Mathtrace – příručka

II. Lineární algebra a geometrie

Obsah

II. Lineární algebra a geometrie

20. Výpočty v geometrii

21. Matice

22. Vektory

23. Přímky a roviny

24. Konstrukční úlohy

20. Výpočty v geometrii

Obvody a obsahy útvarů, objemy a povrchy těles počítá formulář jako ostatní aplikace (Aplikace → Geometrie): vyberete útvar, co hledáte a zadáte rozměry s jednotkami. Útvary: čtverec, obdélník, trojúhelník (strana a výška, nebo tři strany – Heronův vzorec), rovnoběžník, kosočtverec, lichoběžník, pravidelný n-úhelník, kruh, mezikruží, oblouk a výseč, Pythagorova věta a podobné trojúhelníky; tělesa: krychle, kvádr, hranol, válec, pravidelný čtyřboký jehlan, kužel a koule.

Postup napíše vzorec, dosadí a spočítá; když je potřeba mezivýsledek (strana kužele, stěnová výška jehlanu), spočítá ho nejdřív. Jde to i obráceně – poloměr z obsahu, hranu z objemu, odvěsnu z přepony. Výsledek je přesně s π a odmocninami i přibližně (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Jednotky převede (z cm na dm, z dm³ na litry).

Ukázky

Obsah kruhu – přesně s π i přibližně.

Zadání: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Výsledek

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Kružnice je množina bodů ve vzdálenosti r od středu, kruh je kružnice i s vnitřkem. Obvod (délka kružnice) o = 2πr = πd, obsah kruhu S = πr². Číslo π ≈ 3,14159 je poměr obvodu a průměru – výsledek je přesně (s π) i přibližně.
  Vzorce
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Hledáme S; zadáno: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Opačně: poloměr z obsahu.

Zadání: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Výsledek

$$r \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Kružnice je množina bodů ve vzdálenosti r od středu, kruh je kružnice i s vnitřkem. Obvod (délka kružnice) o = 2πr = πd, obsah kruhu S = πr². Číslo π ≈ 3,14159 je poměr obvodu a průměru – výsledek je přesně (s π) i přibližně. Vzorce

  $o = \pi d$

  $d = 2r$

  $o = 2\pi r$

  $S = \pi r^2$

- Hledáme r; zadáno: $S = 50\,\mathrm{cm}^2$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- Dosadíme: $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$

Trojúhelník ze tří stran – Heronův vzorec.

Zadání: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Výsledek

$$S = 6\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Obsah trojúhelníku je polovina součinu strany a výšky na ni: S = a·v_a/2. Ze tří stran ho spočítá Heronův vzorec S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), kde s = (a + b + c)/2 je polovina obvodu. Strany musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost – součet dvou je větší než třetí. Vzorce

  $o = a + b + c$

  $S = \frac{a v_a}{2}$

  $s = \frac{a + b + c}{2}$

  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

- Hledáme S; zadáno: $a = 3\,\mathrm{cm},\ b = 4\,\mathrm{cm},\ c = 5\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\mathrm{cm}^2$

Odvěsna z přepony.

Zadání: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Výsledek

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Postup

- V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami: c² = a² + b². Přepona c leží proti pravému úhlu a je nejdelší stranou; odvěsnu dostaneme jako b = √(c² − a²). Vzorce
  $$c^2 = a^2 + b^2$$
- Hledáme b; zadáno: $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Dosadíme: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

Povrch kužele – nejdřív strana kužele.

Zadání: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Výsledek

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Kužel má kruhovou podstavu o poloměru r a výšku v. Objem je třetina válce: V = πr²v/3. Strana kužele s je přepona trojúhelníku s odvěsnami r a v; plášť je kruhová výseč S_{pl} = πrs, povrch S = πr² + πrs. Vzorce
  $$V = \frac{\pi r^2 v}{3}$$
  $$s^2 = r^2 + v^2$$
  $$S_{pl} = \pi r s$$
  $$S = \pi r^2 + S_{pl}$$
- Hledáme S; zadáno: $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Dosadíme: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- Dosadíme: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Objem krychle v litrech.

Zadání: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Výsledek

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Postup

- Krychle má šest stejných čtvercových stěn s hranou a. Objem V = a³, povrch S = 6a², tělesová úhlopříčka u = a√3. Hranu z objemu dostaneme třetí odmocninou: a = ∛V. Vzorce
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Hledáme V; zadáno: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Dosadíme: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Převedeme jednotky: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Známá omezení

- Náčrtek útvaru s popsanými rozměry zatím chybí.

21. Matice

Matici napište do hranatých závorek jako v Matlabu: prvky oddělte mezerou, řádky středníkem nebo novým řádkem. Prvek může být zlomek, odmocnina i písmeno; desetinná čárka platí jako jinde (1,5). Klávesa s mřížkou na záložce f(x) otevře tabulku, kam matici vyplníte po políčkách – nebo ji tam vložíte ze schránky (buňky zkopírované z Excelu či Google Tabulek) nebo načtete ze souboru CSV.

U jedné matice vyberete čipem, co spočítat: determinant (u 2×2 vzorcem, u 3×3 Sarrusovým pravidlem, jinak rozvojem podle řádku nebo sloupce či úpravami na trojúhelníkový tvar – metodu vyberete čipem), inverzní matici (u 2×2 vzorcem, jinak Gaussovou–Jordanovou metodou s jednotkovou maticí vedle), hodnost (úpravami na stupňovitý tvar) nebo transponovanou matici.

Více matic pojmenujte velkými písmeny, každou na vlastní řádek, a na poslední řádek napište, co spočítat: součet, rozdíl, násobek, součin (řádek krát sloupec, i s kontrolou rozměrů), mocninu, transpozici A^T, inverzi A^-1, det(A), rank(A) – nebo maticovou rovnici AX = B či XA = B, kterou aplikace vyřeší inverzní maticí. Soustavu rovnic zadanou maticí (rozšířená matice, Ax = b) řeší kapitola Soustavy rovnic.

Je-li v matici parametr (písmeno), hodnost aplikace rozebere podle jeho hodnot stejně jako soustavu – úpravami na stupňovitý tvar, kritické hodnoty dosadí. U inverzní matice nejdřív spočítá determinant a podmínku, pro které hodnoty parametru je nenulový (inverze existuje). Inverzní matici 3×3 a větší počítá Gaussovou–Jordanovou metodou nebo – podle čipu – adjungovanou maticí (algebraické doplňky, A^{-1} = adj A / det A).

U čtvercové matice spočítáte také vlastní čísla a vlastní vektory: charakteristický polynom det(A − λE) se rozepíše stejně jako determinant, rozloží na součin a jeho kořeny jsou vlastní čísla (kvadratický činitel z diskriminantu, i komplexní; kubický bez racionálního kořene přibližně). Vlastní vektory jsou řešení soustavy (A − λE)v = o úpravami na redukovaný stupňovitý tvar, u každého vlastního čísla aplikace uvede algebraickou i geometrickou násobnost. Čip Diagonalizace k tomu sestaví matice P a D ($A = PDP^{-1}$), nebo vysvětlí, proč matice diagonalizovat nejde. Singulární rozklad $A = U\Sigma V^{T}$ (SVD) a pseudoinverzní matici A^{+} spočítáte u matice libovolných rozměrů: SVD přes vlastní čísla matice $A^{T}A$ (u široké matice AA^{T}), normované vlastní vektory a dopočítání druhé strany; pseudoinverzi u matice plné hodnosti vzorcem $(A^{T}A)^{-1}A^{T}$, jinak ze singulárního rozkladu $A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T}$ – a pokud by singulární čísla vyšla jako vnořené odmocniny, přesně z rozkladu podle hodnosti A = BC vzorcem $A^{+} = C^{T}(CC^{T})^{-1}(B^{T}B)^{-1}B^{T}$.

Vlastní čísla a diagonalizaci aplikace rozebere i u matice s jedním parametrem (nejvýše 3×3): charakteristický polynom rozloží na součin s parametrem, vlastní čísla vyjádří jako jeho funkce a najde zvláštní hodnoty parametru – kde se dvě vlastní čísla shodují (dva činitele mají společný kořen, kvadratický činitel nulový diskriminant) nebo kde by obecný výpočet vlastních vektorů dělil nulou; uvede i hodnoty, pro které jsou vlastní čísla komplexní. Obecný případ vyřeší s parametrem, zvláštní hodnoty

dosadí a probere zvlášť. Čip Diagonalizace pak odpoví, pro které hodnoty parametru je matice diagonalizovatelná.

Jordanův tvar čtvercové matice (čip Jordanův tvar, zápis jordan(A)) aplikace spočítá z hodností mocnin $(A - \lambda E)^k$: z nich určí počet a velikosti Jordanových bloků, řetězce zobecněných vlastních vektorů sestaví od horního vektoru dolů k vlastnímu vektoru a matice P, J ověří ($A = PJP^{-1}$). Přes Jordanův tvar počítá i mocninu A^n pro obecné n (čip Mocnina A^n, zápis A^n; mocnina bloku binomickou větou, výsledek jako $2^{n-1}(n + 2)$) i pro velké číslo (A^10) a exponenciálu matice e^{At} a e^A (čip Exponenciála matice, zápis e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – hodí se k soustavám diferenciálních rovnic $x' = Ax$; komplexní vlastní čísla přepíše na kosiny a siny. Minimální polynom (čip Minimální polynom, zápis minpoly(A)) najde zkouškou kandidátů – dělitelů charakteristického polynomu – od nejnižšího stupně, připomene Cayleyho–Hamiltonovu větu p(A) = O a u regulární matice z m(A) = O vyjádří inverzní matici.

Jak zadat

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Prvky mezerou, řádky středníkem (nebo pod sebou uvnitř závorek).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Pojmenované matice po řádcích, na posledním řádku výpočet.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Determinant, inverzní a transponovaná matice, hodnost.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Vlastní čísla, diagonalizace, singulární rozklad, pseudoinverze.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Jordanův tvar, obecná mocnina, exponenciála matice, minimální polynom.

Ukázky

Determinant 3×3 Sarrusovým pravidlem.

Zadání: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Determinant

Výsledek

$$\det A = -3$$

Postup

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ &\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80 \\ &= -3\end{aligned}$$

Rozvoj podle sloupce s nejvíce nulami.

Zadání: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Rozvoj

Výsledek

$$\det A = 25$$

Postup

- Rozvoj podle 2. sloupce, každý prvek násobíme jeho doplňkem se znaménkem podle pozice

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot (-5) \\ &= 25\end{aligned}$$

Inverzní matice Gaussovou–Jordanovou metodou.

Zadání: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Inverzní matice

Výsledek

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postup

- Vedle matice napíšeme jednotkovou matici. Řádkovými úpravami převedeme levou část na jednotkovou

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Vlevo je jednotková matice, vpravo inverzní

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost úpravami na stupňovitý tvar.

Zadání: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Hodnost

Výsledek

$$h(A) = 2$$

Postup

- Řádkové úpravy

$$R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Řádkové úpravy $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matice je ve stupňovitém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Hodnost je počet nenulových řádků stupňovitého tvaru: $h(A) = 2$

Hodnost matice s parametrem.

Zadání: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Hodnost

Výsledek

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Postup

- Matice obsahuje parametr a – libovolné reálné číslo. Hodnost může záviset na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy.
- Řádkové úpravy $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

- Dál budeme počítat s prvkem $1-a$, který může být nulový – předpokládáme proto $a \neq 1$; případ $a = 1$ rozebereme zvlášť.
- Řádkové úpravy $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$

- Řádkové úpravy $R_3 \to \dfrac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Dál budeme počítat s prvkem $a+2$, který může být nulový – předpokládáme proto $a \neq -2$; případ $a = -2$ rozebereme zvlášť.
- Matice je ve stupňovitém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Pro $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Pro $a = 1$: $h(A) = 1$ – matice po dosazení

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pro $a = -2$: $h(A) = 2$ – matice po dosazení

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice s parametrem adjungovanou maticí.

Zadání: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Adjungovaná matice

Výsledek

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Podmínky: $a \neq 1$

Postup

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$ – inverzní matice existuje, právě když je determinant nenulový, tj. pro $a \neq 1$
- Algebraické doplňky prvků (s doplněným znaménkem (-1)^(i+j))

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \\ A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \\ A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

- Adjungovaná matice je transponovaná matice algebraických doplňků; vydělíme ji determinantem

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Součin, transpozice, násobek a rozdíl matic.

Zadání: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Výsledek

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Postup

- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Transponujeme, řádky se stanou sloupci
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Číslem vynásobíme každý prvek matice
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Sčítáme (odčítáme) prvky na stejných místech
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Maticová rovnice AX = B inverzní maticí.

Zadání: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Výsledek

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Postup

- Rovnici vynásobíme inverzní maticí ze strany neznámé:
  $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší
  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$
- $\det A = -2 \neq 0$, inverzní matice existuje.
- U matice 2×2 prohodíme prvky na hlavní diagonále, prvkům na vedlejší změníme znaménko a vydělíme determinantem
  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)
  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory symetrické matice.

Zadání: `[2 1; 1 2]` Vlastní čísla

Výsledek

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
  $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 − počet volných neznámých)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 3$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 3$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 − počet volných neznámých)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Iracionální vlastní čísla z diskriminantu.

Zadání: `[1 2; 3 4]` Vlastní čísla

Výsledek

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

  $$A-\lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - $$

- Charakteristický polynom rozložený na součin: $\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$
- Kořeny kvadratického činitele z diskriminantu

  $$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen): $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 − počet volných neznámých)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 − počet volných neznámých)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

Diagonalizace A = PDP⁻¹.

Zadání: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalizace

Výsledek

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 2$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 2$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = 11$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = 11$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Matice má tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, kolik má řádků, je tedy diagonalizovatelná: P má ve sloupcích vlastní vektory, D na diagonále vlastní čísla ve stejném pořadí a platí $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matice je symetrická: má reálná vlastní čísla a vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé. Po jejich znormování je P ortogonální a $P^{-1} = P^T$

Matice, kterou diagonalizovat nejde.

Zadání: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalizace

Výsledek

Matici nelze diagonalizovat – nemá dost lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnost 2, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = 2$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = 2$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Pro $\lambda = 1$ je geometrická násobnost 1 menší než algebraická 2 – matice nemá dost lineárně nezávislých vlastních vektorů, proto ji nelze diagonalizovat.

Vlastní čísla matice s parametrem – zvláštní hodnoty a jejich případy.

Zadání: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Vlastní čísla

Výsledek

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \neq 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Zvláštní hodnoty parametru – pro ně se dvě vlastní čísla shodují, nebo by výpočet vlastních vektorů dělil nulou:
$a = 1,\ a = 2$. Probereme je zvlášť ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- Obecný případ $a \neq 1,\ a \neq 2$: vlastní čísla jsou navzájem různá, matice má tedy tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, kolik má řádků, a je diagonalizovatelná.
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 2$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 2$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = a$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = a$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Případ $a = 1$ – dosadíme do matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnost 2, geometrická 1 – počet volných neznámých)
  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = 2$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_3 = 2$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)
  $$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Pro $\lambda = 1$ je geometrická násobnost 1 menší než algebraická 2 – matice nemá dost lineárně nezávislých vlastních vektorů, proto ji nelze diagonalizovat.
- Případ $a = 2$ – dosadíme do matice
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- Charakteristický polynom rozložený na součin
  $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$
- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
  $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)
  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 2$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 2$ (algebraická násobnost 2, geometrická 2 – počet volných neznámých)
  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Pro které hodnoty parametru je matice diagonalizovatelná.

Zadání: `[0 1; a 0]` Diagonalizace

Výsledek

Matice je diagonalizovatelná pro: $a \neq 0$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Kořeny kvadratického činitele z diskriminantu

$$\lambda^2 - a = 0: \; D = 4a, \; \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \; \sqrt{a}$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \; \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Zvláštní hodnoty parametru – pro ně se dvě vlastní čísla shodují, nebo by výpočet vlastních vektorů dělil nulou: $a = 0$. Probereme je zvlášť ($a = 0: \; \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Pro $a \in (-\infty; 0)$ je diskriminant záporný, vlastní čísla jsou komplexně sdružená (diagonalizovat lze jen nad komplexními čísly).
- Obecný případ $a \neq 0$: vlastní čísla jsou navzájem různá, matice má tedy tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, kolik má řádků, a je diagonalizovatelná.
- Případ $a = 0$ – dosadíme do matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 0$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 0$ (algebraická násobnost 2, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

- Pro $\lambda = 0$ je geometrická násobnost 1 menší než algebraická 2 – matice nemá dost lineárně nezávislých vlastních vektorů, proto ji nelze diagonalizovat.

Singulární rozklad matice 2×3.

Zadání: `[3 2 2; 2 3 -2]` Singulární rozklad (SVD)

Výsledek

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Postup

- Singulární rozklad $A = U\Sigma V^T$: matice má víc sloupců než řádků, začneme proto menší maticí AA^T – její vlastní čísla jsou druhé mocniny singulárních čísel a její vlastní vektory tvoří matici U. Spočítáme AA^T
- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot(- \\ 2\cdot 3+3\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 3+(-2)\cdot \end{pmatrix}$$
- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

  $$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$
- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$
- Charakteristický polynom rozložený na součin

  $$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$
- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):

  $$\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 25$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 25$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 9$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 9$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Singulární čísla jsou odmocniny vlastních čísel, seřazená sestupně: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Matice Σ má rozměry matice A

  $$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastní vektory znormujeme (vydělíme jejich velikostí); u násobného vlastního čísla je nejdřív zortogonalizujeme Gramovým–Schmidtovým procesem. Jsou to sloupce matice

  $$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

  $$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
- Sloupce matice V pro nenulová singulární čísla: $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$

  $$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$
- Chybějící sloupce matice V doplníme na ortonormální bázi: normovanými řešeními soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kolmými na předchozí sloupce

  $$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
- Singulární rozklad

  $$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Pseudoinverze matice s nezávislými sloupci.

Zadání: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoinverze

Výsledek

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Postup

- Sloupce matice jsou lineárně nezávislé (hodnost 2 = počet sloupců), matice $A^T A$ je tedy regulární a pseudoinverzi dává vzorec:
- $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$
- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

$$\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

- $\det A^T A = 3 \neq 0$, inverzní matice existuje.
- U matice 2×2 prohodíme prvky na hlavní diagonále, prvkům na vedlejší změníme znaménko a vydělíme determinantem

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$$

Pseudoinverze singulární matice ze singulárního rozkladu.

Zadání: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Výsledek

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Postup

- Matice nemá plnou hodnost (hodnost 1), pseudoinverzi proto spočítáme ze singulárního rozkladu: $A^+ = V\Sigma^+U^T$
- Singulární rozklad $A = U\Sigma V^T$: vlastní čísla matice A^TA jsou druhé mocniny singulárních čísel a její vlastní vektory tvoří matici V. Spočítáme A^TA
- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2\times 2 \cdot 2\times 2 \to 2\times 2$)

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A^TA - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

$$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda-25) = 0$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 25$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$\left(A^TA-\lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 25$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 0$ jsou nenulová řešení homogenní soustavy; matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$\left(A^TA-\lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory pro $\lambda_2 = 0$ (algebraická násobnost 1, geometrická 1 – počet volných neznámých)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Singulární čísla jsou odmocniny vlastních čísel, seřazená sestupně: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Matice Σ má rozměry matice A

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory znormujeme (vydělíme jejich velikostí); u násobného vlastního čísla je nejdřív zortogonalizujeme Gramovým–Schmidtovým procesem. Jsou to sloupce matice

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Sloupce matice U pro nenulová singulární čísla: $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Chybějící sloupce matice U doplníme na ortonormální bázi: normovanými řešeními soustavy $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kolmými na předchozí sloupce

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Singulární rozklad

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Matice Σ^+ vznikne transpozicí Σ a převrácením nenulových singulárních čísel

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pseudoinverzní matice

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{}} \end{pmatrix}$$

Pseudoinverze z rozkladu podle hodnosti A = BC.

Zadání: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoinverze

Výsledek

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Postup

- Matice nemá plnou hodnost (hodnost 2) a její singulární čísla by vyšla jako vnořené odmocniny. Pseudoinverzi proto spočítáme přesně z rozkladu podle hodnosti A = BC – B jsou lineárně nezávislé sloupce matice A, C nenulové řádky jejího redukovaného stupňovitého tvaru.
- Matici upravíme na redukovaný stupňovitý tvar; vedoucí prvky jsou ve sloupcích $1, 2$, B tvoří tyto sloupce matice A a C nenulové řádky upravené matice

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (- \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, inverzní matice existuje.
- U matice 2×2 prohodíme prvky na hlavní diagonále, prvkům na vedlejší změníme znaménko a vydělíme determinantem

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Násobíme řádek po sloupci (rozměry $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 7\cdot 7 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 + 7\cdot 8 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 4 + 8\cdot 7 & 2\cdot 2 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 \end{pmatrix} = \left($$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66\cdot 93 - 78\cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, inverzní matice existuje.
- U matice 2×2 prohodíme prvky na hlavní diagonále, prvkům na vedlejší změníme znaménko a vydělíme determinantem

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- Pseudoinverzní matice

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jordanův tvar se dvěma bloky k jednomu vlastnímu číslu.

Zadání: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Jordanův tvar

Výsledek

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Pro $\lambda = 2$ (algebraická násobnost 3) počítáme mocniny matice $A - \lambda E$ a jejich hodnosti h, dokud hodnost neklesne o algebraickou násobnost

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Jordanových bloků pro $\lambda = 2$ je tolik, kolik je nezávislých vlastních vektorů: $n - h(A-\lambda E)$ = 2. Bloků velikosti aspoň k je $h_{k-1} - h_k$, velikosti bloků jsou tedy $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Řetězec délky 2 pro $\lambda = 2$: horní vektor zvolíme z jádra $(A-\lambda E)^k$ tak, aby neležel v jádru nižší mocniny ani v obalu předchozích řetězců, a násobíme ho maticí $A - \lambda E$ až k vlastnímu vektoru

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Blok velikosti 1 pro $\lambda = 2$ dává vlastní vektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Jordanův tvar: P má ve sloupcích vektory řetězců (každý od vlastního vektoru nahoru), J má na diagonále vlastní čísla a uvnitř bloků nad diagonálou jedničky; platí $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mocnina A^n přes Jordanův tvar.

Zadání: `[3 1; -1 1]` Mocnina A^n

Výsledek

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$

- Charakteristický polynom rozložený na součin: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Pro $\lambda = 2$ (algebraická násobnost 2) počítáme mocniny matice $A - \lambda E$ a jejich hodnosti h, dokud hodnost neklesne o algebraickou násobnost

  $A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$

  $(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$

- Jordanových bloků pro $\lambda = 2$ je tolik, kolik je nezávislých vlastních vektorů: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. Bloků velikosti aspoň k je $h_{k-1} - h_k$, velikosti bloků jsou tedy 2: $J_2(2)$
- Řetězec délky 2 pro $\lambda = 2$: horní vektor zvolíme z jádra $(A - \lambda E)^k$ tak, aby neležel v jádru nižší mocniny ani v obalu předchozích řetězců, a násobíme ho maticí $A - \lambda E$ až k vlastnímu vektoru

  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Jordanův tvar: P má ve sloupcích vektory řetězců (každý od vlastního vektoru nahoru), J má na diagonále vlastní čísla a uvnitř bloků nad diagonálou jedničky; platí $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Mocninu spočítáme přes Jordanův tvar: $A^n = PJ^nP^{-1}$. Mocninu bloku dává binomická věta – prvek d míst nad diagonálou je $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

  $J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

- Matice vynásobíme

  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$

Exponenciála e^{At} – řešení soustavy x' = Ax.

Zadání: `A = [0 1; -2 -3]`

e^(At)

Výsledek

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$

- Determinant matice 2×2 je součin na hlavní diagonále minus součin na vedlejší

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):

  $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Blok velikosti 1 pro $\lambda = -2$ dává vlastní vektor

  $(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Blok velikosti 1 pro $\lambda = -1$ dává vlastní vektor

  $(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Všechny Jordanovy bloky mají velikost 1, matice J je tedy diagonální a matice je diagonalizovatelná. P má ve sloupcích vlastní vektory a platí $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Exponenciálu spočítáme přes Jordanův tvar: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. U bloku je prvek d míst nad diagonálou $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

- Matice vynásobíme

  $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$

- Pro t = 1

  $e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$

Minimální polynom, Cayleyho–Hamiltonova věta a inverzní matice z něj.

Zadání: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Minimální polynom

Výsledek

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Postup

- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice det(A − λE) = 0. Od prvků na diagonále odečteme λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynom rozložený na součin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Vlastní čísla (násobný kořen má víc jmen):
  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- Minimální polynom dělí charakteristický polynom a má všechny jeho kořeny. Kandidáti od nejnižšího stupně
  $(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$
- Dosadíme matici – nevyšla nulová matice, tento kandidát minimálním polynomem není.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- Dosadíme matici – vyšla nulová matice, nejnižší takový kandidát je minimální polynom.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- Cayleyho–Hamiltonova věta: každá čtvercová matice je kořenem svého charakteristického polynomu
  $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$
- Matice je regulární (absolutní člen minimálního polynomu je nenulový), z rovnosti m(A) = O proto vyjádříme inverzní matici

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Známá omezení

- Matice nejvýše 6×6.
- Vlastní čísla, diagonalizace, singulární rozklad, Jordanův tvar, mocnina A^n, exponenciála a minimální polynom u matic nejvýše 4×4 a bez parametru; vlastní čísla a diagonalizace s jedním parametrem do 3×3 (bez kubického činitele s parametrem), vlastní vektory obecného případu jen u vlastních čísel bez odmocniny z parametru.
- Jordanův tvar s postupem jen u racionálních vlastních čísel, jinak jen výsledek; obecná mocnina A^n a e^{At} potřebují přesná vlastní čísla (kubický činitel bez racionálního kořene: jen e^A přibližně).

22. Vektory

Vektor zapíšete jako ve škole se středníky, každý na vlastní řádek: u = (1; 2; 3); jméno může mít index (F_1 = (3; 4)). Bod zapíšete s hranatými závorkami: A[1; 2; 3]. Vektory v rovině mají dvě souřadnice, v prostoru tři.

Samotný bod v rovině aplikace zařadí do kvadrantu (nebo na osu) podle znamének souřadnic a nakreslí ho. U dvou bodů je vedle vzdálenosti |AB| čip „Střed úsečky“ – souřadnice středu jsou průměry souřadnic krajních bodů. Funguje i zápis slovy: „střed AB, A[1; 2], B[5; 6]“, „vzdálenost bodů A[1; 2] a B[4; 6]“, „kvadrant A[3; −2]“.

Bez dalšího řádku vyberete čipem, co spočítat: velikost, součet (výslednici sil i s velikostí a směrem), skalární součin (nulový znamená kolmé vektory), úhel (z kosinu, přesně v tabulkových hodnotách, jinak ve stupních a minutách), vektorový součin (determinantem s i, j, k), obsah rovnoběžníku a trojúhelníku, objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu smíšeným součinem nebo lineární závislost. U bodů aplikace nejdřív sestaví vektory AB, AC, AD z prvního bodu: dva body dají vzdálenost, tři trojúhelník, čtyři čtyřstěn.

Na poslední řádek můžete napsat výraz: u + 2v, u·v (nebo u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| a vektor z bodů AB. Graf ukáže vektory jako šipky – v rovině se mřížkou, v prostoru s osami, které otočíte prstem; obsah je vybarvený a úhel vyznačený obloukem.

Jak zadat

`u = (1; 2; 3)`	Vektor se středníky, každý na vlastním řádku.
`A[1; 2; 3]`	Bod s hranatými závorkami.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Výraz s vektory na posledním řádku.

Ukázky

Kvadrant bodu.

Zadání: `A[3; -2]`

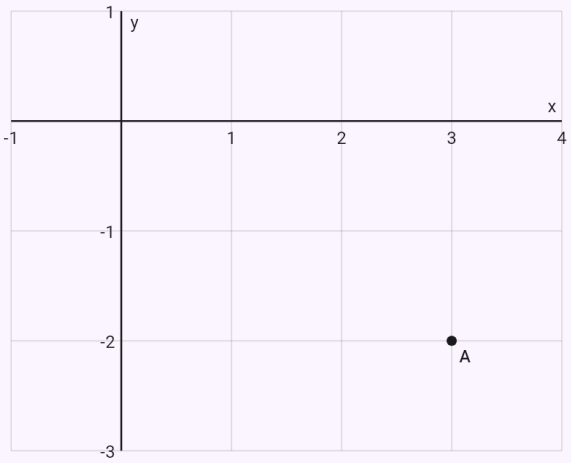
Výsledek

$A \in \mathrm{IV}$

Postup

- Bod $A[3;\ -2]$ má x kladné a y záporné – leží ve IV. kvadrantu (vpravo dole).

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Střed úsečky.

Zadání: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Výsledek

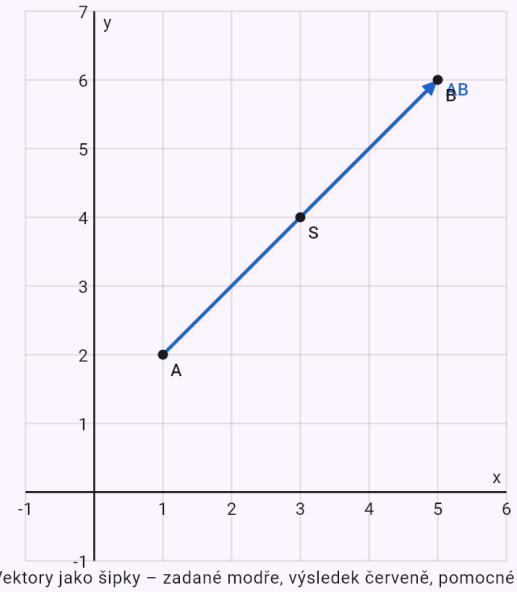
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Postup

- Střed úsečky má souřadnice rovné průměrům souřadnic krajních bodů

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] \\ &= [3;\ 4] \end{aligned}$$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Velikost vektoru.

Zadání: `u = (1; 2; 3)`

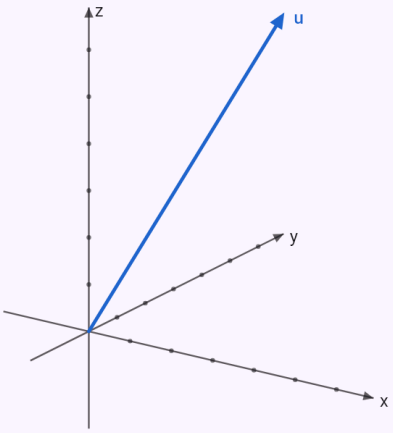
Výsledek

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Postup

- Velikost vektoru: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Úhel dvou vektorů.

Zadání: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

Výsledek

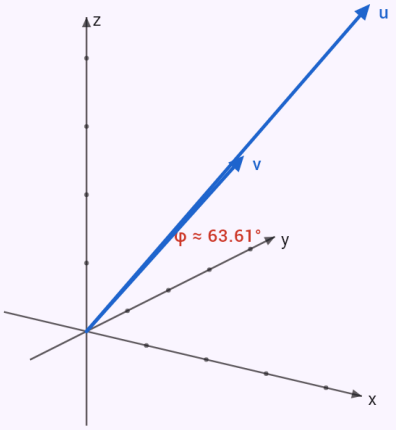
$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Postup

- Skalární součin je součet součinů odpovídajících souřadnic: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- Velikost vektoru: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Velikost vektoru: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Úhel vektorů ze skalárního součinu tedy $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Součet a násobek vektorů.

Zadání: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

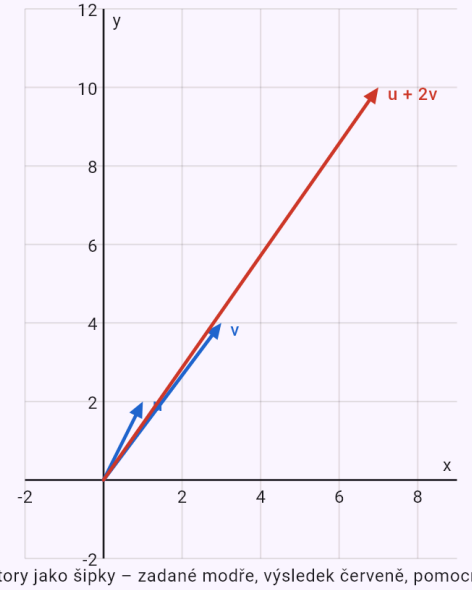
Výsledek

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Postup

- Násobek vektoru – každou souřadnici vynásobíme číslem: $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Vektory sčítáme (odčítáme) po souřadnicích: $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Vektorový součin.

Zadání: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Vektorový součin

Výsledek

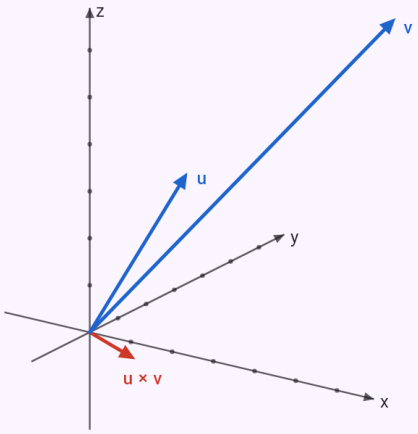
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Postup

- Vektorový součin rozvojem determinantu podle prvního řádku

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Obsah trojúhelníku ze tří bodů.

Zadání: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Výsledek

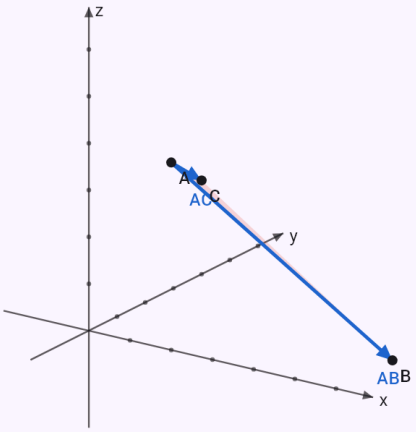
$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Postup

- Vektor z bodů – souřadnice koncového bodu minus souřadnice počátečního
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\, 1-0;\, 0-2) = (2;\, 1;\, -2)$
- Vektor z bodů – souřadnice koncového bodu minus souřadnice počátečního
  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\, 2-0;\, 1-2) = (-1;\, 2;\, -1)$
- Vektorový součin rozvojem determinantu podle prvního řádku
  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\, (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$
- Velikost vektoru
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$
- Obsah rovnoběžníku je velikost vektorového součinu (v rovině absolutní hodnota determinantu):
  $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- Trojúhelník je polovina rovnoběžníku:
  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu smíšeným součinem.

Zadání: `u = (1; 0; 2)`
`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Výsledek

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Postup

- Smíšený součin spočítáme jako determinant ze souřadnic vektorů

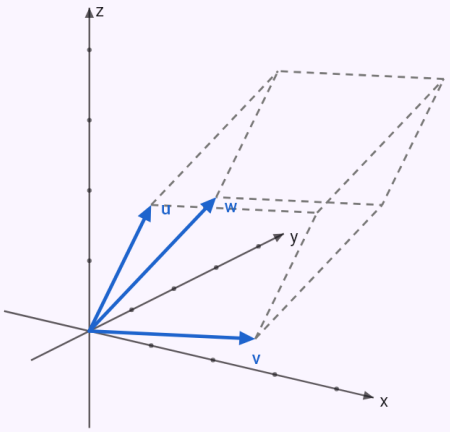
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0$$
$$= 13$$

- Objem rovnoběžnostěnu je absolutní hodnota smíšeného součinu: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- Čtyřstěn má šestinu objemu rovnoběžnostěnu: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Výslednice dvou sil.

Zadání: `F_1 = (3; 1)`
`F_2 = (-1; 3)` Součet (výslednice)

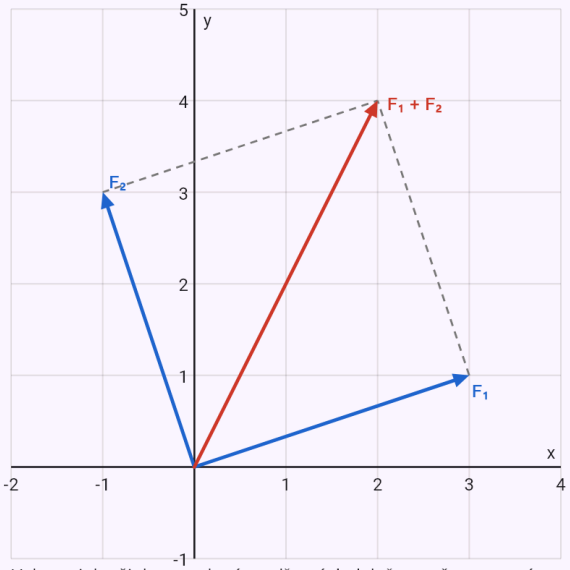
Výsledek

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Postup

- Vektory sčítáme (odčítáme) po souřadnicích $\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$
- Velikost vektoru $|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$
- Směr výslednice – její úhel s kladnou poloosou x: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2}, \alpha \approx 63{,}43^\circ$

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Lineární závislost tří vektorů.

Zadání: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Lineární závislost

Výsledek

Vektory jsou lineárně závislé.

Postup

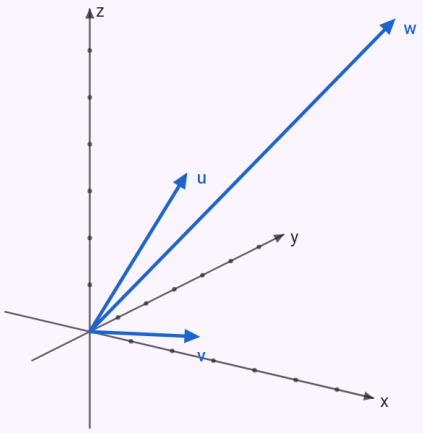
- Sarrusovo pravidlo, součiny ve směru hlavní diagonály minus součiny ve směru vedlejší

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 \\ &\quad - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \\ &= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Determinant ze souřadnic vektorů: $D = 0$. Nenulový determinant znamená lineárně nezávislé vektory, nulový závislé.

Graf



Vektory jako šipky – zadané modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Známá omezení

- Souřadnice jsou čísla (bez parametru), nejvýše šest; graf jen v rovině a v prostoru.

23. Přímky a roviny

Analytická geometrie v rovině i v prostoru. Bod zapíšete jako u vektorů: A[1; 2]. Přímku nebo rovinu pojmenujte a za dvojtečku napište její rovnici, každou na vlastní řádek: obecnou (p: 2x + 3y − 5 = 0), směrnicovou (p: y = 2x + 1), parametrickou (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) nebo vektorovou (p: X = A + t·u). V prostoru je rovnice s x, y, z rovina (ρ: x + y + z = 1), parametrické vyjádření se dvěma parametry také; přímku v prostoru zapíšete parametricky nebo jako průsečnici dvou rovin (p: x + y + z = 1, x − y = 0). Klávesy p:, q: a ρ: najdete na klávesnici funkcí.

Co spočítat, vyberete čipem – nabídka se řídí tím, co zadáte: u jedné přímky nebo roviny všechny tvary rovnic, u dvou vzájemná poloha s průsečíkem (průsečnicí), odchylka a vzdálenost, u bodu a přímky (roviny) vzdálenost, kolmice a rovnoběžka bodem, kolmý průmět a souměrně sdružený bod. Ke dvěma nebo třem samotným bodům přibudou mezi čipy vektorů rovnice přímky AB, osa úsečky a těžiště s výškami trojúhelníku (v prostoru rovina ABC).

Vzdálenost spočítá aplikace vzorcem, nebo – čipem „Přes kolmý průmět“ – jako na cvičení: kolmice bodem, její pata a délka úsečky. U mimoběžek najde i jejich osu. Odchylky jsou přesně v tabulkových hodnotách, jinak ve stupních a minutách. Úlohu můžete napsat i na poslední řádek: odchylka(p, q), vzdalenost(A, p), prusecik(p, q), kolmice(A, p), rovnobezka(A, p), prumet(A, ρ), soumerny(A, p), osa(A, B), stred(A, B), teziste(A, B, C), primka(A, B), rovina(A, B, C). Graf ukáže přímky a roviny, v prostoru ho otočíte prstem.

Geometrická zobrazení v rovině: posunutí o vektor, otočení kolem středu o úhel (ve stupních, kladný proti směru hodinových ručiček), stejnolehlost se středem a koeficientem a středová i osová souměrnost. Zobrazit jde bod, mnohoúhelník (body za sebou: posunuti(A, B, C, u) je trojúhelník), přímku i kružnici (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Úlohu napíšete na poslední řádek, nebo vyberete čipem „Posunutí“, „Otočení“, „Stejnolehlost“ či „Souměrnost“ – úhel a koeficient pak zapište na vlastní řádek (φ = 90, κ = 2), střed jako bod S. Postup ukáže předpis zobrazení v souřadnicích a obraz každého bodu, u přímky obrazy dvou jejích bodů a u kružnice střed a poloměr; graf vzor i obraz.

Kuželosečky v osové poloze (bez členu xy): doplněním na čtverce středový nebo vrcholový tvar, u kružnice střed a poloměr, u elipsy a hyperboly střed, poloosy, výstřednost a ohniska (u hyperboly i asymptoty), u paraboly vrchol, parametr, ohnisko a řídicí přímku; v grafu křivka s význačnými body.

Tečnu v bodě kuželosečky napíšete slovy – „tečna ke kružnici x^2 + y^2 = 25 v bodě [3; 4]“ – a aplikace ji najde „rozpůlením“ rovnice. Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky („vzájemná poloha x^2/9 + y^2/4 = 1 a y = x + 1“) určí dosazením a diskriminantem: sečna, tečna, nebo vnější přímka, s průsečíky. Kulovou plochu (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) doplní na čtverce a určí střed a poloměr. Mezi tvary přímky je i úsekový x/p + y/q = 1. Tečny z vnějšího bodu („tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]“) najde mezi přímkami bodem se směrnicí k – tečna je ta, u které je diskriminant nulový; svislou přímku ověří zvlášť.

Tečny rovnoběžné nebo kolmé s přímkou („… rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0“, „… kolmé k přímce y = x“) hledá se stejným normálovým vektorem a neznámým absolutním členem c. Kulovou plochu napíšete s názvem a na další řádek rovinu, přímku nebo bod: s rovinou porovná vzdálenost středu s poloměrem (kružnice řezu se středem a poloměrem, bod dotyku, nebo nic), s přímkou dosadí parametrické rovnice a rozhodne diskriminantem, u bodu na ploše najde tečnou rovinu.

Jak zadat

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Přímka obecnou, směrnicovou nebo parametrickou rovnicí, každá na vlastním řádku.
`p: X = A + t·u`	Přímka vektorovou rovnicí z bodu a vektoru.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Rovina obecnou rovnicí (v prostoru).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Přímka v prostoru jako průsečnice dvou rovin.
`odchylka(p, q), vzdalenost(A, p), teziste(A, B, C)`	Úloha na posledním řádku.
`posunuti(A, B, C, u), otoceni(A, S, 90), stejnolehlost(p, k, S, 2), soumernost(k, q)`	Geometrické zobrazení: útvary, pak vektor, střed a úhel či koeficient, nebo střed či osa souměrnosti.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Kuželosečka – rovnice v x a y druhého stupně.

Ukázky

Všechny tvary rovnice přímky z parametrického vyjádření.

Zadání: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

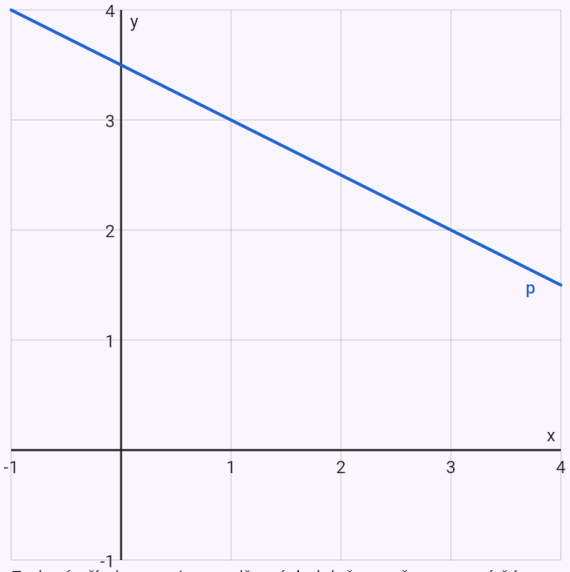
Výsledek

$$p : x + 2y - 7 = 0$$
$$p : x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Postup

- Z parametrického vyjádření přečteme bod (absolutní členy) a směrový vektor (koeficienty u parametru): $P_p[1;\,3],\ \vec{u}_p = (2;\,-1)$
- Normálový vektor přímky je kolmý na směrový – souřadnice prohodíme a u jedné změníme znaménko: $\vec{u}_p = (2;\,-1)\ \Rightarrow\ \vec{n}_p = (1;\,2)$
- Obecná rovnice: koeficienty jsou souřadnice normálového vektoru, absolutní člen dopočítáme dosazením bodu $p : x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\,3] :\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0\ \Rightarrow\ c =$
- Směrnicový tvar – z obecné rovnice vyjádříme y: $p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Úsekový tvar – ve jmenovatelích jsou úseky, které přímka vytíná na osách x a y: $p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Průsečík dvou přímek.

Zadání: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Výsledek

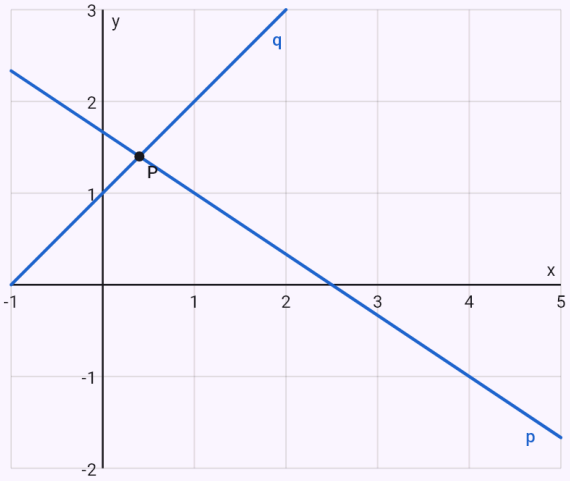
Přímky jsou různoběžné, průsečík:

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Postup

- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Vektory nejsou násobkem jeden druhého – útvary nejsou rovnoběžné
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- Průsečík je řešením soustavy rovnic obou přímek (Cramerovo pravidlo)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Vzdálenost bodu od přímky vzorcem.

Zadání: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

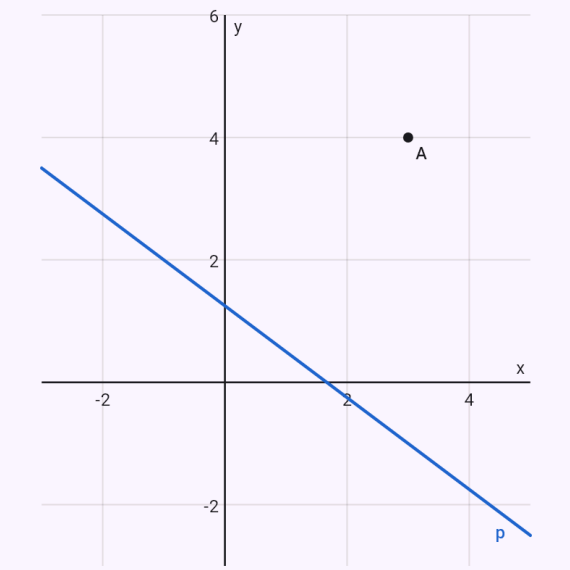
Výsledek

$$v(A, p) = 4$$

Postup

- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- Vzdálenost bodu od přímky
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Tatáž vzdálenost přes kolmý průmět.

Zadání: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Přes kolmý průmět

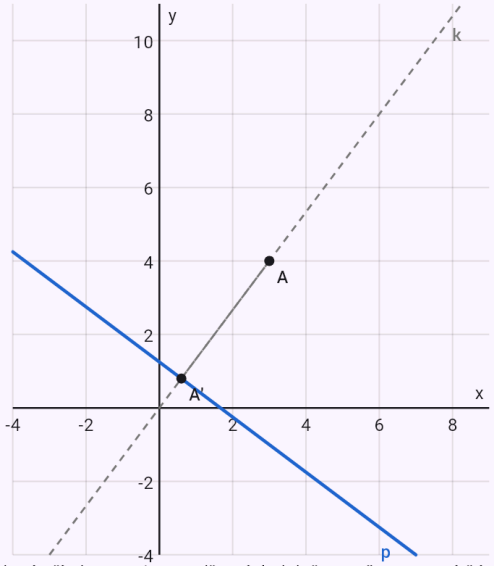
Výsledek

$$v(A, p) = 4$$

Postup

- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $p : 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\, 4)$
- Kolmice bodem A k přímce p – směrový vektor jedné přímky je normálovým vektorem druhé
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\, 4),\; k : x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- Pata kolmice A' je průsečíkem kolmice s útvarem p – dosadíme a spočítáme t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- Vzdálenost bodu od přímky
  $v(A, p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Těžiště, výšky a ortocentrum trojúhelníku.

Zadání: `A[1; 2]`

`B[5; 2]`

C[3; 6] Těžiště a výšky

Výsledek

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Postup

- Těžiště – průměr souřadnic vrcholů

  $$T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$$

- Výška z vrcholu A je kolmá na protější stranu – vektor strany je jejím normálovým vektorem, délka výšky je vzdálenost vrcholu od strany

  $$\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$$

- Výška z vrcholu B je kolmá na protější stranu – vektor strany je jejím normálovým vektorem, délka výšky je vzdálenost vrcholu od strany

  $$\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$$

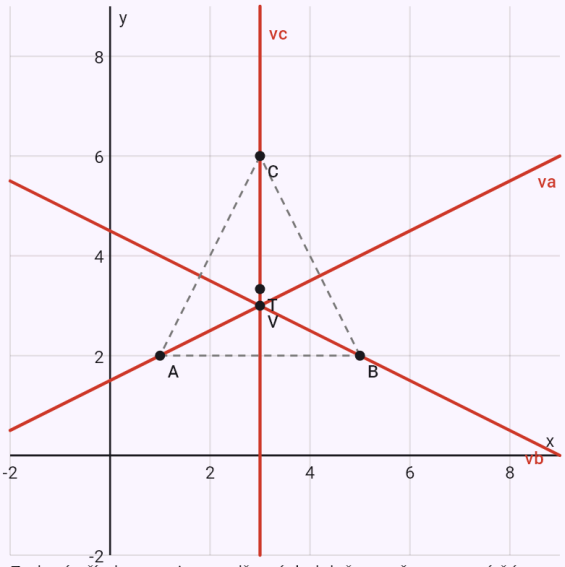
- Výška z vrcholu C je kolmá na protější stranu – vektor strany je jejím normálovým vektorem, délka výšky je vzdálenost vrcholu od strany

  $$\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$$

- Průsečík výšek (ortocentrum) – stačí dvě výšky

  $$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Bod souměrně sdružený podle přímky.

Zadání: A[1; 2]

`p: x - y = 0` Souměrnost

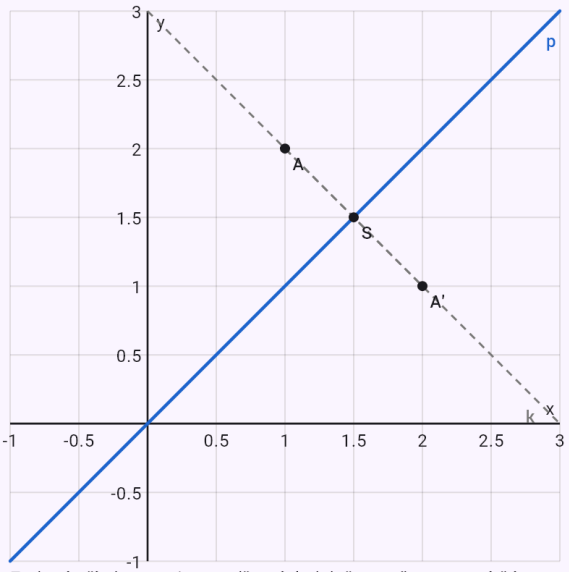
Výsledek

$$A'[2;\ 1]$$

Postup

- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- Kolmice bodem A k přímce p – směrový vektor jedné přímky je normálovým vektorem druhé $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- Pata kolmice S je průsečíkem kolmice s útvarem p – dosadíme a spočítáme t $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- Souměrně sdružený bod: střed souměrnosti (pata kolmice) je středem úsečky mezi bodem a jeho obrazem $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Posunutí trojúhelníku o vektor.

Zadání: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`posunuti(A, B, C, u)`

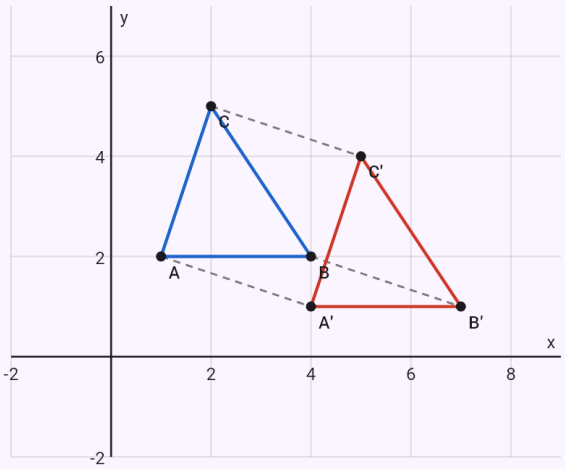
Výsledek

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Postup

- Posunutí o vektor: každý bod X se posune o tentýž vektor, X' = X + u: $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- Obraz bodu: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- Obraz bodu: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- Obraz bodu: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Otočení trojúhelníku o 90° kolem bodu S.

Zadání: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`otoceni(A, B, C, S, 90)`

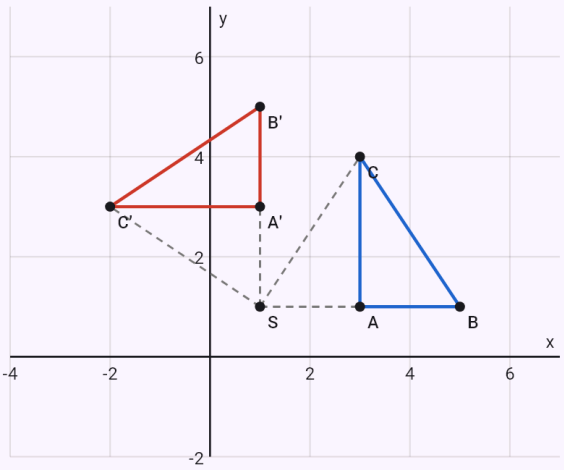
Výsledek

$$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$$
$$C'[-2;\ 3]$$

Postup

- Otočení kolem středu S o úhel φ (kladný proti směru hodinových ručiček): vektor X − S se otočí o φ a přičte se ke středu
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- Obraz bodu
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Obraz bodu
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Obraz bodu
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Stejnolehlost přímky a kružnice s koeficientem 2.

Zadání: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
stejnolehlost(p, k, S, 2)
```

Výsledek

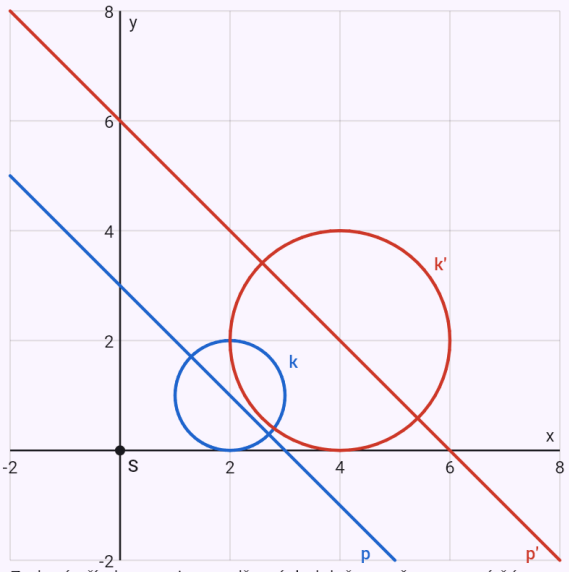
$$p' : x + y - 6 = 0$$

$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Postup

- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z): $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\,1)$
- Kružnice k – střed a poloměr ze středového tvaru (doplněním na čtverec)
  $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\,1],\; r = 1$
- Stejnolehlost se středem S a koeficientem κ: vektor X − S se vynásobí κ (záporné κ přenese obraz na druhou stranu středu): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- Obraz přímky p: zobrazíme dva její body, obrazem je přímka jejich obrazy – rovnoběžná se vzorem
  $P_1[0;\,3],\; P_2[1;\,2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\,6],\; P_2'[2;\,4] \in p'$
- Normálový vektor přímky je kolmý na směrový – souřadnice prohodíme a u jedné změníme znaménko: $\vec{u}_{p'} = (2;\,-2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\,1)$
- Obecná rovnice: koeficienty jsou souřadnice normálového vektoru, absolutní člen dopočítáme dosazením bodu
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\,6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- Obraz kružnice k: zobrazíme střed, poloměr se vynásobí |κ|
  $S_k[2;\,1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\,2],\; r' = |\kappa|\,r = |2| \cdot 1 = 2$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Kružnice souměrná podle přímky – osa vybraná čipem.

Zadání: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Souměrnost

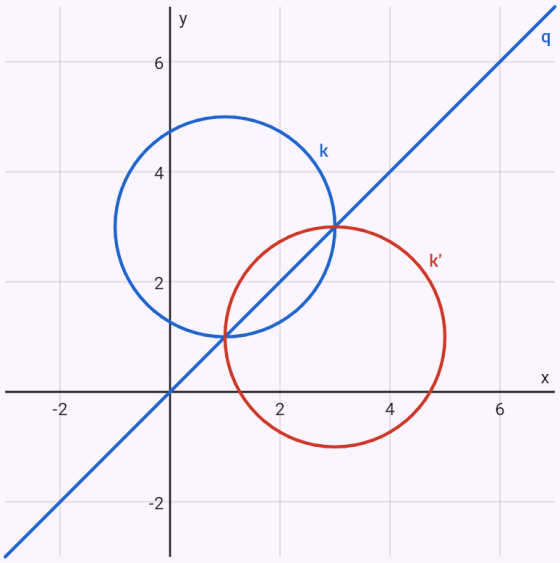
Výsledek

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Postup

- Kružnice k – střed a poloměr ze středového tvaru (doplněním na čtverec)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- Směrnicový tvar převedeme na obecnou rovnici a přečteme normálový vektor:
  $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Osová souměrnost: obraz leží na kolmici k ose a osa půlí úsečku XX' – posuneme bod dvakrát o jeho vzdálenost od osy ve směru normálového vektoru (a; b):
  $X' = X - 2\,\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- Obraz kružnice k: zobrazíme střed, poloměr zůstává (zobrazení je shodné): $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S'_k[3;\,1],\; r' = r = 2$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně.

Průsečnice dvou rovin.

Zadání: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Výsledek

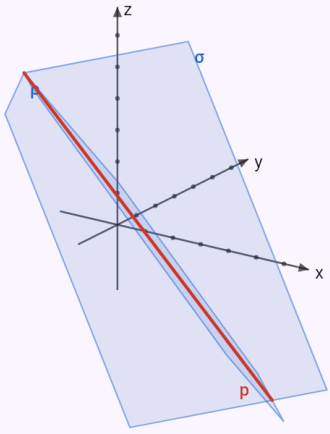
Roviny jsou různoběžné, průsečnice:

$$p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t$$

Postup

- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $\sigma : 2x - y + z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1)$
- Vektory nejsou násobkem jeden druhého – útvary nejsou rovnoběžné
  $\vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1),\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1),\; \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- Směrový vektor průsečnice je kolmý na oba normálové vektory – je to jejich vektorový součin
  $\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\,1;\,-3)$
- Bod útvaru P: zvolíme souřadnice a zbylou dopočítáme z rovnice
  $z = 0 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow\; x = \frac{4}{3},\; y = -\frac{1}{3},\; P_p\left[\frac{4}{3};\right.$
- Průsečnice – její bod a směrový vektor:
  $p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t,\; t \in \mathbb{R}$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Odchylka přímky a roviny.

Zadání: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`
`ρ: x + y + z = 1` Odchylka

Výsledek

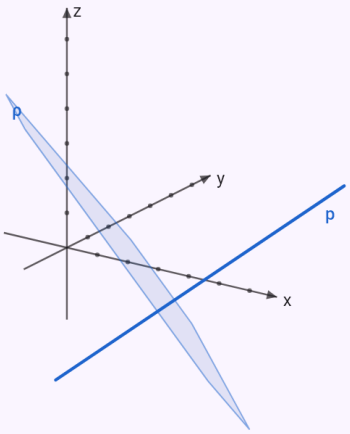
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Postup

- Z parametrického vyjádření přečteme bod (absolutní členy) a směrový vektor (koeficienty u parametru): $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p = (1;\,2;\,1)$
- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- Odchylka přímky a roviny: úhel směrového a normálového vektoru ji doplňuje do 90°, proto sinus tedy $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Vzdálenost a osa mimoběžek.

Zadání: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`

`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Vzdálenost

Výsledek

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Postup

- Z parametrického vyjádření přečteme bod (absolutní členy) a směrový vektor (koeficienty u parametru): $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- Z parametrického vyjádření přečteme bod (absolutní členy) a směrový vektor (koeficienty u parametru): $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- Vzdálenost mimoběžek

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- Osa mimoběžek: bod X na první přímce a Y na druhé tak, aby vektor XY byl kolmý na oba směrové vektory – soustava pro t a s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

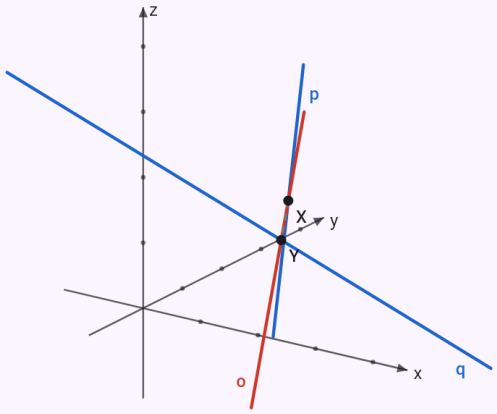
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- Parametrické vyjádření – bod plus parametr krát směrový vektor:

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Kružnice – doplnění na čtverce, střed a poloměr.

Zadání: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Výsledek

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

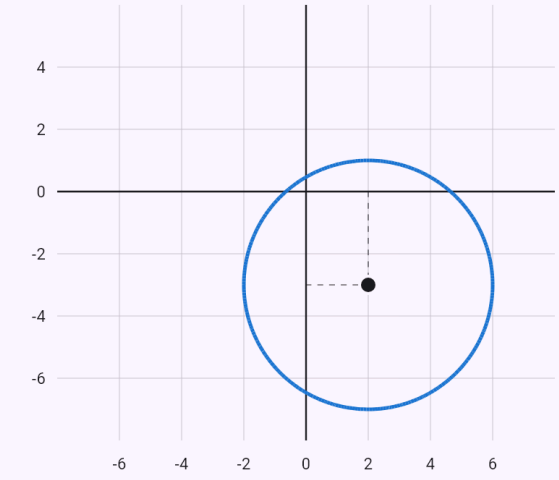
Postup

- Doplníme na čtverce

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- Středová rovnice kružnice: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Střed $S = [2;\ -3]$, poloměr $r = 4$

Graf



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Křivka zadaná rovnicí v rovině x, y.

Elipsa – poloosy, výstřednost a ohniska.

Zadání: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

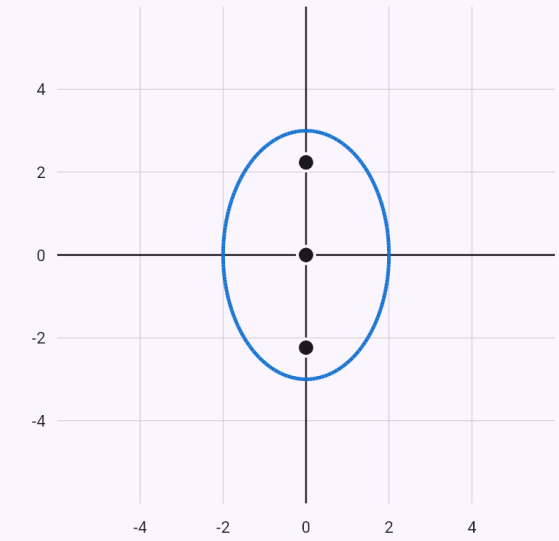
Výsledek

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Postup

- Středová rovnice elipsy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Střed $S = [0;\ 0]$, poloosy $a = 3,\ b = 2$ (hlavní osa je rovnoběžná s osou y), výstřednost $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, číselná výstřednost $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, ohniska $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Graf



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Křivka zadaná rovnicí v rovině x, y.

Hyperbola – ohniska a asymptoty.

Zadání: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

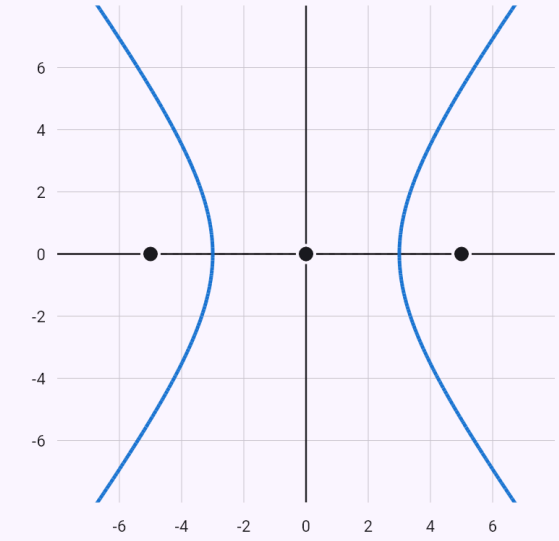
Výsledek

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Postup

- Středová rovnice hyperboly: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Střed $S = [0;\ 0]$, poloosy $a = 3,\ b = 4$ (hlavní osa je rovnoběžná s osou x), výstřednost $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, číselná výstřednost $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, ohniska $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, asymptoty $y = \pm\frac{4}{3}x$

Graf



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Křivka zadaná rovnicí v rovině x, y.

Parabola – vrchol, ohnisko a řídicí přímka.

Zadání: `y^2 = 8x`

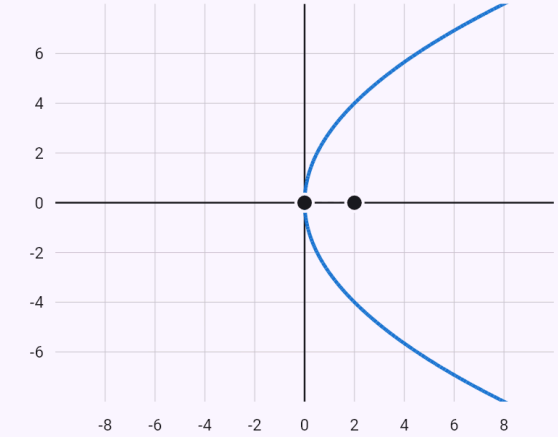
Výsledek

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Postup

- Vrcholová rovnice paraboly: $y^2 = 8x$
- Vrchol $V = [0;\ 0]$, parametr $p = 4$, osa rovnoběžná s osou x, ohnisko $F = [2;\ 0]$, řídicí přímka $x = -2$

Graf



$y^2 = 8x$

Křivka zadaná rovnicí v rovině x, y.

Tečna kružnice v jejím bodě.

Zadání: `tečna ke kružnici x^2 + y^2 = 25 v bodě [3; 4]`

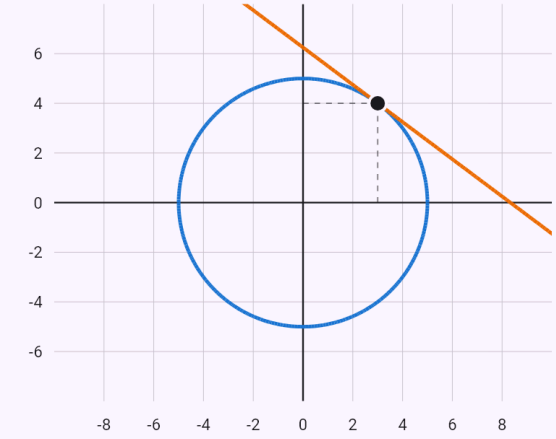
Výsledek

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Postup

- Bod $T = [3;\ 4]$ leží na kuželosečce – po dosazení: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- Rovnici tečny v bodě $[x_0; y_0]$ kuželosečky dostaneme „rozpůlením“: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \dfrac{x + x_0}{2}$, $y \to \dfrac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- Rovnice tečny: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Graf



$x^2 + y^2 = 25$

$3x + 4y - 25 = 0$

Kuželosečka a přímky; vyznačené body jsou body dotyku, průsečíky a zadaný bod.

Tečny z vnějšího bodu – nulový diskriminant pro směrnici k.

Zadání: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

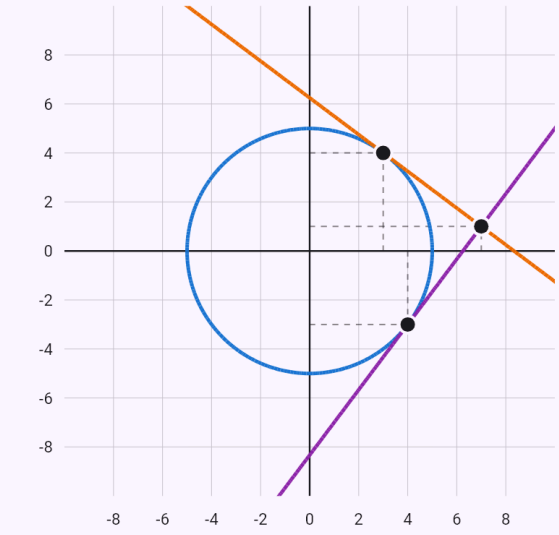
Výsledek

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Postup

- Bod $M = [7;\ 1]$ na kuželosečce neleží – po dosazení: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, ne 0.
- Tečny hledáme mezi přímkami bodem M se směrnicí k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- Za y dosadíme do rovnice kuželosečky: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- Přímka je tečna, právě když má rovnice jediný (dvojnásobný) kořen – diskriminant je nulový: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- Tečny: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; body dotyku: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Graf



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

Kuželosečka a přímky; vyznačené body jsou body dotyku, průsečíky a zadaný bod.

Tečny rovnoběžné s přímkou.

Zadání: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

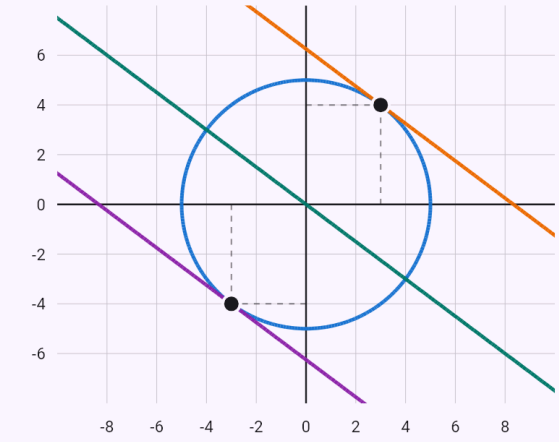
Výsledek

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Postup

- Tečny rovnoběžné s přímkou mají její normálový vektor, liší se jen absolutním členem c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Za y dosadíme do rovnice kuželosečky: $y = \frac{-3x - c}{4} \ \Rightarrow \ 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- Přímka je tečna, právě když má rovnice jediný (dvojnásobný) kořen – diskriminant je nulový: $D = c^2 - 625 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- Tečny: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; body dotyku: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Graf



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

Kuželosečka a přímky; vyznačené body jsou body dotyku, průsečíky a zadaný bod.

Vzájemná poloha elipsy a přímky.

Zadání: `vzájemná poloha x^2/9 + y^2/4 = 1 a y = x + 1`

Výsledek

$$P_1 = \left[-\frac{3(3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1-3\sqrt{3})}{13}\right]$$

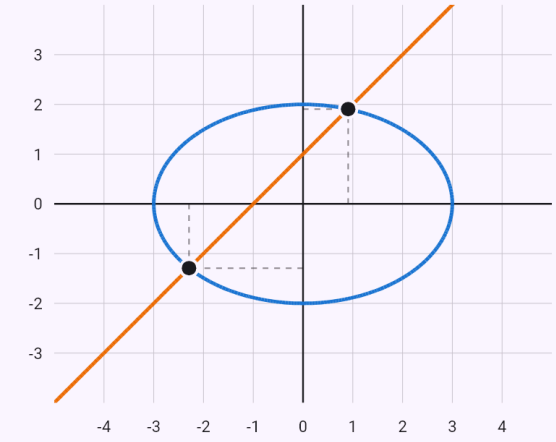
$$P_2 = \left[\frac{3(-3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1+3\sqrt{3})}{13}\right]$$

Postup

- Z rovnice přímky vyjádříme y a dosadíme do rovnice kuželosečky: $y = x + 1 \ \Rightarrow\ 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- Diskriminant $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ je kladný – přímka je sečna, má s kuželosečkou dva společné body.
- Průsečíky

$$P_1 = \left[-\frac{3(3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1-3\sqrt{3})}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3(-3+4}{13}\right.$$

Graf



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y = x + 1$

Kuželosečka a přímky; vyznačené body jsou body dotyku, průsečíky a zadaný bod.

Kulová plocha – střed a poloměr.

Zadání: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Výsledek

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Postup

- Doplníme na čtverce

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

- Středová rovnice kulové plochy: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Střed $S = [1;\ -2;\ 3]$, poloměr $r = 4$

Kulová plocha a rovina – kružnice řezu.

Zadání: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

```
ρ: x + y + z = 1
```

Výsledek

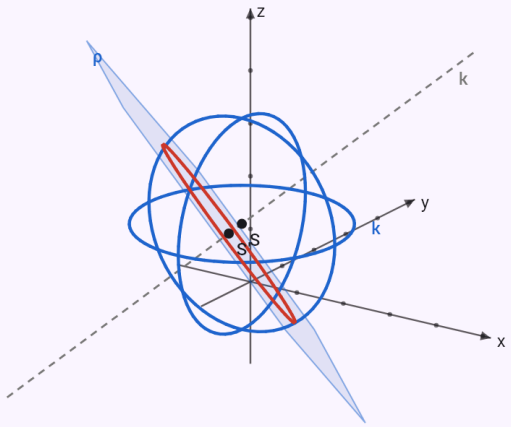
Rovina protíná kulovou plochu v kružnici se středem a poloměrem:

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Postup

- Rovnici kulové plochy k doplněním na čtverce převedeme na středový tvar – střed a poloměr
  $k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16 \ \Rightarrow \ S[1;\ -2;\ 3$
- Z obecné rovnice přečteme normálový vektor – koeficienty u x, y (z):
  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- Vzdálenost bodu od roviny
  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$
- Vzdálenost středu od roviny ρ je menší než poloměr – rovina protíná kulovou plochu v kružnici:
  $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$
- Kolmice bodem S k rovině ρ má směr jejího normálového vektoru:
  $k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$
- Pata kolmice S' je průsečíkem kolmice s útvarem ρ – dosadíme a spočítáme t
  $(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0 \ \Rightarrow \ t = -\frac{1}{3},\ S'[$
- Střed kružnice řezu je pata kolmice ze středu,
  $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; poloměr z Pythagorovy věty
  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Kulová plocha a přímka – průsečíky.

Zadání: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`

```
p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
```

Výsledek

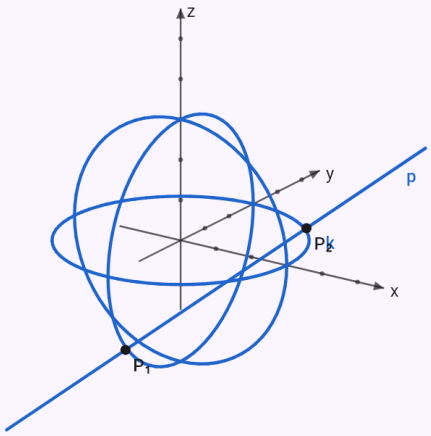
Přímka protíná kulovou plochu ve dvou bodech:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6}; -\frac{\sqrt{42}}{3}; \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ F$$

Postup

- Rovnici kulové plochy k doplněním na čtverce převedeme na středový tvar – střed a poloměr:
  $k: x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow S[0;0;0],\ r=3$
- Z parametrického vyjádření přečteme bod (absolutní členy) a směrový vektor (koeficienty u parametru):
  $P_p[1;0;-1],\ \vec{u}_p=(1;2;1)$
- Parametrické rovnice přímky p dosadíme do rovnice kulové plochy
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2 \Rightarrow 6t^2-7=0$
- Diskriminant $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ je kladný – přímka je sečna, má s kulovou plochou dva společné body.
- Průsečíky
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6}; -\frac{\sqrt{42}}{3}; \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Graf



Zadané přímky a roviny modře, výsledek červeně, pomocné čáry čárkovaně. Vektory v prostoru – graf otočíte tažením prstu.

Známá omezení

- Souřadnice a koeficienty jsou čísla (bez parametru); kuželosečky jen v osové poloze (bez členu xy).
- Geometrická zobrazení jen v rovině; kružnici zatím jen zobrazí (ne vzdálenost, polohu ani tečny k ní).
- Výšky trojúhelníku v prostoru jen délkou, bez rovnic a průsečíku.
- Jméno přímky nebo roviny je jedno písmeno (i s indexem) – „a: 2x + 3 = 5“ se proto čte jako přímka, ne jako rovnice.

24. Konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy zadáte formulářem – v sekci „Aplikace“ na úvodní obrazovce, obor Geometrie (formulář „Konstrukční úlohy“). Základní úlohou je trojúhelník ABC ze tří prvků: tři strany (sss), dvě strany a úhel mezi nimi (sus), stranu a dva úhly (usu – třetí úhel se dopočítá ze součtu 180°) nebo dvě strany a úhel proti jedné z nich (Ssu). Délky jsou v centimetrech, úhly ve stupních.

Řešení je školní: rozbor (náčrt hotového trojúhelníku se zvýrazněnými zadanými prvky), postup konstrukce v symbolickém zápisu (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) a diskuse počtu řešení. Obrázkem pod výsledkem listujete šipkami krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou barevně zvýrazněné. Ve výsledku jsou i dopočtené strany a úhly, podle kterých si narýsovaný trojúhelník přeměříte.

Diskuse vysvětlí, proč úloha nemá řešení (trojúhelníková nerovnost, součet úhlů, kružnice nezasáhne polopřímku), nebo proč má dvě (Ssu, když je zadaný úhel proti kratší straně).

Trojúhelník umí i s výškou, těžnicí nebo poloměrem kružnice opsané či vepsané. Nejdřív se narýsuje strana a třetí vrchol leží v průsečíku dvou množin bodů: rovnoběžky ve vzdálenosti výšky, kružnice kolem středu strany s poloměrem těžnice, kružnice kolem krajního bodu, ramene úhlu, oblouku úhlu nad stranou nebo kružnic opsaných. Se dvěma stranami a výškou z jejich společného vrcholu se začne výškou, s poloměrem kružnice vepsané, stranou a úhlem u ní se sestrojí kružnice vepsaná a tečna k ní.

Čtyřúhelníky: čtverec, obdélník, kosočtverec, rovnoběžník a lichoběžník (AB ∥ CD) ze stran a, b, c, d, úhlopříček e, f, úhlů α, β a výšky v – prvky se vybírají v řádcích jako u trojúhelníku. Většinou se nejdřív sestrojí trojúhelník ABC nebo ABD a čtvrtý vrchol se doplní; jindy pomohou úhlopříčky, které se půlí (u kosočtverce i kolmé), rovnoběžka ve vzdálenosti výšky, nebo u lichoběžníku pomocný trojúhelník po posunutí strany AD či úhlopříčky BD o vektor DC.

Množiny bodů jsou ve stejném formuláři: osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice a množina vrcholů úhlu dané velikosti nad úsečkou (dva oblouky souměrné podle úsečky). Každá se sestrojí kružítkem a pravítkem krok po kroku; rozbor vysvětlí, proč body leží právě tam.

Kružnice a tečny: tečny z bodu ke kružnici (body dotyku na Thaletově kružnici), společné tečny dvou kružnic (přes pomocné kružnice s poloměrem rozdílu a součtu poloměrů), kružnice daného poloměru dotýkající se ramen úhlu, kružnice bodem dotýkající se přímky a kružnice dvěma body. Diskuse podle vzájemné polohy určí počet řešení – například dvě kružnice mají čtyři, tři, dvě, jednu nebo žádnou společnou tečnu.

Úlohy se vztahy: zadaný útvar (úsečka AB, kružnice k a bod A, přímka p a bod A, kružnice k a přímka p, dvě různoběžky p, q) a dva vztahy, které má splňovat hledaný bod – nad úsečkou vrchol C trojúhelníku ABC, jinak bod X. Vztahy se vybírají v řádcích: z bodu je úsečka vidět pod úhlem (90° = Thaletova

kružnice), stejně daleko od dvou bodů nebo dvou přímek, vzdálenost od bodu nebo přímky, poměr vzdáleností od A a B (Apolloniova kružnice), leží na přímce či kružnici, přímka AX je tečnou ke k, střed kružnice o poloměru ϱ, která se dotýká k, a A je středem úsečky XY s Y na k nebo p (středová souměrnost). Každý vztah se převede na množinu bodů, hledaný bod je v jejich průniku; diskuse spočítá řešení (nad úsečkou v jedné polorovině, druhá dá shodné zrcadlové obrazy). Pod výsledkem jsou vzdálenosti hledaného bodu od zadaných bodů a přímek jako zkouška.

Obecné vztahy mezi více body (s kružnicí k nebo bez ní): body A až H se zadají řádky vztahů – bod leží na k, střed úsečky, tečna ke k, délka, poměr délek, kolmost, rovnoběžnost, bod na přímce, úhel a trojúhelník (jen co nakreslit). Vztahy se zapíšou jako rovnice v souřadnicích (střed S v počátku, první bod na ose x) a vyřeší přesně, s odmocninami. Výsledkem jsou délky mezi body (s kružnicí i jako násobky r), zkouška a počet řešení až na shodnost. Kde to jde, následuje školní postup konstrukce: každý bod na dvou množinách – zadaná kružnice, vzdálenost, přímka, tečna, střed, středová souměrnost – a vypočtené délky sestrojené jako přepona či odvěsna pravoúhlého trojúhelníku nebo podle Eukleidovy věty; řešení ukáže i mocnost bodu a úsekový úhel, když platí. Jinak poctivě jen výpočet a výsledný obrázek.

Řezy těles: krychle, kvádr, pravidelný hranol a jehlan s podstavou se 3 až 6 stranami (vrcholy ABC… a A'B'C'…, u jehlanu vrchol V) a pravidelný čtyřstěn ABCD. Rovinu řezu určují body X, Y, Z, každý na jednom řádku: AE=2 je bod na úsečce AE ve vzdálenosti 2 cm od A – úsečka může být hrana, úhlopříčka stěny i tělesa nebo osa SS' (S, S' jsou středy podstav) a vzdálenost větší než její délka dá bod na prodloužení; X: AB = 1:2 je bod X, který dělí úsečku AB v poměru 1 : 2. Pomocné body jde použít v dalších řádcích. Těleso je ve volném rovnoběžném promítání s neviditelnými hranami čárkovaně; pravidelný trojúhelník, pětiúhelník a šestiúhelník v podstavě se nejdřív narýsuje bokem ve skutečné velikosti a přenese do promítání. Řez vzniká po stranách podle školních pravidel: body v téže stěně se spojí, rovnoběžné stěny protne rovina v rovnoběžkách, průsečík přímky strany řezu s přímkou hrany (pomocný bod T) leží i v sousední stěně a přímku bodu uvnitř tělesa přeneseme do podstavy pomocnou svislou rovinou. Pod obrázkem je hotový řez v prostoru, který jde otáčet prstem.

Ukázky

Trojúhelník ze tří stran (sss).

Zadání: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

Výsledek

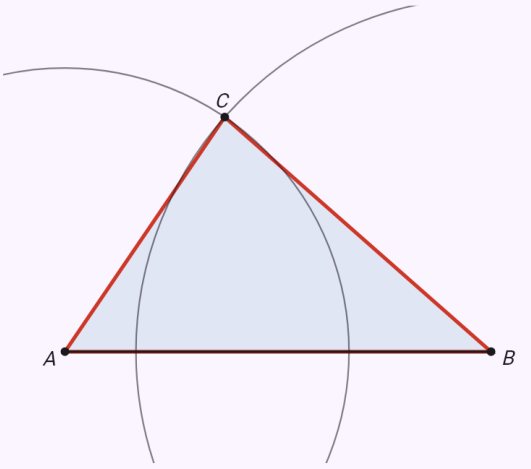
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice k se středem A a poloměrem b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – kružnice l se středem B a poloměrem a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – třetí vrchol je průsečíkem.
- 5. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: trojúhelníková nerovnost $a + b > c$ platí, kružnice se protínají. V jedné polorovině určené první stranou má úloha jedno řešení (v opačné je s ním shodný zrcadlový obraz).

Graf



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Dvě strany a úhel mezi nimi (sus).

Zadání: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

Výsledek

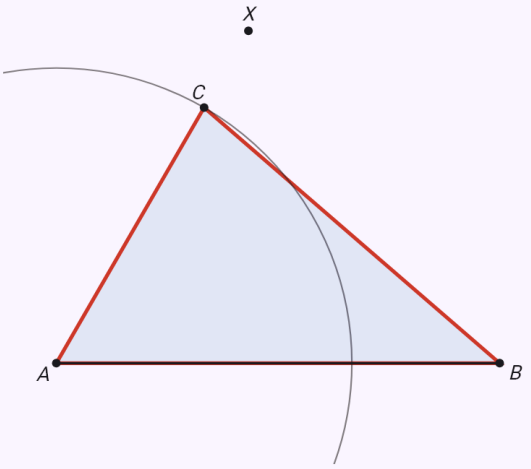
$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – sestrojíme úhel α, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice k se středem A a poloměrem b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – třetí vrchol je průsečíkem.
- 5. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v jedné polorovině určené první stranou má úloha jedno řešení (v opačné polorovině je s ním shodný zrcadlový obraz).

Graf



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Strana a dva úhly, z nichž jeden u strany neleží – třetí úhel se dopočítá (usu).

Zadání: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

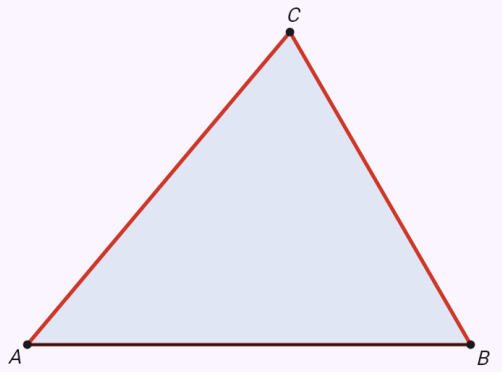
Výsledek

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- Třetí úhel dopočítáme ze součtu úhlů v trojúhelníku: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 50^\circ$ – sestrojíme úhel α, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 60^\circ$ – sestrojíme úhel β, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{BY}$
- 4. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – třetí vrchol je průsečíkem.
- 5. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v jedné polorovině určené první stranou má úloha jedno řešení (v opačné polorovině je s ním shodný zrcadlový obraz).

Graf



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Úhel proti kratší ze dvou stran – dvě řešení (Ssu).

Zadání: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Výsledek

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

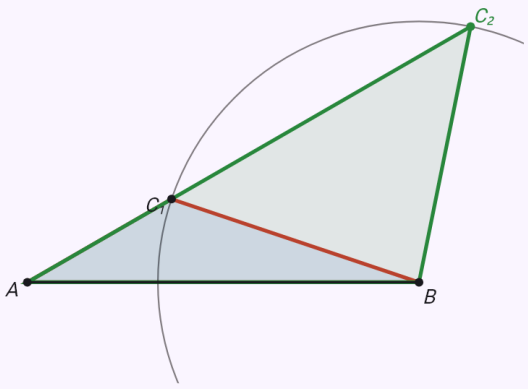
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – sestrojíme úhel α, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice k se středem B a poloměrem a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – průsečíky jsou dva, každý je třetím vrcholem jednoho trojúhelníku.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: kružnice protíná polopřímku ve dvou bodech – v jedné polorovině určené první stranou má úloha dvě řešení, dva různé trojúhelníky.

Graf



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Strany, které trojúhelníkovou nerovnost nesplňují.

Zadání: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

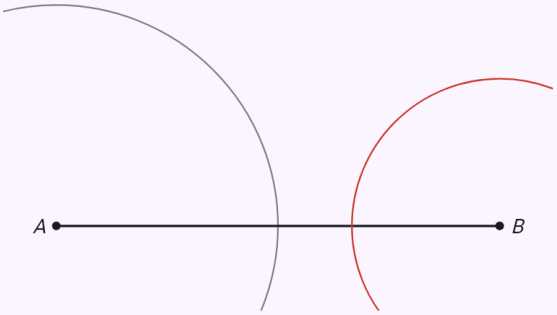
Výsledek

Útvar se zadanými prvky sestrojit nelze.

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – kružnice k se středem A a poloměrem b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – kružnice l se středem B a poloměrem a
- Diskuse: trojúhelníková nerovnost neplatí ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – kružnice se neprotínají a trojúhelník neexistuje.

Graf



Krok 3 z 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Strana c, výška a těžnice k ní – dvě řešení.

Zadání: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Výsledek

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

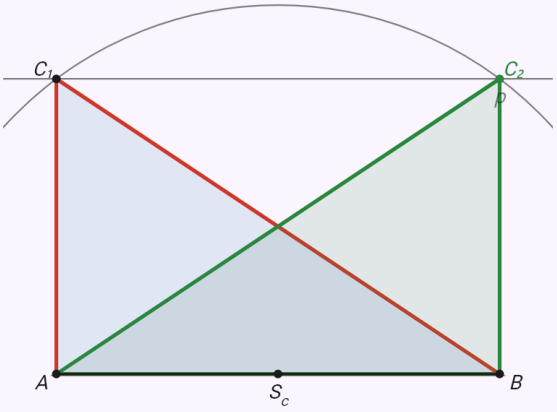
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – rovnoběžka p s AB ve vzdálenosti v_c
- 3. S_c; $S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – střed S_c úsečky AB (průsečík její osy s úsečkou).
- 4. k; $k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – kružnice k se středem S_c a poloměrem t_c
- 5. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – průsečíky jsou dva, každý je třetím vrcholem jednoho trojúhelníku.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v polorovině nad první stranou mají sestrojené množiny bodů 2 společné body – úloha má tolik řešení (v opačné polorovině jsou s nimi shodné zrcadlové obrazy).

Graf



Krok 6 z 6

6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Strana c, výška k ní a úhel proti ní – oblouk úhlu nad stranou.

Zadání: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Výsledek

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

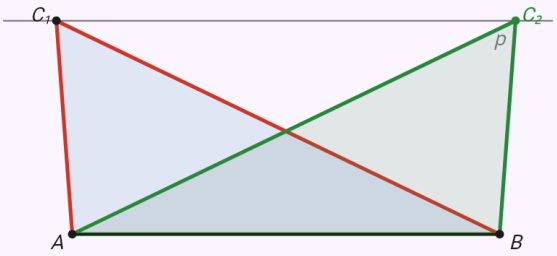
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – rovnoběžka p s AB ve vzdálenosti v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – oblouk k, ze kterého je úsečka AB vidět pod úhlem γ (sestrojený jako v úloze „Množina vrcholů úhlu“).
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – průsečíky jsou dva, každý je třetím vrcholem jednoho trojúhelníku.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v polorovině nad první stranou mají sestrojené množiny bodů 2 společné body – úloha má tolik řešení (v opačné polorovině jsou s nimi shodné zrcadlové obrazy).

Graf



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Strana, poloměr kružnice opsané a další strana – dvě kružnice opsané.

Zadání: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Výsledek

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

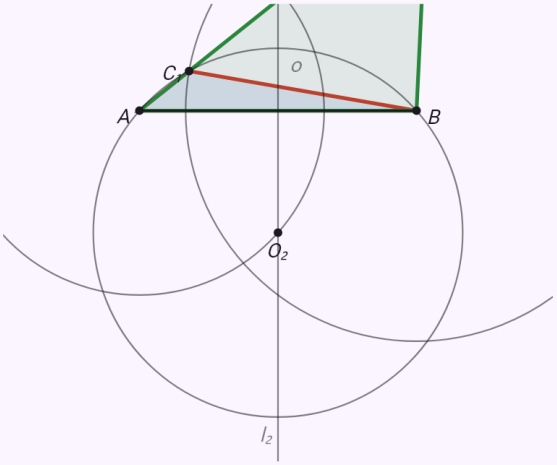
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – osa o úsečky AB, sestrojená jako v úloze „Osa úsečky“.
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice k se středem A a poloměrem r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – průsečíky O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – kružnice opsaná l_1, l_2 se středem O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – kružnice m se středem B a poloměrem a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – průsečíky jsou dva, každý je třetím vrcholem jednoho trojúhelníku.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v polorovině nad první stranou mají sestrojené množiny bodů 2 společné body – úloha má tolik řešení (v opačné polorovině jsou s nimi shodné zrcadlové obrazy).

Graf



Krok 8 z 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Dvě strany a výška z jejich společného vrcholu – výška se narýsuje první.

Zadání: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Výsledek

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

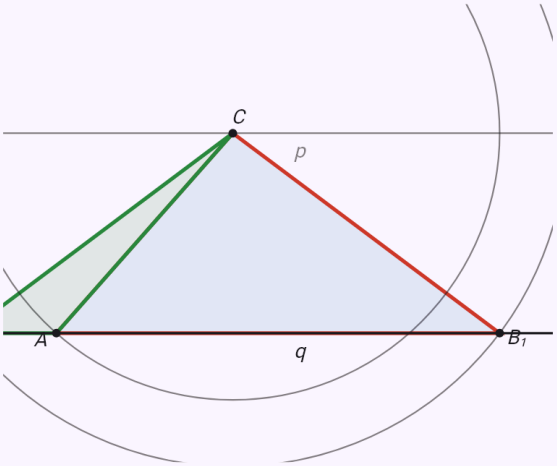
$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – libovolná přímka q, na které bude ležet strana AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – rovnoběžka p s q ve vzdálenosti v_c
- 3. C; $C \in p$ – libovolný bod C přímky p
- 4. k; $k(C;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice k se středem C a poloměrem b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – jeden z průsečíků, A (druhý dá shodný trojúhelník).
- 6. l; $l(C;\ 5\,\text{cm})$ – kružnice l se středem C a poloměrem a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – průsečíky jsou dva, každý je třetím vrcholem jednoho trojúhelníku.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – spojíme vrcholy.

- Diskuse: kružnice l protíná přímku q ve dvou bodech – úloha má dvě řešení, dva různé trojúhelníky (druhý průsečík kružnice k dá jen shodné).

Graf



Krok 8 z 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Strana, úhel u ní a poloměr kružnice vepsané – tečna z Thaletovy kružnice.

Zadání: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

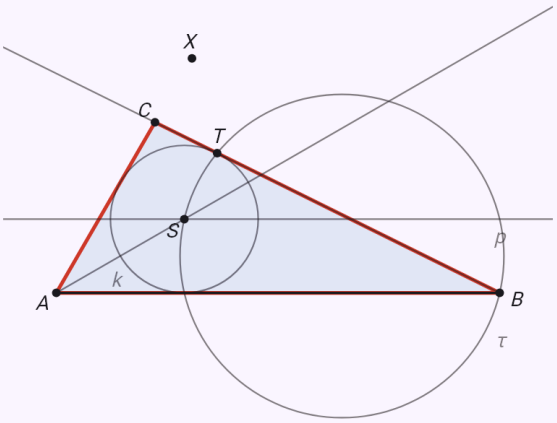
Výsledek

$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojúhelníku, zadané prvky jsou zvýrazněné – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60^\circ$ – sestrojíme úhel α, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{AX}$
- 3. o; $o = \overrightarrow{AY}$, $|\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – osa o úhlu α (sestrojená jako v úloze „Osa úhlu“); na ní leží střed kružnice vepsané.
- 4. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – rovnoběžka p s AB ve vzdálenosti ϱ
- 5. S; $S \in o \cap p$ – průsečík S
- 6. k; $k(S;\ \varrho)$ – kružnice vepsaná k se středem S
- 7. τ; $\tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – Thaletova kružnice τ nad úsečkou BS
- 8. T; $T \in \tau \cap k$ – bod dotyku T tečny z bodu B (druhý průsečík je bod dotyku na první straně).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – tečna z bodu B ke kružnici vepsané.
- 10. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – třetí vrchol je průsečíkem.
- 11. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v jedné polorovině určené první stranou má úloha jedno řešení (v opačné polorovině je s ním shodný zrcadlový obraz).

Graf



Krok 11 z 11
11. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Obdélník ze strany a úhlopříčky – pravý úhel u B.

Zadání: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

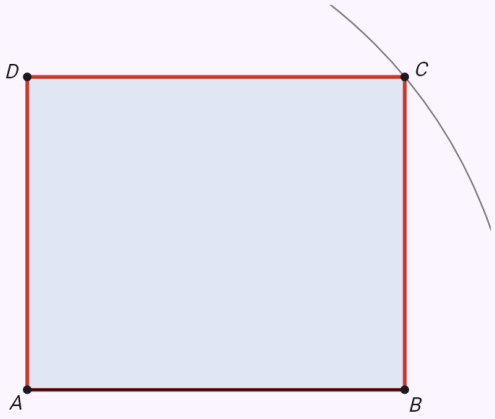
Výsledek

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): strana AB s dalšími zadanými prvky určuje trojúhelník ABC nebo ABD, který sestrojíme jako v úloze o trojúhelníku. Čtvrtý vrchol doplníme – protější strany rovnoběžníku jsou shodné a rovnoběžné.
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu a
- 2. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 90^\circ$ – sestrojíme úhel β, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{BY}$
- 3. $k;\ k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – kružnice k se středem A a poloměrem e
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – průsečík C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – čtvrtý vrchol D: protější strany jsou shodné, leží proto na kružnicích se středy C, A a poloměry $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: úloha má jedno řešení – každý další takový čtyřúhelník je s ním shodný.

Graf



Krok 6 z 6
6. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Kosočtverec z úhlopříček – vrcholy na ose úhlopříčky AC.

Zadání: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

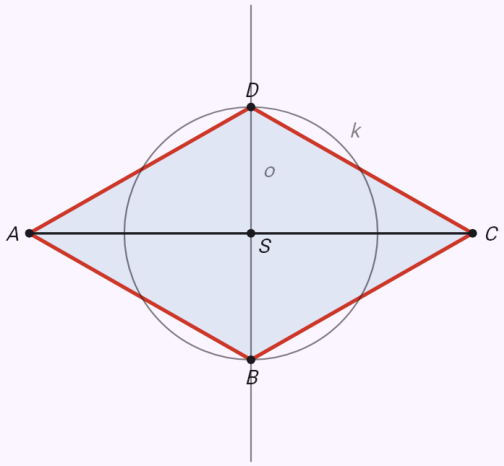
Výsledek

$$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$$
$$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$$
$$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): úhlopříčky čtverce a kosočtverce jsou na sebe kolmé a půlí se. Vrcholy B a D proto leží na ose úhlopříčky AC, v polovině druhé úhlopříčky od jejího středu S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – narýsujeme úhlopříčku AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – osa o úsečky AC, sestrojená jako v úloze „Osa úsečky“.
- 3. k; $k(S;\, 2\,\text{cm})$ – kružnice k se středem S a poloměrem $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – průsečíky B, D
- 5. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: úloha má jedno řešení – každý další takový čtyřúhelník je s ním shodný.

Graf



Krok 5 z 5
5. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Rovnoběžník ze dvou stran a úhlopříčky – nejdřív trojúhelník ABC.

Zadání: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

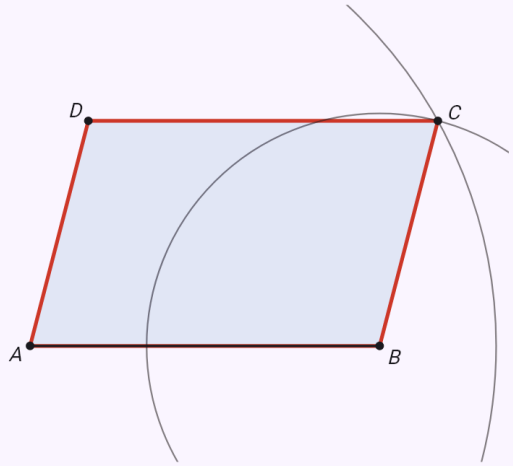
Výsledek

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): strana AB s dalšími zadanými prvky určuje trojúhelník ABC nebo ABD, který sestrojíme jako v úloze o trojúhelníku. Čtvrtý vrchol doplníme – protější strany rovnoběžníku jsou shodné a rovnoběžné.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu a
- 2. k; $k(A;\ 8\,\text{cm})$ – kružnice k se středem A a poloměrem e
- 3. l; $l(B;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice l se středem B a poloměrem b
- 4. C; $C \in k \cap l$ – průsečík C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – čtvrtý vrchol D: protější strany jsou shodné, leží proto na kružnicích se středy C, A a poloměry $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: úloha má jedno řešení – každý další takový čtyřúhelník je s ním shodný.

Graf



Krok 6 z 6
6. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Lichoběžník ze čtyř stran – pomocný trojúhelník EBC.

Zadání: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

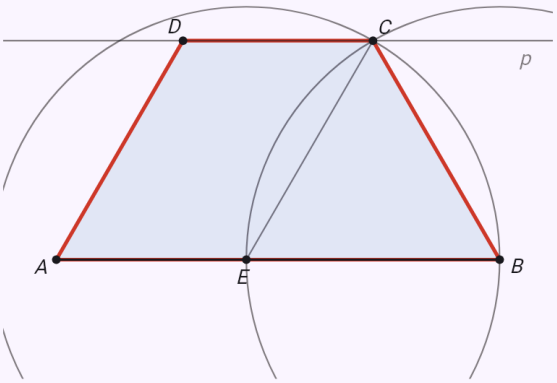
Výsledek

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): posuneme-li stranu AD o vektor DC, vznikne trojúhelník EBC, kde E leží na AB a |AE| = c. Jeho strany jsou |EB| = a – c, |BC| = b, |EC| = d a úhly u E a B jsou α a β. Ten sestrojíme a vrchol D doplníme na rovnoběžce s AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – bod E ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice k se středem E a poloměrem d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – kružnice l se středem B a poloměrem b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – průsečík C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – vrchol D na rovnoběžce s AB vedené bodem C, ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od něj.
- 7. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: úloha má jedno řešení – každý další takový čtyřúhelník je s ním shodný.

Graf



Krok 7 z 7
7. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Lichoběžník ze tří stran a úhlu – dvě řešení.

Zadání: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Výsledek

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

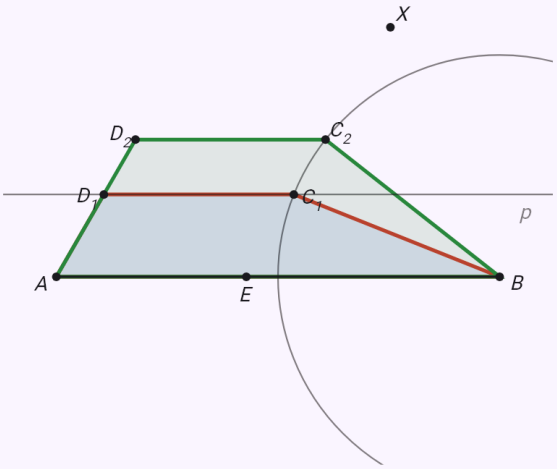
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Postup

- Rozbor ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): posuneme-li stranu AD o vektor DC, vznikne trojúhelník EBC, kde E leží na AB a |AE| = c. Jeho strany jsou |EB| = a – c, |BC| = b, |EC| = d a úhly u E a B jsou α a β. Ten sestrojíme a vrchol D doplníme na rovnoběžce s AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – narýsujeme stranu a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – bod E ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – sestrojíme úhel α, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – kružnice k se středem B a poloměrem b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – průsečíky C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – vrchol D_1 na rovnoběžce s AB vedené bodem C_1, ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od něj.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – vrchol D_2 na rovnoběžce s AB vedené bodem C_2, ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od něj.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: průsečíky jsou dva – úloha má dvě řešení, dva různé čtyřúhelníky.

Graf



Krok 8 z 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Osa úsečky AB dlouhé 6 cm.

Zadání: `construction(segment_bisector; d=6)`

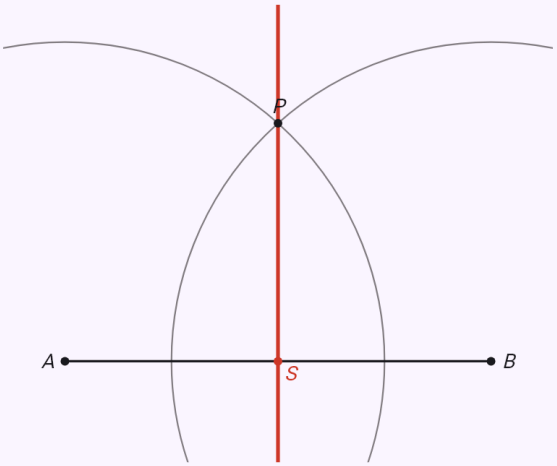
Výsledek

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm}$): bod X, který má od A a B stejnou vzdálenost, je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ABX – leží na kolmici k AB procházející jejím středem, na ose úsečky.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme úsečku AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – kružnice k se středem A a poloměrem $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – kružnice l se středem B a stejným poloměrem.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – průsečíky P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – přímka o je osa úsečky: množina všech bodů, které mají od A a B stejnou vzdálenost.

Graf



Krok 5 z 5

$5.\ o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Osa úhlu 70°.

Zadání: `construction(angle_bisector; phi=70)`

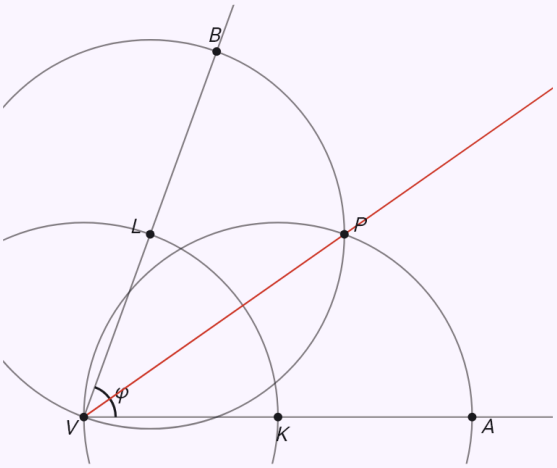
Výsledek

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Postup

- Rozbor ($|\angle AVB| = 70^\circ$): bod uvnitř úhlu, který má od obou ramen stejnou vzdálenost, leží na polopřímce, která úhel půlí – na ose úhlu.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – narýsujeme úhel $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – kružnice k se středem V a libovolným poloměrem.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – průsečíky K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – kružnice m se středem K a poloměrem $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – kružnice n se středem L a stejným poloměrem.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – průsečík P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – polopřímka o je osa úhlu: půlí ho a její body mají od obou ramen stejnou vzdálenost.

Graf



Krok 7 z 7

$7.\ o;\ o = \overrightarrow{VP}$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Thaletova kružnice nad úsečkou 5 cm.

Zadání: `construction(thales; d=5)`

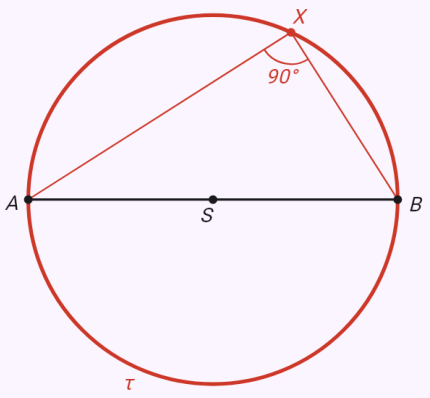
Výsledek

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$): podle Thaletovy věty je úhel AXB pravý právě tehdy, když X leží na kružnici s průměrem AB (kromě bodů A a B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – narýsujeme úsečku AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – střed S úsečky AB (průsečík její osy s úsečkou).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – Thaletova kružnice τ se středem S a poloměrem $\frac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; bez bodů A a B je to hledaná množina.

Graf



Krok 3 z 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Body, ze kterých je úsečka 6 cm vidět pod úhlem 60°.

Zadání: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

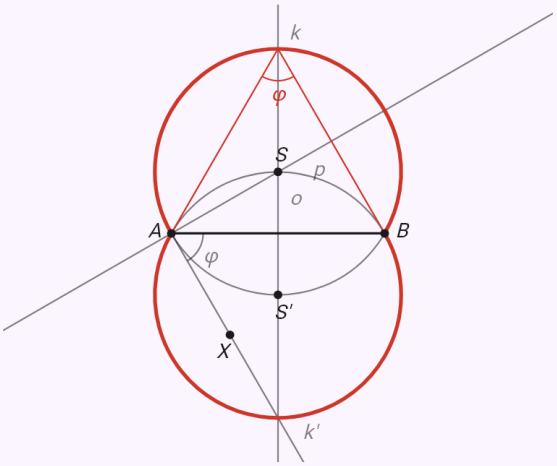
Výsledek

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60°$): body X, ze kterých je AB vidět pod úhlem φ, leží na dvou obloucích souměrných podle AB. Obvodový úhel nad tětivou AB je roven úsekovému úhlu, který AB svírá s tečnou v bodě A – střed oblouku leží na ose AB a na kolmici k tečně v A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme úsečku AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – osa o úsečky AB, sestrojená jako v úloze „Osa úsečky“.
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60°$ – sestrojíme úhel φ, jeho ramenem je polopřímka $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – kolmice p k polopřímce $\overrightarrow{AX}$ v bodě A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – průsečík S
- 6. k; $k(S; |SA|)$ – kružnice k se středem S a poloměrem $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – kružnice k' souměrná s k podle přímky AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – oblouky kružnic nad úsečkou AB (bez bodů A a B) jsou hledaná množina: z každého jejich bodu je AB vidět pod úhlem φ

Graf



Krok 8 z 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Tečny z bodu ve vzdálenosti 5 cm ke kružnici s poloměrem 3 cm.

Zadání: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Výsledek

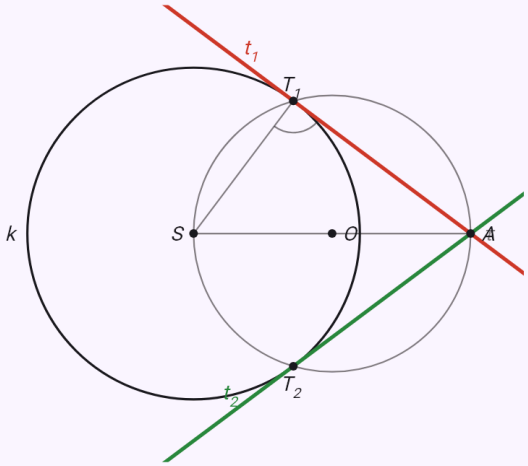
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\mathrm{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Postup

- Rozbor ($r = 3\,\mathrm{cm},\ |SA| = 5\,\mathrm{cm}$): tečna je kolmá k poloměru v bodě dotyku T, úhel STA je tedy pravý. Body dotyku proto leží na Thaletově kružnici nad úsečkou SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\mathrm{cm})$ – kružnice k se středem S a poloměrem $3\,\mathrm{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\mathrm{cm}$ – bod A ve vzdálenosti $5\,\mathrm{cm}$ od S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – střed O úsečky SA (průsečík její osy s úsečkou).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – Thaletova kružnice τ nad úsečkou SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – body dotyku T_1, T_2 jsou průsečíky kružnic k a τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – tečny t_1, t_2 z bodu A
- Diskuse: bod A leží vně kružnice – vedou z něj dvě tečny, souměrné podle přímky SA.

Graf



Krok 6 z 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Čtyři společné tečny dvou kružnic, které leží vně sebe.

Zadání: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

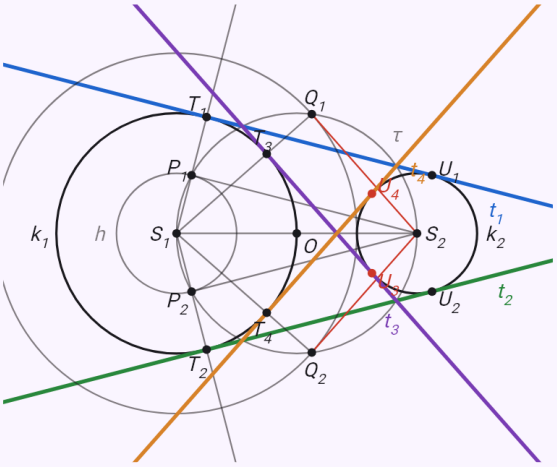
Výsledek

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): posuneme-li vnější tečnu rovnoběžně o menší poloměr ke středům, dotýká se pomocné kružnice se středem větší kružnice a poloměrem $|r_1 - r_2|$ a prochází středem menší. U vnitřní tečny má pomocná kružnice poloměr $r_1 + r_2$. Tečny ze středu k pomocné kružnici sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice nad spojnicí středů.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – kružnice k_1 se středem S_1 a poloměrem $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – kružnice k_2 se středem S_2 a poloměrem $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – střed O úsečky S_1S_2 (průsečík její osy s úsečkou).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – Thaletova kružnice τ nad úsečkou S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – pomocná kružnice h se středem S_1 a poloměrem rovným rozdílu poloměrů, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – průsečíky P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – body dotyku T_1, T_2 jsou průsečíky $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ s kružnicí k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – vnější společné tečny t_1, t_2 vedené body T_1, T_2 rovnoběžně s S_2P_1, S_2P_2; dotýkají se i druhé kružnice.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – pomocná kružnice h' se středem S_1 a poloměrem rovným součtu poloměrů, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – průsečíky Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – body dotyku T_3, T_4 jsou průsečíky S_1Q_1, S_1Q_2 s kružnicí k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – vnitřní společné tečny t_3, t_4 vedené body T_3, T_4 rovnoběžně s S_2Q_1, S_2Q_2
- Diskuse: kružnice leží vně sebe ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – mají dvě vnější a dvě vnitřní společné tečny.

Graf



Krok 12 z 12

12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Kružnice s poloměrem 2 cm dotýkající se ramen úhlu 60°.

Zadání: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Výsledek

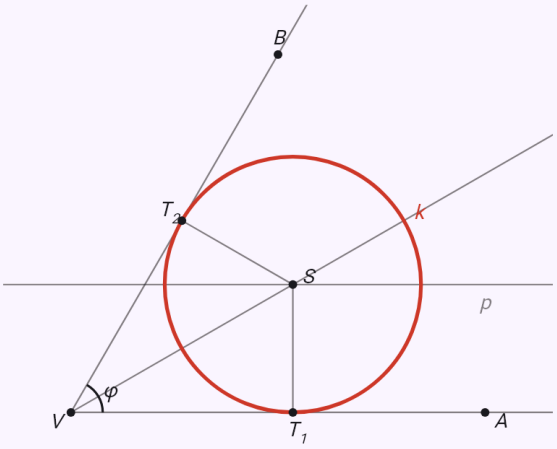
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\text{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($\varphi = 60°,\ r = 2\,\text{cm}$): střed kružnice má od obou ramen vzdálenost r – leží na ose úhlu a zároveň na rovnoběžce s ramenem ve vzdálenosti r. Body dotyku jsou paty kolmic ze středu na ramena.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60°$ – narýsujeme úhel $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – osa o úhlu $\angle AVB$ (sestrojená jako v úloze „Osa úhlu“); její body mají od obou ramen stejnou vzdálenost.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\text{cm}$ – rovnoběžka p s VA ve vzdálenosti r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – průsečík S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – body dotyku T_1, T_2 jsou paty kolmic ze středu S na VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – hledaná kružnice k se středem S a poloměrem $2\,\text{cm}$
- Diskuse: osa úhlu a rovnoběžka se protnou vždy v jediném bodě – úloha má jedno řešení.

Graf



Krok 6 z 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Kružnice bodem dotýkající se přímky – dvě řešení.

Zadání: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Výsledek

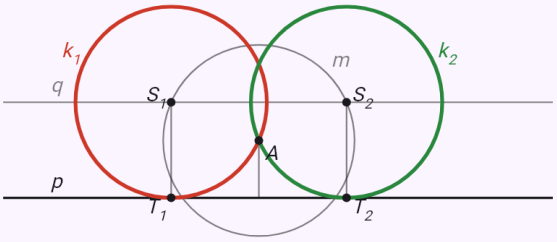
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): střed kružnice má od přímky p vzdálenost r, leží tedy na rovnoběžce q s p ve vzdálenosti r na straně bodu A. Od bodu A má také vzdálenost r, leží tedy i na kružnici m(A; r).
- 1. p – libovolná přímka p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – bod A ve vzdálenosti $1{,}5\,\text{cm}$ od p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – rovnoběžka q s p ve vzdálenosti r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – kružnice m se středem A a poloměrem $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – průsečíky S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – body dotyku T_1, T_2 jsou paty kolmic ze středu S_1, S_2 na p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – hledané kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2 a poloměrem $2{,}5\,\text{cm}$
- Diskuse: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – kružnice m protíná rovnoběžku q ve dvou bodech, úloha má dvě řešení.

Graf



Krok 7 z 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Kružnice dvěma body s daným poloměrem – dvě řešení souměrná podle AB.

Zadání: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Výsledek

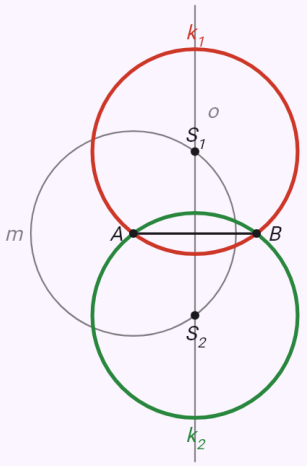
$$k_1(S_1;\ 5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\ 5\,\mathrm{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\mathrm{cm},\ r = 5\,\mathrm{cm}$): střed kružnice má od A i od B vzdálenost r – leží na ose úsečky AB a na kružnici m(A; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – narýsujeme úsečku AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – osa o úsečky AB, sestrojená jako v úloze „Osa úsečky“.
- 3. $m;\ m(A;\ 5\,\mathrm{cm})$ – kružnice m se středem A a poloměrem $5\,\mathrm{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – průsečíky S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\ 5\,\mathrm{cm})$ – hledané kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2 a poloměrem $5\,\mathrm{cm}$
- Diskuse: $|AB| = 6\,\mathrm{cm} < 2r = 10\,\mathrm{cm}$ – kružnice m protíná osu ve dvou bodech, úloha má dvě řešení souměrná podle AB.

Graf



Krok 5 z 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\ 5\,\mathrm{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Vrchol C, ze kterého je AB vidět pod úhlem 60°, ve výšce 3 cm – oblouky a rovnoběžky.

Zadání: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Výsledek

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

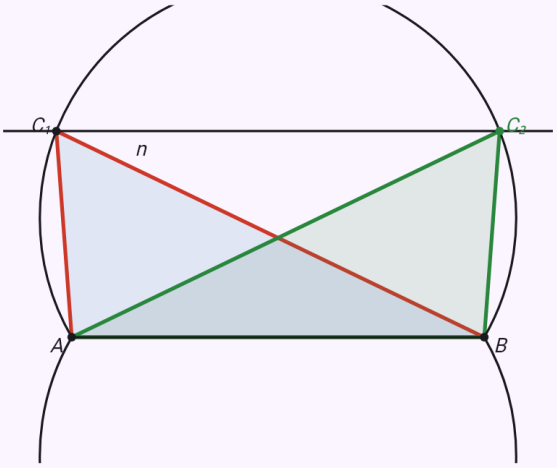
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm}$): náčrt hotového trojúhelníku ABC, zadané vztahy jsou zvýrazněné. Každý ze dvou vztahů určuje množinu bodů, na které vrchol C leží – C je proto v jejich průniku.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme zadanou úsečku AB.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – body, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem 60°, leží na dvou obloucích m, m' souměrných podle AB (sestrojených jako v úloze „Množina vrcholů úhlu“).
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – body ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od přímky AB leží na dvou rovnoběžkách n, n' s ní, po jedné na každé straně.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – hledané body jsou průsečíky obou množin.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v polorovině nad AB je počet společných bodů množin 2 – úloha má 2 řešení (v opačné polorovině jsou s nimi shodné zrcadlové obrazy).

Graf



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Poměr |AC| : |BC| = 2 a |BC| = 3 cm – Apolloniova kružnice.

Zadání: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

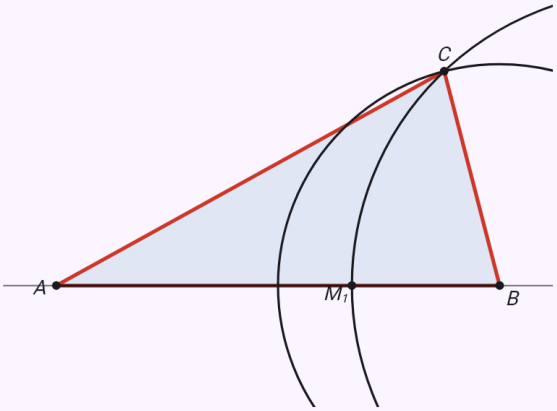
Výsledek

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm}$): náčrt hotového trojúhelníku ABC, zadané vztahy jsou zvýrazněné. Každý ze dvou vztahů určuje množinu bodů, na které vrchol C leží – C je proto v jejich průniku.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme zadanou úsečku AB.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – body, jejichž vzdálenosti od krajních bodů úsečky AB jsou v poměru 2, leží na Apolloniově kružnici. Nejdřív sestrojíme body M_1 (uvnitř úsečky) a M_2 (na jejím prodloužení), které dělí AB v tomto poměru.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – Apolloniova kružnice m je Thaletova kružnice nad průměrem M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – body ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od bodu B leží na kružnici n se středem B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – hledaný bod je průsečíkem obou množin.
- 6. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskuse: v polorovině nad AB mají množiny jeden společný bod – úloha má jedno řešení (v opačné polorovině je s ním shodný zrcadlový obraz).

Graf



Krok 6 z 6
6. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Body dotyku tečen z bodu A – AX tečnou a X na kružnici.

Zadání: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

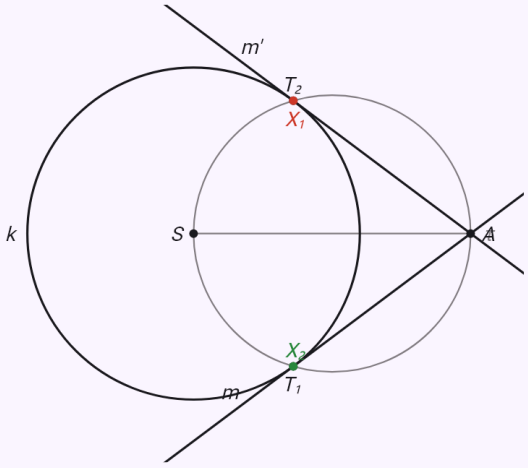
Výsledek

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm}, \ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm}, \ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$): náčrt se zadanou kružnicí k, bodem A a hledaným bodem X, zadané vztahy jsou zvýrazněné. Každý ze dvou vztahů určuje množinu bodů – X leží v jejich průniku.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – narýsujeme zadanou kružnici k a bod A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – přímka AX má být tečnou ke k: body dotyku leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1},\ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ protne k v bodech dotyku T_1, T_2, tečny m, m' jimi procházejí.
- Bod X má ležet na kružnici k – množinou bodů je sama kružnice k, je už narýsovaná.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – hledané body jsou průsečíky obou množin.
- Diskuse: počet společných bodů množin je 2 – úloha má 2 řešení.

Graf



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Středy kružnic s poloměrem 1 cm, které se dotýkají kružnice k i přímky p.

Zadání: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

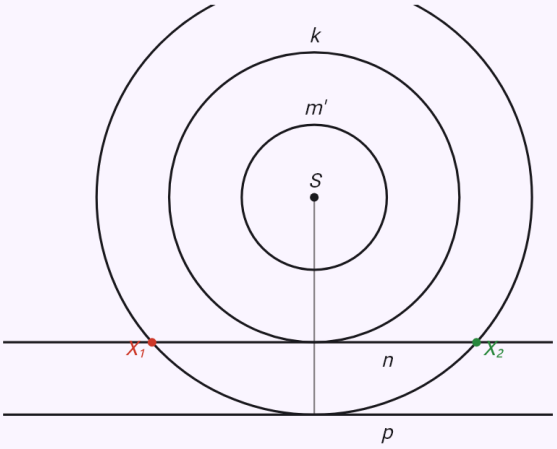
Výsledek

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor $(k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm})$: náčrt se zadanou kružnicí k, přímkou p a hledaným bodem X, zadané vztahy jsou zvýrazněné. Každý ze dvou vztahů určuje množinu bodů – X leží v jejich průniku.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – narýsujeme zadanou kružnici k a přímku p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – kružnice o poloměru $1\,\text{cm}$ se dotýká k zvenku, když má střed ve vzdálenosti r + ϱ od S, a zevnitř ve vzdálenosti |r − ϱ|: středy leží na kružnicích m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – body ve vzdálenosti $1\,\text{cm}$ od přímky p leží na dvou rovnoběžkách n, n' s ní, po jedné na každé straně.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – hledané body jsou průsečíky obou množin.
- Diskuse: počet společných bodů množin je 2 – úloha má 2 řešení.

Graf



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Středy kružnic s poloměrem 1,5 cm dotýkajících se dvou různoběžek – čtyři řešení.

Zadání: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

Výsledek

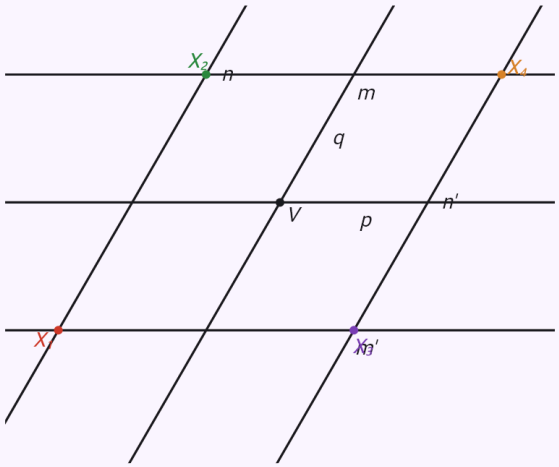
$$X_1:\ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2:\ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3:\ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4:\ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|\angle(p,q)| = 60°$): náčrt se zadanými přímkami p, q a hledaným bodem X, zadané vztahy jsou zvýrazněné. Každý ze dvou vztahů určuje množinu bodů – X leží v jejich průniku.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60°$ – narýsujeme zadané přímky p, q protínající se v bodě V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – body ve vzdálenosti $1{,}5\,\text{cm}$ od přímky p leží na dvou rovnoběžkách m, m' s ní, po jedné na každé straně.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – body ve vzdálenosti $1{,}5\,\text{cm}$ od přímky q leží na dvou rovnoběžkách n, n' s ní, po jedné na každé straně.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – hledané body jsou průsečíky obou množin.
- Diskuse: počet společných bodů množin je 4 – úloha má

4 řešení.

Graf



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Kružnice k(S; 2 cm), AC tečna, k opsaná ABD, D střed BC, |AC| = 2|AD| – vyjde |AD| = r√7/2.

Zadání: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1; tangent_AC=1;`

```
ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)
```

Výsledek

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

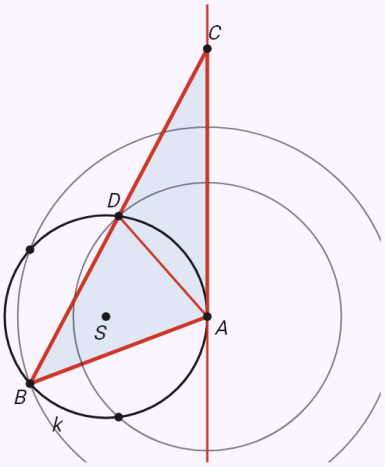
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Postup

- Rozbor ($k(S;\,2\,\text{cm})$): vztahy zapíšeme v souřadnicích. Střed S kružnice dáme do počátku a bod A na kladnou poloosu x, A = [r; 0] – otočením lze každé řešení do této polohy dostat. Neznámé jsou souřadnice ostatních bodů.
- Bod leží na kružnici k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- Bod leží na kružnici k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- Bod leží na kružnici k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- Střed úsečky ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$
- Přímka $\overleftrightarrow{AC}$ je tečnou ke k – její vzdálenost od středu S je r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- Poměr délek ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ je výsledný útvar – jeho vrcholy nesmí ležet v jedné přímce.
- Soustavu rovnic vyřešíme přesně (bez zaokrouhlení). Počet různých poloh bodů, které jí vyhovují (bez splývajících bodů): 2, až na shodnost 1
- Zkouška: dosazením řešení do původních vztahů platí všechny.
- Z řešení: mocnost bodu C ke kružnici k – druhá mocnina tečny je rovna součinu úseků sečny: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- Z řešení: úsekový úhel tečny a tětivy AD je roven obvodovému úhlu nad touto tětivou: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41°$
- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – narýsujeme zadanou kružnici k.
- 2. A; $A \in k$ – libovolný bod A kružnice k.
- Délku $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ sestrojíme jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s danou přeponou: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – bod B je jedním z průsečíků obou množin (počet průsečíků: 2).
- Délku $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ sestrojíme jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s danou přeponou: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – bod D je jedním z průsečíků obou množin (počet průsečíků: 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – bod C souměrný s B podle středu D (středová souměrnost).
- 6. $\triangle ABC$ – hotový útvar.
- Diskuse: počet poloh bodů, které vztahům vyhovují: 2; všechny jsou navzájem shodné (souměrné) – až na shodnost má úloha jedno řešení.

Graf



Krok 6 z 6
6. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Pravoúhlý trojúhelník bez kružnice: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, pravý úhel u C.

Zadání: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

Výsledek

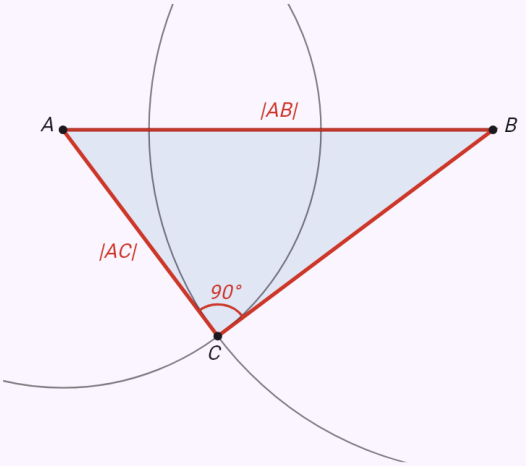
$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor: vztahy zapíšeme v souřadnicích. Bod A dáme do počátku a bod B na kladnou poloosu x – posunutím a otočením lze každé řešení do této polohy dostat. Neznámé jsou souřadnice ostatních bodů.
- Délka úsečky ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- Délka úsečky ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- Úhel ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ je výsledný útvar – jeho vrcholy nesmí ležet v jedné přímce.
- Soustavu rovnic vyřešíme přesně (bez zaokrouhlení). Počet různých poloh bodů, které jí vyhovují (bez splývajících bodů): 2, až na shodnost 1
- Zkouška: dosazením řešení do původních vztahů platí všechny.
- 1. A – libovolný bod A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – bod B ve vypočtené vzdálenosti od A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – bod C je jedním z průsečíků obou množin (počet průsečíků: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – hotový útvar.

- Diskuse: počet poloh bodů, které vztahům vyhovují: 2; všechny jsou navzájem shodné (souměrné) – až na shodnost má úloha jedno řešení.

Graf



Krok 4 z 4
4. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez krychle – protější stěny v rovnoběžkách.

Zadání: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

Výsledek

$$XYZK$$

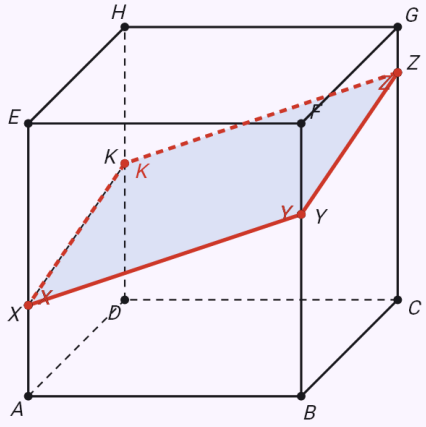
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách podle tří pravidel: dva body řezu v téže stěně spojíme; rovnoběžné stěny protne rovina řezu v rovnoběžných úsečkách; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme krychli $ABCDEFGH$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – bod X na hraně AE ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – bod Y na hraně BF ve vzdálenosti $4\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – bod Z na hraně CG ve vzdálenosti $5\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 5. XY – body X, Y leží ve stěně $ABFE$, spojíme je.
- 6. YZ – body Y, Z leží ve stěně $BCGF$, spojíme je.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – stěna $CDHG$ je rovnoběžná se stěnou $ABFE$, řez ji protne v rovnoběžce s YX vedené bodem Z; ta protne hranu DH v bodě K
- 8. XK – body X, K leží ve stěně $ADHE$, spojíme je.
- 9. $XYZK$ – řezem je čtyřúhelník $XYZK$

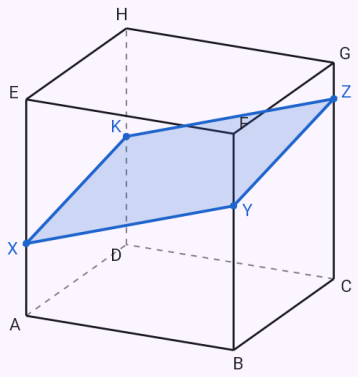
Graf



Krok 9 z 9
9. $XYZK$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Pravidelný šestiúhelník středy hran – pomocný bod T_1.

Zadání: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Výsledek

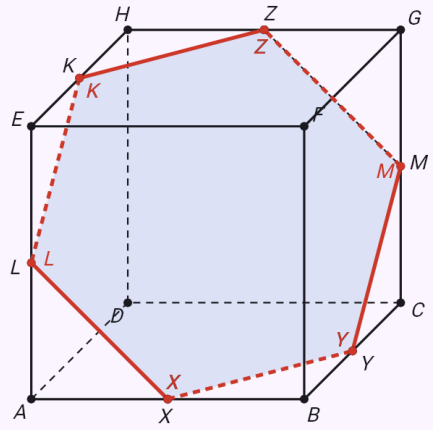
$$XYMZKL$$

$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách podle tří pravidel: dva body řezu v téže stěně spojíme; rovnoběžné stěny protne rovina řezu v rovnoběžných úsečkách; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme krychli $ABCDEFGH$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – bod X na hraně AB ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – bod Y na hraně BC ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – bod Z na hraně GH ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu G
- 5. XY – body X, Y leží ve stěně $ABCD$, spojíme je.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – stěna $EFGH$ je rovnoběžná se stěnou $ABCD$, řez ji protne v rovnoběžce s XY vedené bodem Z; ta protne hranu EH v bodě K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – prodloužíme stranu ZK a hranu EF; jejich průsečík T_1 leží v rovině stěny $EFGH$ i stěny $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – přímka XT_1 leží v rovině stěny $ABFE$; protne hranu AE v bodě L
- 9. KL – body K, L leží ve stěně $ADHE$, spojíme je.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – stěna $CDHG$ je rovnoběžná se stěnou $ABFE$, řez ji protne v rovnoběžce s XL vedené bodem Z; ta protne hranu CG v bodě M
- 11. YM – body Y, M leží ve stěně $BCGF$, spojíme je.
- 12. $XYMZKL$ – řezem je šestiúhelník $XYMZKL$

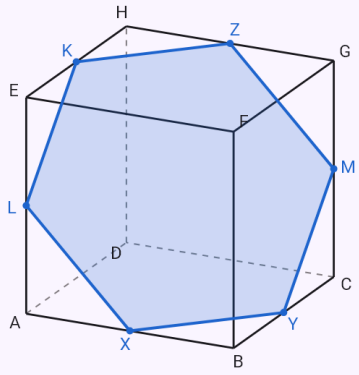
Graf



Krok 12 z 12
12. $XYMZKL$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Řez jehlanu rovinou středů dvou bočních hran a podstavné hrany.

Zadání: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

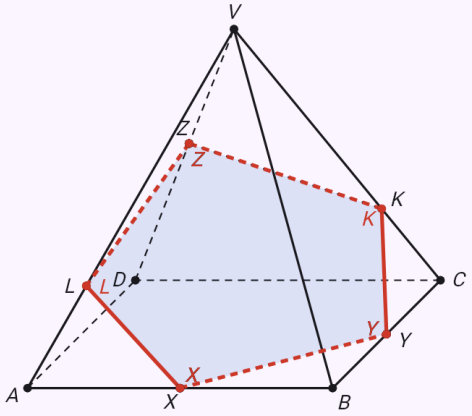
Výsledek

$$XYKZL$$
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$
$$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$$
$$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách: dva body řezu v téže stěně spojíme; je-li strana řezu rovnoběžná s hranou jiné stěny, protne rovina tuto stěnu v rovnoběžce s ní; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDV$; $a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 2. X; $X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – bod X na hraně AB ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. Y; $Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – bod Y na hraně BC ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. Z; $Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – bod Z na hraně DV ve vzdálenosti $4\,\text{cm}$ od vrcholu D
- 5. XY – body X, Y leží ve stěně $ABCD$, spojíme je.
- 6. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – prodloužíme stranu XY a hranu CD; jejich průsečík T_1 leží v rovině stěny $ABCD$ i stěny CDV
- 7. ZK; $K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – přímka ZT_1 leží v rovině stěny CDV; protne hranu CV v bodě K
- 8. YK – body Y, K leží ve stěně BCV, spojíme je.
- 9. T_2; $T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – prodloužíme stranu YK a hranu BV; jejich průsečík T_2 leží v rovině stěny BCV i stěny ABV
- 10. XL; $L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – přímka XT_2 leží v rovině stěny ABV; protne hranu AV v bodě L
- 11. ZL – body Z, L leží ve stěně DAV, spojíme je.
- 12. $XYKZL$ – řezem je pětiúhelník $XYKZL$

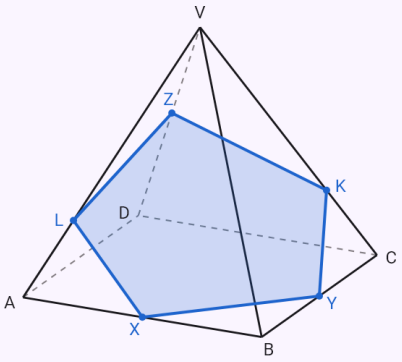
Graf



Krok 12 z 12
12. $XYKZL$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Bod na prodloužení hrany – Y 2 cm za vrcholem B.

Zadání: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Výsledek

$$XLKZM$$

$$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$

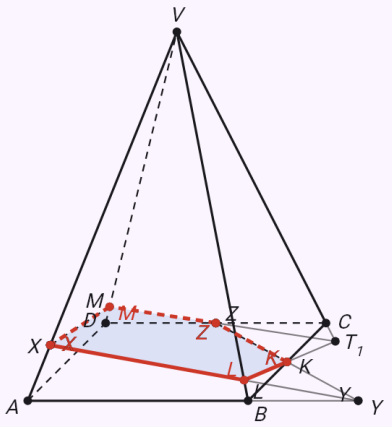
$$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$

$$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách: dva body řezu v téže stěně spojíme; je-li strana řezu rovnoběžná s hranou jiné stěny, protne rovina tuto stěnu v rovnoběžce s ní; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDV$; $a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 2. X; $X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – bod X na hraně AV ve vzdálenosti $1\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. Y; $Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – bod Y na polopřímce AB ve vzdálenosti $6\,\text{cm}$ od vrcholu A, za vrcholem B – mimo těleso.
- 4. Z; $Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – bod Z na hraně CD ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 5. ZK; $ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – body YZ leží v rovině stěny $ABCD$; jejich spojnice protne stěnu v úsečce ZK
- 6. XL; $XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – body XY leží v rovině stěny ABV; jejich spojnice protne stěnu v úsečce XL
- 7. KL – body K, L leží ve stěně BCV, spojíme je.
- 8. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – prodloužíme stranu KL a hranu CV; jejich průsečík T_1 leží v rovině stěny BCV i stěny CDV
- 9. ZM; $M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – přímka ZT_1 leží v rovině stěny CDV; protne hranu DV v bodě M
- 10. XM – body X, M leží ve stěně DAV, spojíme je.
- 11. $XLKZM$ – řezem je pětiúhelník $XLKZM$

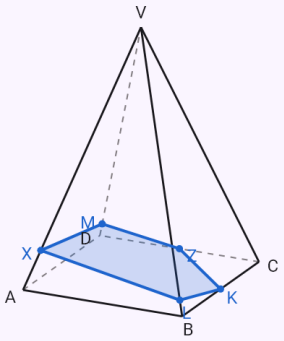
Graf



Krok 11 z 11
11. $XLKZM$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Bod uvnitř tělesa na tělesové úhlopříčce – pomocná svislá rovina.

Zadání: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Výsledek

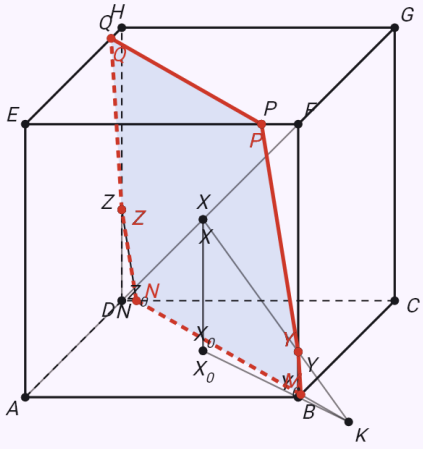
$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$
$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách podle tří pravidel: dva body řezu v téže stěně spojíme; rovnoběžné stěny protne rovina řezu v rovnoběžných úsečkách; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme krychli $ABCDEFGH$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – bod X na úsečce AG ve vzdálenosti $5\,\text{cm}$ od bodu A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – bod Y na hraně BF ve vzdálenosti $1\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – bod Z na hraně DH ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – bod X leží uvnitř tělesa, proto použijeme pomocnou svislou rovinu přímky XY: body promítneme do podstavy (X_0Y_0) a průsečík přímek XY a X_0Y_0 je bod K, v němž přímka XY protíná rovinu podstavy $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – bod X leží uvnitř tělesa, proto použijeme pomocnou svislou rovinu přímky XZ: body promítneme do podstavy (X_0Z_0) a průsečík přímek XZ a X_0Z_0 je bod L, v němž přímka XZ protíná rovinu podstavy $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – body KL leží v rovině stěny $ABCD$; jejich spojnice protne stěnu v úsečce MN
- 8. ZN – body Z, N leží ve stěně $CDHG$, spojíme je.
- 9. YM – body Y, M leží ve stěně $BCGF$, spojíme je.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – stěna $ABFE$ je rovnoběžná se stěnou $CDHG$, řez ji protne v rovnoběžce s NZ vedené bodem Y; ta protne hranu EF v bodě P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – stěna $EFGH$ je rovnoběžná se stěnou $ABCD$, řez ji protne v rovnoběžce s MN vedené bodem P; ta protne hranu EH v bodě Q
- 12. ZQ – body Z, Q leží ve stěně $ADHE$, spojíme je.
- 13. $QPYMNZ$ – řezem je šestiúhelník $QPYMNZ$

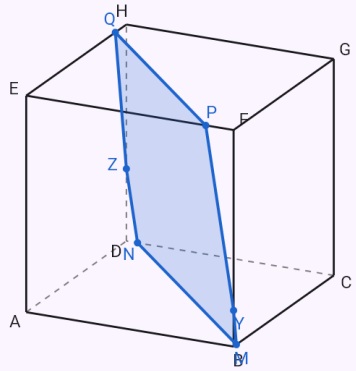
Graf



Krok 13 z 13
13. $QPYMNZ$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Bod X dělí hranu AB v poměru 1 : 2.

Zadání: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

Výsledek

$$XYZK$$

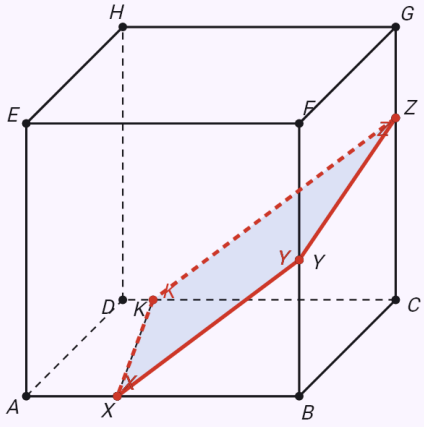
$$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách podle tří pravidel: dva body řezu v téže stěně spojíme; rovnoběžné stěny protne rovina řezu v rovnoběžných úsečkách; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narýsujeme krychli $ABCDEFGH$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – bod X dělí úsečku AB v poměru $1 : 2$; tím je dán bod X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – bod Y na hraně BF ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – bod Z na hraně CG ve vzdálenosti $4\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 5. XY – body X, Y leží ve stěně $ABFE$, spojíme je.
- 6. YZ – body Y, Z leží ve stěně $BCGF$, spojíme je.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – stěna $CDHG$ je rovnoběžná se stěnou $ABFE$, řez ji protne v rovnoběžce s XY vedené bodem Z; ta protne hranu CD v bodě K
- 8. XK – body X, K leží ve stěně $ABCD$, spojíme je.
- 9. $XYZK$ – řezem je čtyřúhelník $XYZK$

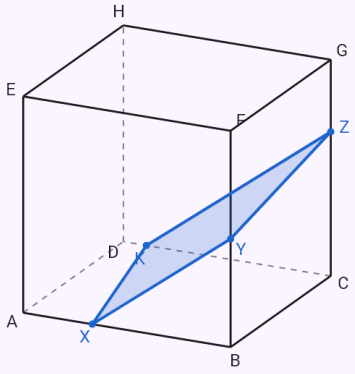
Graf



Krok 9 z 9
9. $XYZK$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Řez pravidelného šestibokého hranolu – podstava nejdřív ve skutečné velikosti.

Zadání: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

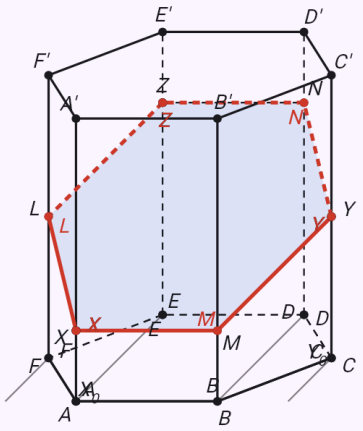
Výsledek

$$XMYNZL$$
$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách podle tří pravidel: dva body řezu v téže stěně spojíme; rovnoběžné stěny protne rovina řezu v rovnoběžných úsečkách; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABCDEF$; $a = 2\,\text{cm}$ – bokem narýsujeme podstavu $ABCDEF$ ve skutečné velikosti: pravidelný šestiúhelník se stranou a, strana AB leží na ose x (body A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF$; $y' = \frac{1}{2}\,y$ – z vrcholů C, D, E, F vedeme kolmice na přímku AB; paty kolmic přeneseme na osu x beze změny a z nich naneseme pod úhlem 45° polovinu délky kolmice (hloubku) – vznikne podstava $ABCDEF$ ve volném rovnoběžném promítání.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; $a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – narýsujeme pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 4. X; $X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – bod X na hraně AA' ve vzdálenosti $1\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 5. Y; $Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – bod Y na hraně CC' ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 6. Z; $Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – bod Z na hraně EE' ve vzdálenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu E
- 7. K; $K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – body XY neleží v téže stěně, proto použijeme pomocnou svislou rovinu přímky XY: body promítneme do podstavy (X_0Y_0) a průsečík přímek XY a X_0Y_0 je bod K, v němž přímka XY protíná rovinu podstavy $ABCDEF$
- 8. ZL; $ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – body ZK leží v rovině stěny $EFF'E'$; jejich spojnice protne stěnu v úsečce ZL
- 9. XL – body X, L leží ve stěně $FAA'F'$, spojíme je.
- 10. YM; $YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – stěna $BCC'B'$ je rovnoběžná se stěnou $EFF'E'$, řez ji protne v rovnoběžce s LZ vedené bodem Y; ta protne hranu BB' v bodě M
- 11. XM – body X, M leží ve stěně $ABB'A'$, spojíme je.
- 12. YN; $YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – stěna $CDD'C'$ je rovnoběžná se stěnou $FAA'F'$, řez ji protne v rovnoběžce s XL vedené bodem Y; ta protne hranu DD' v bodě N
- 13. ZN – body Z, N leží ve stěně $DEE'D'$, spojíme je.
- 14. $XMYNZL$ – řezem je šestiúhelník $XMYNZL$

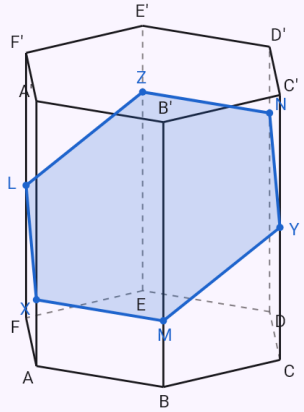
Graf



Krok 14 z 14
14. $XMYNZL$

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Řez pravidelného čtyřstěnu středy tří hran.

Zadání: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Výsledek

XYZ

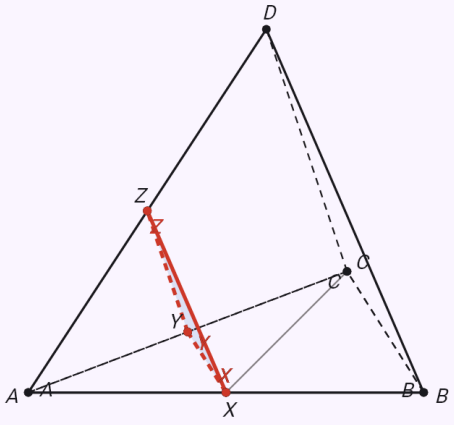
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Postup

- Rozbor ($a = 4\,\text{cm}$): rovina řezu je určena body X, Y, Z. Řez sestrojíme po stranách: dva body řezu v téže stěně spojíme; je-li strana řezu rovnoběžná s hranou jiné stěny, protne rovina tuto stěnu v rovnoběžce s ní; přímku strany řezu prodloužíme do průsečíku s přímkou hrany – ten leží v rovinách obou stěn u této hrany.
- 1. $ABC;\ a = 4\,\text{cm}$ – bokem narýsujeme podstavu ABC ve skutečné velikosti: pravidelný trojúhelník se stranou a, strana AB leží na ose x (body A_0, B_0, …).
- 2. $ABC;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – z vrcholů C vedeme kolmice na přímku AB; paty kolmic přeneseme na osu x beze změny a z nich naneseme pod úhlem 45° polovinu délky kolmice (hloubku) – vznikne podstava ABC ve volném rovnoběžném promítání.
- 3. $ABCD;\ a = 4\,\text{cm}$ – narýsujeme pravidelný čtyřstěn $ABCD$ ve volném rovnoběžném promítání (hloubka pod úhlem 45°, zkrácená na polovinu), neviditelné hrany čárkovaně.
- 4. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – bod X na hraně AB ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 5. $Y;\ Y \in AC,\ |AY| = 2\,\text{cm}$ – bod Y na hraně AC ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 6. $Z;\ Z \in AD,\ |AZ| = 2\,\text{cm}$ – bod Z na hraně AD ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 7. XY – body X, Y leží ve stěně ABC, spojíme je.
- 8. XZ – body X, Z leží ve stěně ABD, spojíme je.
- 9. YZ – body Y, Z leží ve stěně CAD, spojíme je.
- 10. XYZ – řezem je trojúhelník XYZ

Graf

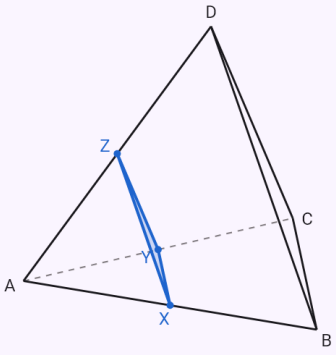


Krok 10 z 10

10. XYZ

Rozbor ukazuje náčrt hotové konstrukce se zadanými prvky. Šipkami pak projdete konstrukci krok po kroku – prvky přidané v daném kroku jsou zvýrazněné.

Řez v prostoru – otáčejte prstem



Známá omezení

- Zatím trojúhelník (strany, úhly, výška a těžnice k zadané straně, poloměry r a ϱ v uvedených kombinacích), čtyři základní množiny bodů, pět úloh na kružnice a tečny, čtyřúhelníky v kombinacích z nápovědy formuláře a řezy krychle, kvádru, pravidelných hranolů a jehlanů (podstava se 3 až 6 stranami) a pravidelného čtyřstěnu; obecný čtyřúhelník, výšky a těžnice k jiným stranám a další tělesa přibudou postupně.
- U úloh se vztahy právě dva vztahy k jednomu z pěti zadaných útvarů; vztahy mezi více body zadáte jako obecné vztahy.

- Obecné vztahy: nejvýš 8 bodů a 10 vztahů, postup konstrukce jen z uvedeného katalogu obratů; rozbor typu „podobnost trojúhelníků“ automaticky neumíme.
- Zadání jen formulářem – ne slovy ani z fotky.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace