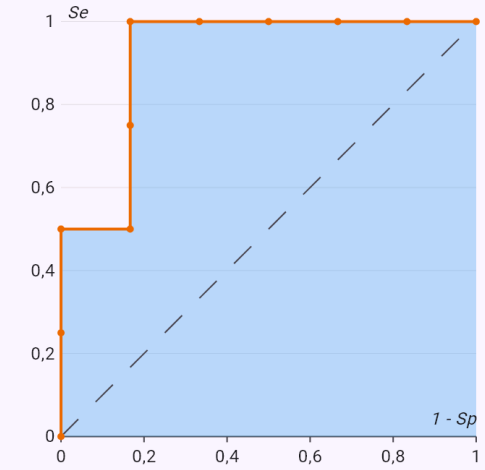
  $Se = 1$

  $Sp \approx 0{,}8333$

  $J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$
- AUC je pravděpodobnost, že náhodně vybraný pozitivní případ má vyšší skór než náhodně vybraný negativní (0,5 – test nerozlišuje, 1 – rozlišuje dokonale). Hraniční skór podle Youdenova indexu je jen jedna z možností – v praxi se volí i podle toho, co stojí falešně pozitivní a falešně negativní výsledek.
- Pozor: dat je málo, odhady (hlavně rozptylu a kvartilů) jsou nejisté.

Graf

ROC křivka – vybarvená plocha je AUC, přerušovaná úhlopříčka odpovídá testu, který nerozlišuje



Skóry pacientů a zdravých ve dvou skupinách různé velikosti, s Mannovým–Whitneyho testem.

Zadání: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` ROC křivka a AUC

Výsledek

$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%: \ \langle 0{,}787;\ 1{,}000\rangle$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

Postup

- Pozitivní skupina $\mathrm{pacienti}$ a negativní skupina zdravi: $n_1 = 5, \quad n_0 = 7$
- Všechny skóry seřadíme a očíslujeme pořadím. Součet pořadí pozitivních případů: $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- Mannova–Whitneyho statistika U – počet dvojic (pozitivní, negativní), kde má pozitivní případ vyšší skór: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 33$
- Plocha pod ROC křivkou: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5 \cdot 7} \approx 0{,}9429$ – rozlišovací schopnost testu je vynikající.
- Interval spolehlivosti 95 % podle Hanleyho a McNeila

  $$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
  $$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
  $$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + (n_0 - 1)\left(Q_2 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
  $$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow \langle 0{,}787;\ 1,$$
- Nulová hypotéza: test nerozlišuje (AUC = 0,5), alternativní: rozlišuje – Mannův–Whitneyho test: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \ne 0{,}5$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má normované normální rozdělení: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- Kritická hodnota na hladině α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \ge 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Protože $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Hraniční skór s největším Youdenovým indexem je 14 (pozitivní je skór ≥ 14)

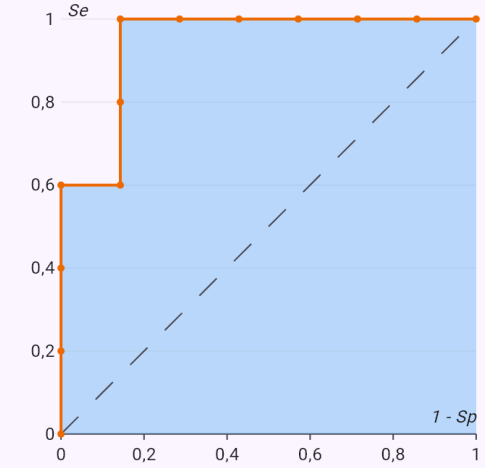
  $Se = 1$

  $Sp \approx 0{,}8571$

  $J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$
- AUC je pravděpodobnost, že náhodně vybraný pozitivní případ má vyšší skór než náhodně vybraný negativní (0,5 – test nerozlišuje, 1 – rozlišuje dokonale). Hraniční skór podle Youdenova indexu je jen jedna z možností – v praxi se volí i podle toho, co stojí falešně pozitivní a falešně negativní výsledek.
- Pozor: dat je málo, odhady (hlavně rozptylu a kvartilů) jsou nejisté.

Graf

ROC křivka – vybarvená plocha je AUC, přerušovaná úhlopříčka odpovídá testu, který nerozlišuje



Dva testy na stejných lidech – rozlišují různě dobře? (DeLongův test)

Zadání: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16 1;`

16 8 0; 10 13 0)

ROC křivka a AUC

Výsledek

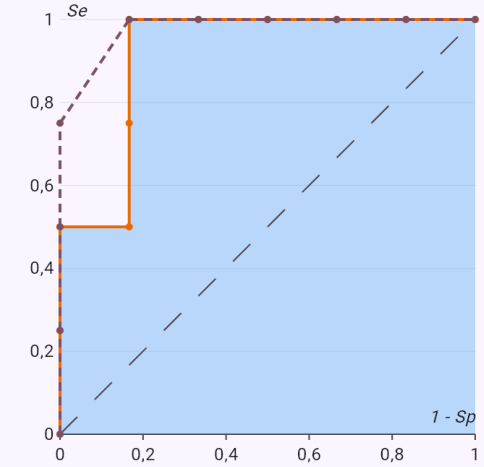
$$AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167,\ AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ \langle -0{,}277;\ 0{,}152 \rangle$$

Postup

- Dva testy A a B na stejných případech, pozitivní stav 1: $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Plochy pod ROC křivkami obou testů a jejich směrodatné chyby (DeLong)
  $AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167$
  $AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$
  $SE_{\mathrm{A}} \approx 0{,}09623$
  $SE_{\mathrm{B}} \approx 0{,}02946$
- Rozptyl rozdílu podle DeLonga – testy jsou na stejných případech, proto odečteme jejich kovarianci (korelace AUC $-0{,}327$)
  $\operatorname{var}(AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}) = \operatorname{var} AUC_{\mathrm{A}} + \operatorname{var} AUC_{\mathrm{B}} - 2\,\mathrm{c}$
  $= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot$
  $SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$
- Nulová hypotéza: oba testy rozlišují stejně, alternativní: liší se
  $H_0 : AUC_{\mathrm{A}} = AUC_{\mathrm{B}}$
  $H_1 : AUC_{\mathrm{A}} \neq AUC_{\mathrm{B}}$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má normované normální rozdělení
  $$z = \frac{AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- Kritická hodnota na hladině α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \geq 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Protože $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme – data neposkytují dost důkazů proti ní.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Interval spolehlivosti 95 % rozdílu obou AUC
  $AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- DeLongův test porovnává AUC dvou testů na stejných případech – bere v úvahu, že jsou korelované. Nesignifikantní rozdíl neznamená, že jsou testy stejně dobré, jen že data rozdíl neprokázala.
- Pozor: dat je málo, odhady (hlavně rozptylu a kvartilů) jsou nejisté.

Graf

ROC křivky obou testů – první plnou čarou s vybarvenou plochou, druhý čárkovaně



O kolik prodloužit test s reliabilitou 0,7 a 20 položkami na reliabilitu 0,9.

Zadání: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

Výsledek

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

Postup

- Hledáme k; zadáno: $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Delší test měří spolehlivěji: prodloužíme-li ho k-krát stejně kvalitními (paralelními) položkami, vzroste reliabilita podle Spearmanova–Brownova vzorce r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). Obráceně lze spočítat, kolikrát test prodloužit, aby dosáhl cílové reliability. Vzorec se používá i ke korekci split-half reliability (k = 2). Rovnice modelu: $k = \frac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$
- Dosadíme
  $k = \frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$
- Potřebný počet položek:
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- Vzorec předpokládá, že přidané položky jsou stejně kvalitní jako původní (paralelní). Skutečný nárůst bývá menší a s délkou testu roste i únava respondenta.

Korigovaná hladina pro 10 srovnání.

Zadání: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

Výsledek

$$\alpha' = 0{,}005$$

Postup

- Hledáme α'; zadáno: $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Při m testech na hladině α roste pravděpodobnost, že aspoň jeden vyjde významný jen náhodou: 1 − (1 − α)^m. Bonferroniho korekce proto posuzuje každý test na přísnější hladině α' = α/m. Šidákova korekce 1 − (1 − α)^(1/m) je o něco méně přísná. Rovnice modelu: $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- Dosadíme: $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Pravděpodobnost aspoň jednoho falešně významného výsledku bez korekce: $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1 - 0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Šidákova korekce $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1 - 0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- Bonferroniho korekce je konzervativní: chrání před falešně významnými výsledky, ale při mnoha srovnáních snadno přehlédne skutečný rozdíl. Méně přísná je například Holmova metoda nebo kontrola FDR (Benjaminiho–Hochbergova).

Známá omezení

- Percentil se počítá z normálního rozdělení – u zešikmených testů (časové skóry TMT) je správný jen percentil z normativní tabulky.
- Intervaly spolehlivosti jsou asymptotické nebo přibližné – u malých vzorků (do 10–20 případů) berte je orientačně.
- Zadání slovy nebo z fotky (text úlohy ze skript) zatím neumíme – hodnoty se vyplňují do formuláře.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace