Mathtrace – příručka

I. Rovnice, nerovnice a výrazy

Obsah

I. Rovnice, nerovnice a výrazy

1. Lineární rovnice a nerovnice
2. Kvadratické rovnice
3. Rovnice vyšších stupňů
4. Lomené rovnice
5. Iracionální rovnice
6. Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice
7. Absolutní hodnota
8. Goniometrické rovnice a nerovnice
9. Nerovnice a soustavy nerovnic
10. Soustavy rovnic
11. Rovnice a nerovnice s parametrem
12. Vyjádření neznámé ze vzorce
13. Úpravy výrazů
14. Dělitelnost a prvočísla
15. Úhly ve stupních, minutách a vteřinách
16. Procenta, poměr a trojčlenka
17. Převody jednotek
18. Logika a množiny
19. Komplexní čísla

1. Lineární rovnice a nerovnice

Lineární rovnici aplikace upraví tak, jak se to dělá ve škole – roznásobí závorky, převede neznámou na jednu stranu a vydělí. U nerovnice hlídá změnu znaménka při násobení záporným číslem a výsledek zapíše intervalem; graf ukáže obě strany jako přímky a řešení vyznačí na ose x.

Čipem „Podrobný“ (nebo trvale přepínačem „Podrobný postup rovnic“ na úvodní obrazovce) ukáže postup tak, jak se rovnice učí na základní škole: na obou stranách stejnou úpravu (/ −4x, / :2), pod ní mezikrok a výsledek. Neznámou převádí na stranu, kde vyjde s kladným koeficientem.

Ukázky

Rovnice se závorkou.

Zadání: `3(x - 2) = 2x + 5`

Výsledek

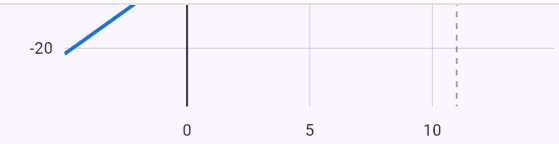
$x = 11$

Postup

- Převedeme vše na jednu stranu: $x - 11 = 0$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $x = 11$

Graf





$y = 3(x - 2)$
$y = 2x + 5$

Průsečíky grafů:

- $[11; 27]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Nerovnice – dělení záporným číslem obrátí znaménko.

Zadání: `2x - 3 < 5x + 6`

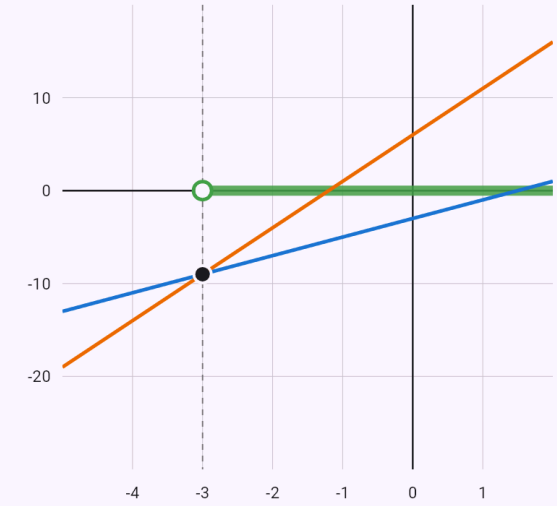
Výsledek

$$x \in (-3;\, \infty)$$

Postup

- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-3x < 9$
- Vydělíme záporným číslem -3, znaménko nerovnosti se obrátí: $x > -3$

Graf



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

- $[-3; -9]$

Podrobný postup – stejná úprava na obou stranách, rozepsaná jako ve škole.

Zadání: `4x + 3 = 6x + 7` Podrobný

Výsledek

$$x = -2$$

Postup

- Od obou stran odečteme $4x$

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

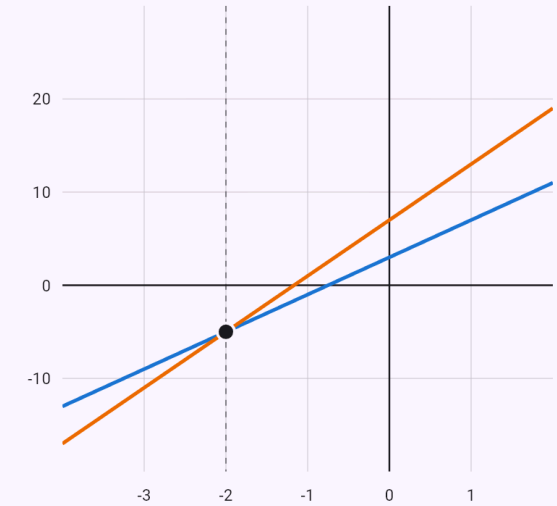
- Od obou stran odečteme 7

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Obě strany vydělíme 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Graf



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Průsečíky grafů:

- $[-2; -5]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Zlomky – obě strany vynásobíme společným jmenovatelem.

Zadání: `x/2 + x/3 = 10` Podrobný

Výsledek

$$x = 12$$

Postup

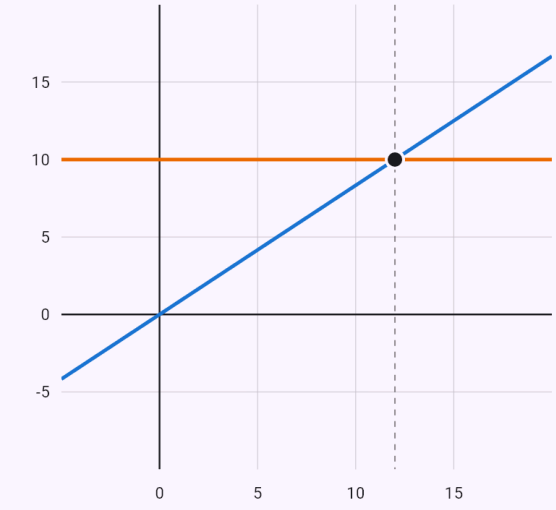
- Obě strany vynásobíme 6

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \quad / \cdot 6$$
$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$

- Obě strany vydělíme 5

$$5x = 60 \quad / : 5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

Graf



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Průsečíky grafů:

- $[12; 10]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

2. Kvadratické rovnice

Kvadratickou rovnici aplikace převede do tvaru ax² + bx + c = 0 a řeší ji diskriminantem a vzorcem; pozná i dvojnásobný kořen. Nemá-li rovnice reálné řešení, řekne to a tlačítkem „Zobrazit komplexní řešení“ ukáže komplexní kořeny.

Ukázky

Dva reálné kořeny.

Zadání: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Výsledek

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

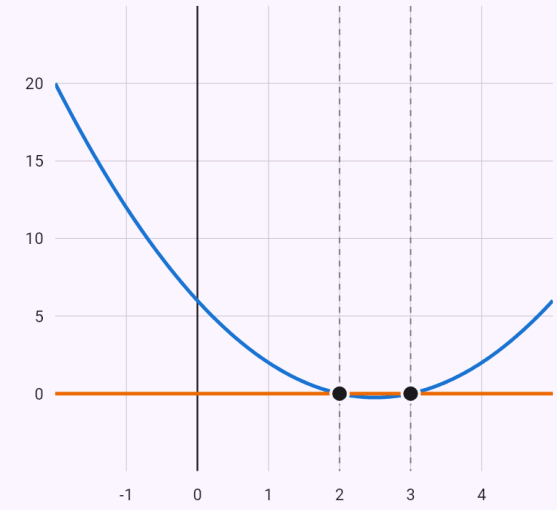
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Graf



$y = x^2 - 5x + 6$

$y = 0$

Průsečíky grafů:

● $[2; 0]$ ● $[3; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Záporný diskriminant – komplexní kořeny.

Zadání: `x^2 + 2x + 5 = 0` Zobrazit komplexní řešení

Výsledek

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

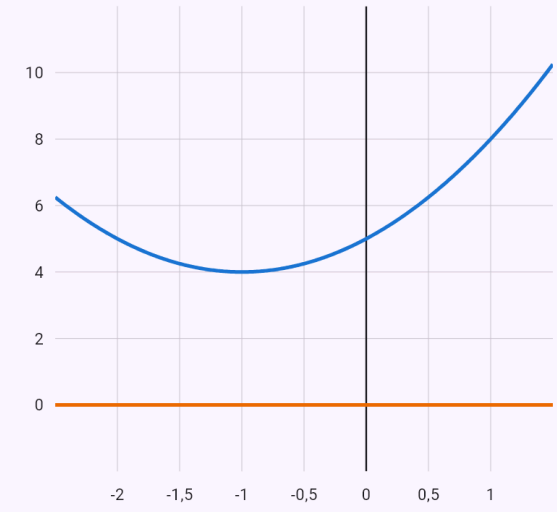
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Diskriminant je záporný – v oboru komplexních čísel:
  $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Graf



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Grafy se neprotínají – rovnice nemá žádné reálné řešení.

3. Rovnice vyšších stupňů

Bikvadratickou rovnici aplikace převede substitucí na kvadratickou. Obecnou rovnici vyššího stupně rozloží Hornerovým schématem: kořeny hledá mezi děliteli absolutního členu a každý nalezený kořen ze rovnice vydělí, dokud nezbude kvadratická rovnice.

Ukázky

Bikvadratická rovnice substitucí y = x².

Zadání: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Výsledek

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

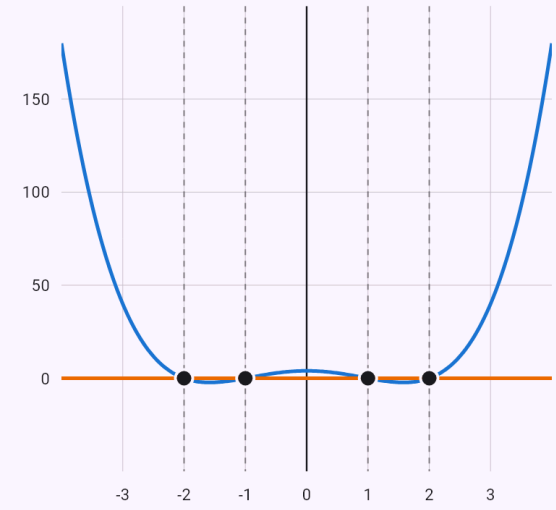
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Substitucí $u = x^2$ převedeme rovnici na kvadratickou: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Vypočítáme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Vrátíme se k původní neznámé: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Vrátíme se k původní neznámé: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graf



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Průsečíky grafů:

● $[-2; 0]$ ● $[-1; 0]$ ● $[1; 0]$ ● $[2; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Hornerovo schéma – kořeny mezi děliteli absolutního členu.

Zadání: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Výsledek

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

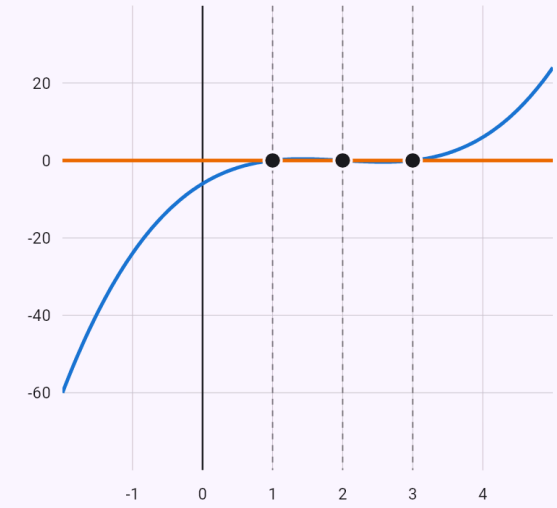
- Racionální kořeny mohou být jen dělitelé absolutního členu -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Hornerovým schématem ověříme kořen $x = 1$ a vydělíme jím polynom:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Vypočítáme diskriminant:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graf



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Průsečíky grafů:

● $[1; 0]$ ● $[2; 0]$ ● $[3; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

4. Lomené rovnice

U rovnice s neznámou ve jmenovateli aplikace nejdřív stanoví podmínky, pak rovnici vynásobí společným jmenovatelem a vyřeší. Kořeny porovná s podmínkami a ty, které jim nevyhovují, vyřadí.

Ukázky

Podmínky, společný jmenovatel, kvadratická rovnice.

Zadání: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Výsledek

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Podmínky: $x \neq 1$

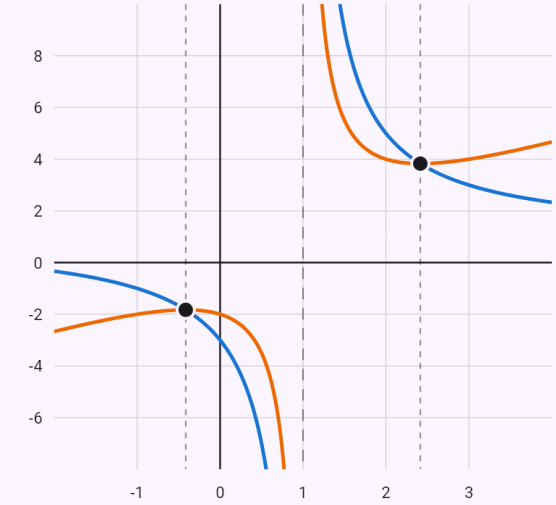
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq 1$
- Obě strany vynásobíme jmenovatelem $x - 1$:
  $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Převedeme vše na jednu stranu: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Kořen $x = 1 - \sqrt{2}$ podmínkám vyhovuje.
- Kořen $x = 1 + \sqrt{2}$ podmínkám vyhovuje.

Graf



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Průsečíky grafů:

- $\left[1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right]$
- $\left[1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

5. Iracionální rovnice

Rovnici s neznámou pod odmocninou aplikace řeší osamostatněním odmocniny a umocněním. Umocnění může přidat kořeny, které rovnici nesplňují – proto vždy následuje zkouška a nevyhovující kořeny vyřadí.

Ukázky

Umocnění a zkouška – jeden z kořenů rovnici nesplňuje.

Zadání: `sqrt(x+5) = x - 1`

Výsledek

$x = 4$

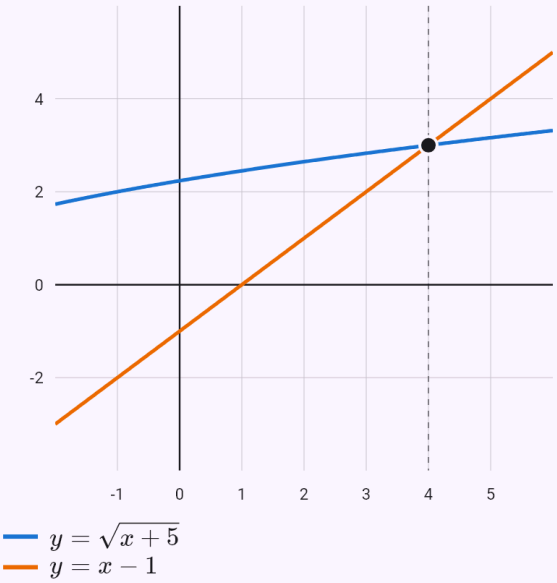
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Obě strany umocníme na druhou (není to ekvivalentní úprava, kořeny proto ověříme zkouškou): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Převedeme vše na jednu stranu: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Vypočítáme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Zkouška pro $x = -1$: L = 2, P = -2, L ≠ P – kořen nevyhovuje.
- Zkouška pro $x = 4$: L = 3, P = 3, L = P – kořen vyhovuje.

Graf



Průsečíky grafů:

- $[4; 3]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Známá omezení

- Iracionální nerovnice zatím neřešíme.

6. Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

Exponenciální rovnici aplikace řeší převedením na stejný základ, logaritmováním nebo substitucí; logaritmickou sloučením logaritmů podle pravidel a odlogaritmováním, vždy s podmínkami. Nerovnice řeší přes monotonii – u základu menšího než 1 se znaménko obrátí. Logaritmus podílu, jehož čitatel nebo jmenovatel nemůže být záporný (odmocnina), rozepíše na rozdíl logaritmů jako ve škole.

Rovnice s různými základy: $a^x + b^x = c^x$ se základy ze dvou prvočísel ($25^x + 10^x = 4^x$) vydělí mocninou a substitucí $t = (5/2)^x$ převede na kvadratickou; logaritmy různých základů převede na jeden ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logaritmy, jejichž základy jsou mocninami jednoho čísla ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$), převede na jeden základ ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), rovnici vynásobí a logaritmy sloučí. Logaritmus s neznámou v základu ($\log_x 8 = 3$) odlogaritmuje podle definice ($x^3 = 8$) s podmínkami $x > 0$, $x \neq 1$. Rovnici s neznámou v základu i v exponentu (x^(log x) = 100) zlogaritmuje a vyřeší substitucí t = log x. Nerovnice se substitucí t = log(x + 1) a soustavy logaritmických a exponenciálních nerovnic řeší stejně jako jednotlivé nerovnice – přes monotonii.

Rovnice a nerovnice s hyperbolickými funkcemi převede podle definice ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) na exponenciální a vyřeší substitucí $t = e^x$; argsinh x = c vyřeší inverzní funkcí (x = sinh c).

Ukázky

Substituce t = 2ˣ.

Zadání: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Výsledek

$$x = 2$$

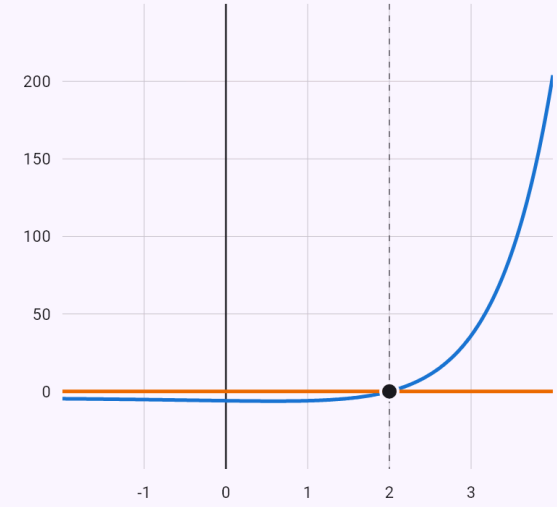
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Zavedeme substituci $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Rovnice $2^x = -1$ nemá reálné řešení.
- Vrátíme se k původní neznámé: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graf



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Průsečíky grafů:

- $[2; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Sloučení logaritmů, podmínky.

Zadání: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Výsledek

$$x = 3$$

Podmínky: $x > 1$

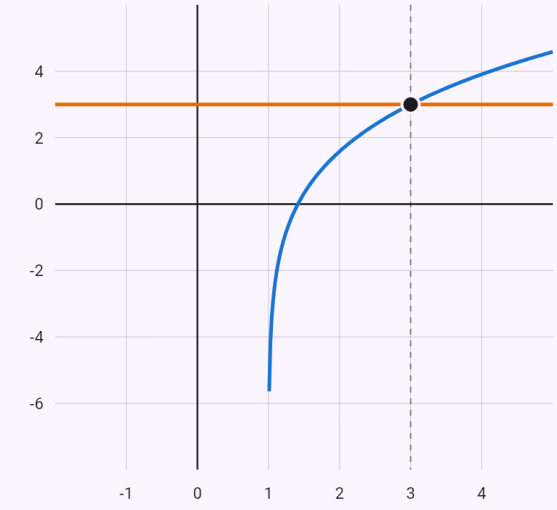
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Definiční obor – podmínky: $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Podle pravidel pro počítání s logaritmy je sloučíme: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Odlogaritmujeme: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Převedeme vše na jednu stranu: $x^2 - 9 = 0$
- Vypočítáme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$
- Kořen $x = -3$ nevyhovuje podmínce $x > 1$, není tedy řešením.
- Kořen $x = 3$ podmínkám vyhovuje.

Graf



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Průsečíky grafů:

- $[3; 3]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Různé základy – vydělíme 4^d a substituce $t = (5/2)^d$.

Zadání: `25^d + 10^d = 4^d`

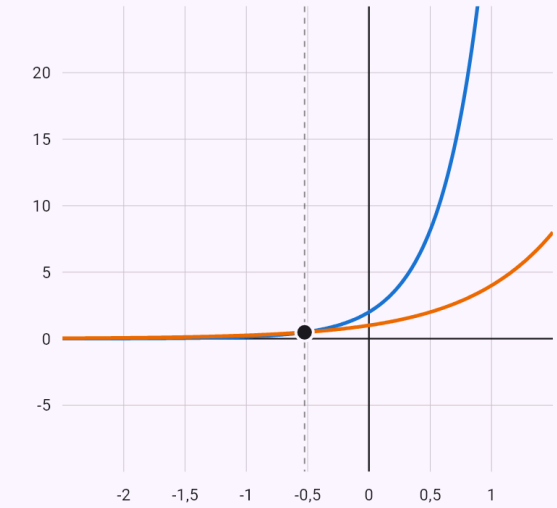
Výsledek

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Postup

- Rovnici vydělíme kladným výrazem 4^d:
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Zavedeme substituci $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Rovnice $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nemá reálné řešení.
- Vrátíme se k původní neznámé
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Graf



$y = 25^d + 10^d$
$y = 4^d$

Průsečíky grafů:

- $\left[\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota d.

Základ menší než 1 – znaménko nerovnosti se obrátí.

Zadání: `(1/2)^x > 8`

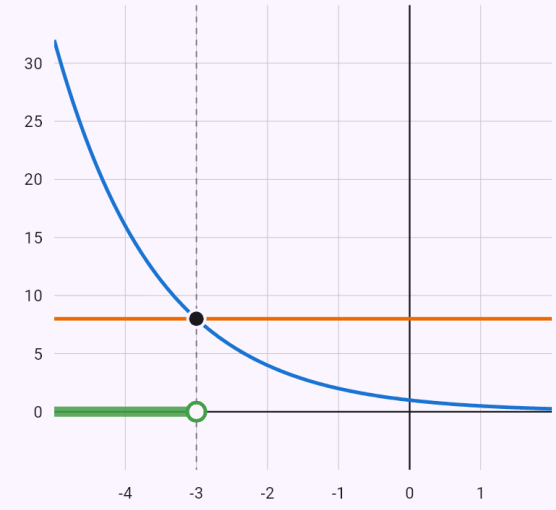
Výsledek

$$x \in (-\infty;\, -3)$$

Postup

- Obě strany zapíšeme jako mocniny se stejným základem: $2^{-x} > 2^3$
- Exponenciální funkce o základu 2 je rostoucí – pro exponenty platí nerovnost se stejným znaménkem: $-x > 3$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-x > 3$
- Vydělíme záporným číslem -1, znaménko nerovnosti se obrátí: $x < -3$
- Řešením této nerovnice je $x \in (-\infty;\, -3)$

Graf



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

- $[-3; 8]$

Hyperbolický tangens z definice – substituce t = e²ˣ.

Zadání: `tgh x = 1/2`

Výsledek

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Dosadíme definice

$$\operatorname{tgh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} - 3 = 0$$

- Zavedeme substituci $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Vyřešíme: $t = 3$
- Vrátíme se k původní neznámé: $e^{2x} = 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln 3}{2}$

Neznámá v základu – podle definice, kořen −1 nevyhovuje podmínkám.

Zadání: `log_x (2x+3) = 2`

Výsledek

$$x = 3$$

Podmínky: $x > 0,\ x \neq 1$

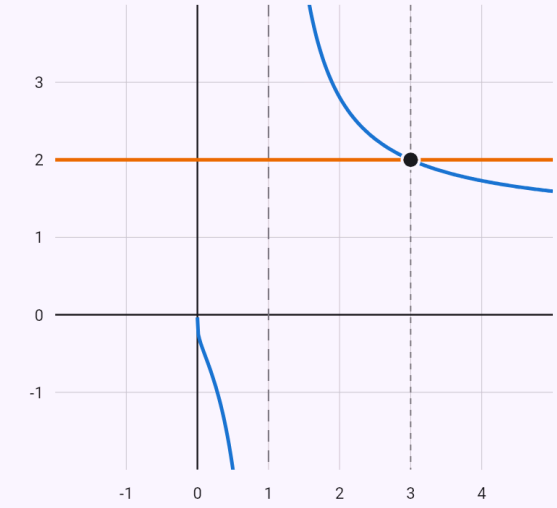
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Definiční obor – podmínky: $x > 0,\ x \neq 1$
- Odlogaritmujeme: $x^2 = 2x + 3$
- Převedeme vše na jednu stranu: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$
- Kořen $x = -1$ nevyhovuje podmínce $x > 0,\ x \neq 1$, není tedy řešením.
- Kořen $x = 3$ podmínkám vyhovuje.

Graf



$y = \log_x (2x + 3)$
$y = 2$

Průsečíky grafů:

- $[3; 2]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Neznámá v základu i v exponentu – zlogaritmujeme, substituce t = log x.

Zadání: `x^(log x) = 100`

Výsledek

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Podmínky: $x > 0$

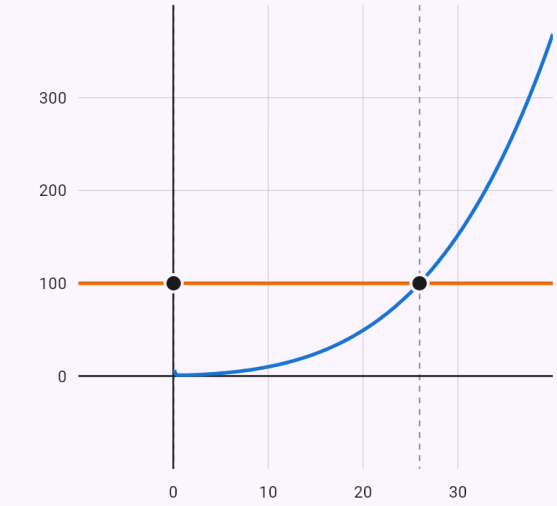
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Obě strany zlogaritmujeme:
  $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Definiční obor – podmínky: $x > 0$
- Zavedeme substituci $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Vrátíme se k původní neznámé:
  $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Vrátíme se k původní neznámé:
  $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- Kořen $x = 10^{-\sqrt{2}}$ podmínkám vyhovuje.
- Kořen $x = 10^{\sqrt{2}}$ podmínkám vyhovuje.

Graf



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Průsečíky grafů:

- $\left[10^{-\sqrt{2}}; 100\right]$
- $\left[10^{\sqrt{2}}; 100\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Logaritmus podílu s odmocninou – rozepíšeme na rozdíl logaritmů.

Zadání: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Výsledek

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

Podmínky: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

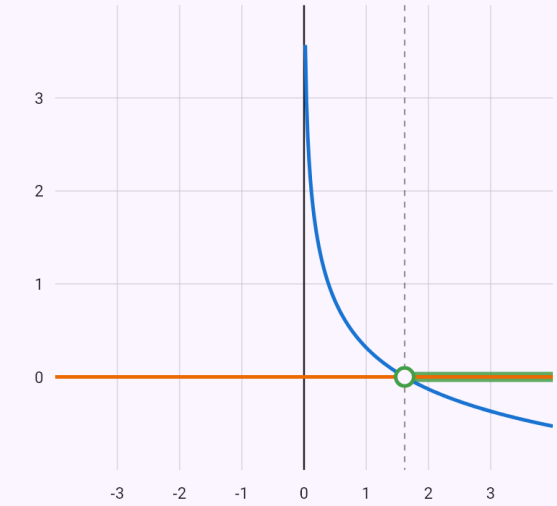
Postup

- Jedna část podílu nemůže být záporná, takže podíl je kladný právě tehdy, když jsou kladné obě – logaritmus podílu proto rozepíšeme na rozdíl logaritmů a menšitel převedeme na druhou stranu: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Definiční obor – podmínky: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- Logaritmická funkce o základu 3 je rostoucí – odlogaritmujeme a znaménko nerovnosti zůstane: $\sqrt{x+1} < x$
- Převedeme vše na jednu stranu: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Definiční obor – podmínky: $x \geq -1$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	$\times$	$+$	$-$

- Řešením této nerovnice je $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$

Graf



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

- $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right]$

Známá omezení

- Logaritmy různých základů, které nejsou mocninami jednoho čísla ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$), řeší jen numericky.
- Hyperbolické rovnice, které vedou na rovnici 4. stupně v e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$), řeší jen numericky; nerovnice s hyperbolometrickými funkcemi zatím neumíme.

7. Absolutní hodnota

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou aplikace řeší dvěma způsoby, které vyberete čipem: „Podle definice“ – zkratkou rozepsáním |a| = b nebo |a| < b – a „Nulové body“ – rozdělením číselné osy na intervaly, na nichž má každá absolutní hodnota pevné znaménko. Bez volby zvolí vhodnější způsob sama.

Vnořené absolutní hodnoty (||x| − 2| = 1) řeší stejně: podle definice postupně zvenku dovnitř, metodou nulových bodů zevnitř ven – nejdřív nulové body vnitřních absolutních hodnot, na každém intervalu pak zbylou absolutní hodnotu.

Nerovnici |f| < |g| (na každé straně jen absolutní hodnota) lze vyřešit i čipem „Umocněním“: obě strany jsou nezáporné, takže ji umocní na druhou a vyřeší jako kvadratickou. Samotný výraz s absolutními hodnotami (|x − 1| + |x + 2|) zjednoduší po částech – nulové body, tabulka znamének a na každém intervalu výraz bez absolutních hodnot. Za čárkou lze zadat interval (|x| − 2, x < 0): výraz se pak zjednoduší jen na něm.

Ukázky

Jedna absolutní hodnota – rozepsání podle definice.

Zadání: `|2x - 1| = 5`

Výsledek

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

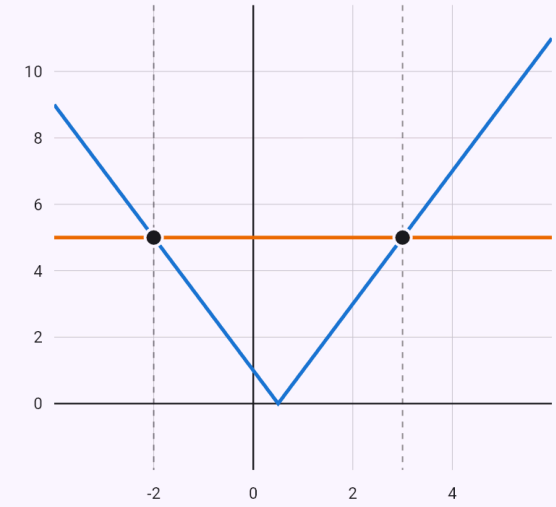
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Absolutní hodnota je jen jedna a na druhé straně je číslo – stačí ji rozepsat podle definice.
- Podle definice platí $|2x - 1| = 5$, právě když $2x - 1 = 5$, nebo $2x - 1 = -5$
- Vyřešíme: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Vyřešíme: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Graf



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Průsečíky grafů:

● $[-2; 5]$ ● $[3; 5]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Dvě absolutní hodnoty – metoda nulových bodů.

Zadání: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Výsledek

$$x \in (-3;\, 2)$$

Postup

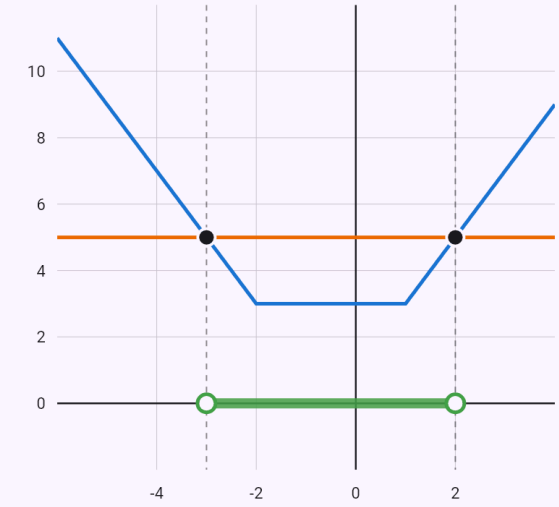
- Absolutní hodnoty odstraníme metodou nulových bodů: rozdělí číselnou osu na intervaly a na každém z nich mají výrazy v absolutních hodnotách stálé znaménko.
- Nulové body výrazů v absolutních hodnotách: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;\, -2)$	$\langle -2;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Na intervalu $(-\infty;\, -2)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Vyřešíme: $-2x - 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-2x < 6$
- Vydělíme záporným číslem -2, znaménko nerovnosti se obrátí: $x > -3$
- Řešením této nerovnice je $x \in (-3;\, \infty)$
- Průnik s intervalem $(-\infty;\, -2)$: $x \in (-3;\, -2)$
- Na intervalu $\langle -2;\, 1)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- Neznámá se vyrušila a zbylo pravdivé tvrzení $3 < 5$ – řešením je celý interval $\langle -2;\, 1)$
- Na intervalu $\langle 1;\, \infty)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Vyřešíme: $2x + 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $2x < 4$
- Vydělíme kladným číslem 2, znaménko nerovnosti se nemění: $x < 2$

- Řešením této nerovnice je $x \in (-\infty;\, 2)$
- Průnik s intervalem $\langle 1;\, \infty)$: $x \in \langle 1;\, 2)$
- Řešením je sjednocení výsledků: $x \in (-3;\, 2)$

Graf



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

● $[-3; 5]$ ● $[2; 5]$

Vnořená absolutní hodnota – podle definice zvenku dovnitř.

Zadání: `||x| - 2| = 1`

Výsledek

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

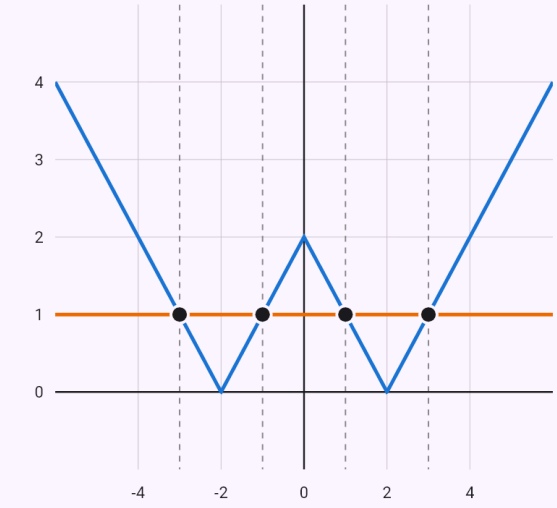
Řešit numerickou metodou:

Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Absolutní hodnota je jen jedna a na druhé straně je číslo – stačí ji rozepsat podle definice.
- Podle definice platí $||x| - 2| = 1$, právě když $|x| - 2 = 1$, nebo $|x| - 2 = -1$
- Osamostatníme absolutní hodnotu: $|x| = 3$
- Podle definice platí $|x| = 3$, právě když $x = 3$, nebo $x = -3$
- Osamostatníme absolutní hodnotu: $|x| = 1$
- Podle definice platí $|x| = 1$, právě když $x = 1$, nebo $x = -1$

Graf



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Průsečíky grafů:

● $[-3; 1]$ ● $[-1; 1]$ ● $[1; 1]$ ● $[3; 1]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Absolutní hodnota na obou stranách – umocnění na druhou.

Zadání: `|x - 1| < |2x + 3|` Umocněním

Výsledek

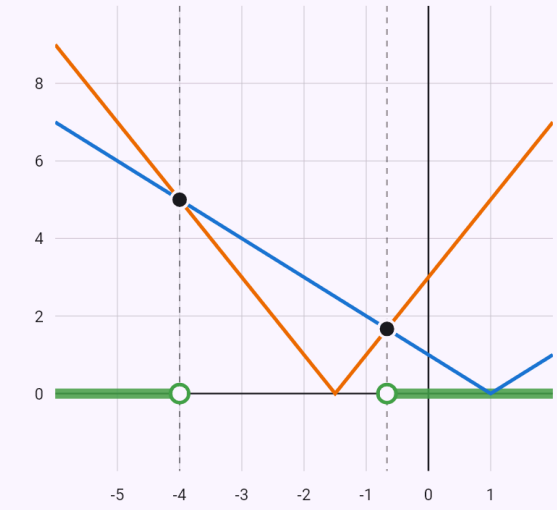
$$x \in (-\infty;\, -4) \cup \left(-\frac{2}{3};\, \infty\right)$$

Postup

- Na obou stranách je jen absolutní hodnota – obě strany jsou nezáporné, nerovnici proto můžeme umocnit na druhou (je to ekvivalentní úprava).
- Umocníme obě strany: $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Převedeme vše na jednu stranu: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Rozložíme na součin: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly: $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;\, -4)$	$(-4;\, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3};\, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Graf



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

- $[-4; 5]$
- $\left[-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right]$

Výraz s absolutními hodnotami – po částech na intervalech.

Zadání: `|x - 1| + |x + 2|`

Výsledek

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -2) \\ 3, & x \in \langle -2;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

Postup

- Absolutní hodnoty odstraníme metodou nulových bodů: rozdělí číselnou osu na intervaly a na každém z nich mají výrazy v absolutních hodnotách stálé znaménko.
- Nulové body výrazů v absolutních hodnotách: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;\, -2)$	$\langle -2;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Na intervalu $(-\infty;\, -2)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Na intervalu $\langle -2;\, 1)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na intervalu $\langle 1;\, \infty)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Výraz s absolutními hodnotami na zadaném intervalu – po částech jen tam.

Zadání: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Výsledek

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

Postup

- Výraz upravíme jen pro hodnoty z intervalu $(-1;\, \infty)$ – absolutní hodnoty odstraníme podle znamének výrazů v nich.
- Nulové body výrazů v absolutních hodnotách: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-1;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- Na intervalu $(-1;\, 1)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na intervalu $\langle 1;\, \infty)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Známá omezení

- Umocnění nabízíme jen u nerovnice s jedinou absolutní hodnotou na každé straně.

8. Goniometrické rovnice a nerovnice

Aplikace převede rovnici na základní rovnice typu sin x = a a ty vyřeší na jednotkové kružnici: najde úhly v jedné otočce a přičte k nim násobky periody ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Kružnice je nakreslená přímo v postupu.

Přednostně používá známé vzorce – dvojnásobný a poloviční argument, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, součet na součin –, dále vytýkání, substituci $t = \sin x$, dělení homogenní rovnice $\cos^n x$ a pomocný úhel $u\,a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Výsledek ještě ověří numericky na celé periodě.

Neznámá latinským písmenem (x, t) je v radiánech, řeckým písmenem (alpha, β, …) ve stupních – stejně jako zadání se znakem ° (sin(x + 30°)). Kořeny v daném intervalu dostanete, když interval připíšete za čárku nebo na další řádek.

Nerovnici aplikace řeší obloukem na jednotkové kružnici, složitější přes nulové body na jedné periodě; výsledek jsou intervaly s periodou.

Ukázky

Dvě větve řešení, úhly na jednotkové kružnici.

Zadání: `sin x = 1/2`

Výsledek

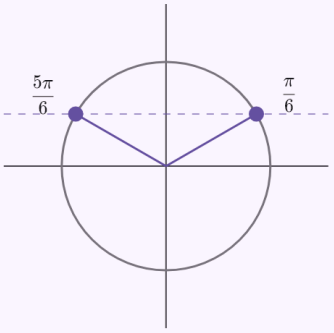
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

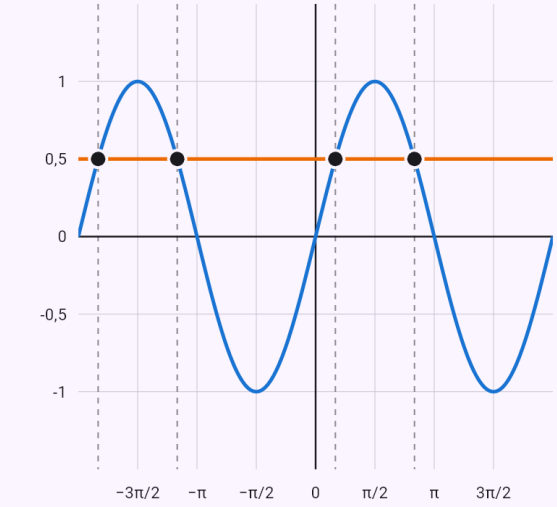
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Základní rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graf



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Průsečíky grafů:

- $\left[-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Substituce t = sin x a kvadratická rovnice.

Zadání: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Výsledek

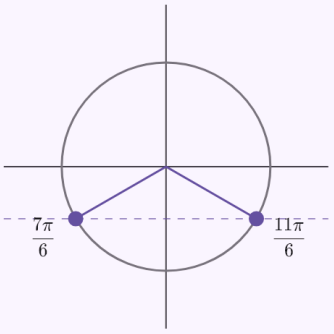
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Přesně to nejde – odkud je „≈", ukáže numerická metoda:

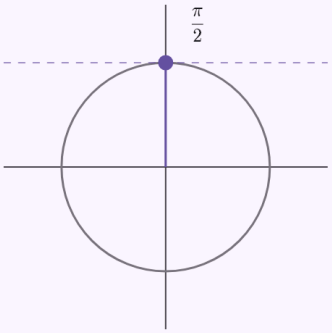
Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

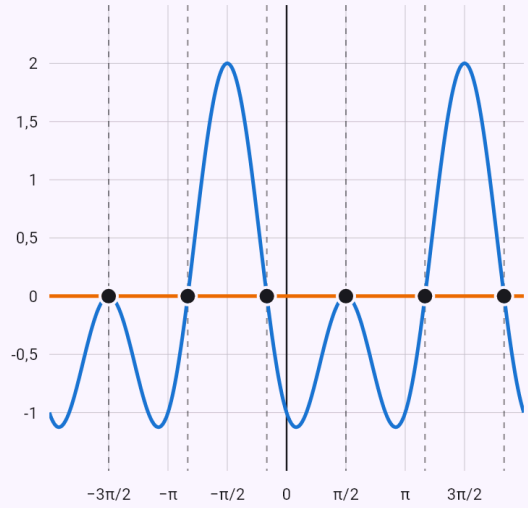
- Zavedeme substituci $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Základní rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Základní rovnice $\sin x = 1$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{2}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graf



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Průsečíky grafů:

- $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$
- $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[\frac{7\pi}{6}; 0\right]$
- $\left[\frac{11\pi}{6}; 0\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Vzorec pro sin 2x a rozklad na součin.

Zadání: `sin 2x = cos x`

Výsledek

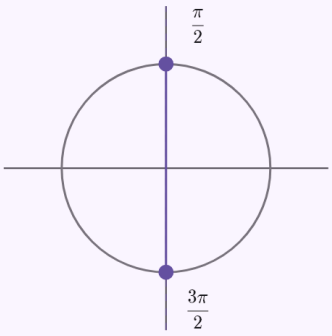
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Přesně to nejde – odkud je „≈", ukáže numerická metoda:

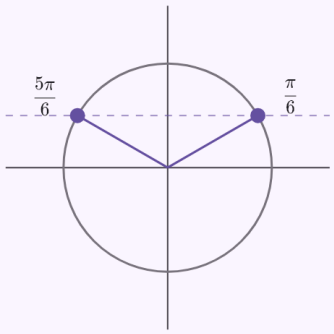
Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

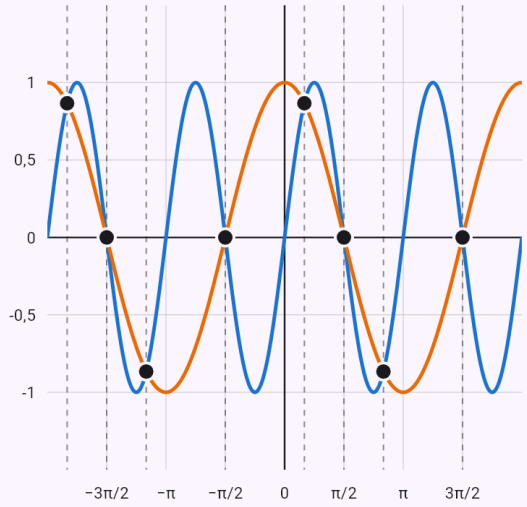
- Převedeme vše na jednu stranu: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Použijeme vzorec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Rozložíme na součin – součin je nulový, právě když je nulový některý z činitelů: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Řešíme rovnici $\cos x = 0$
- Základní rovnice $\cos x = 0$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Řešíme rovnici $2\sin x - 1 = 0$
- Osamostatníme goniometrickou funkci: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Základní rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graf



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Průsečíky grafů:

- $\left[-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Pomocný úhel: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

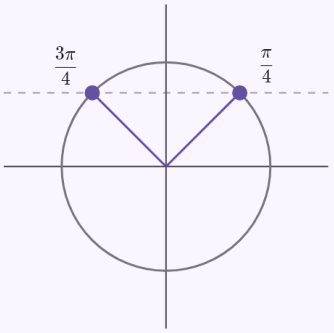
Zadání: `sin x + cos x = 1`

Výsledek

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

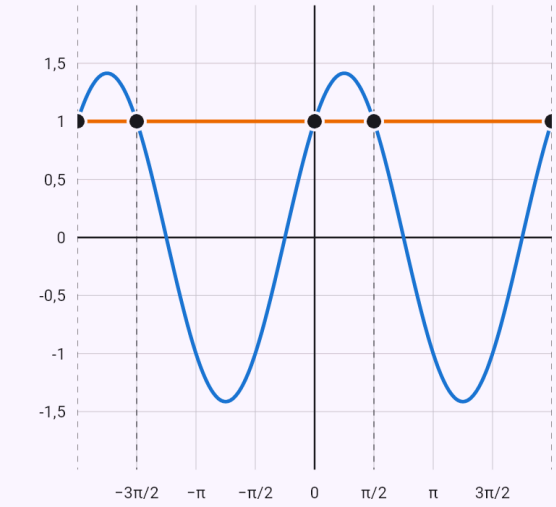
- Převedeme vše na jednu stranu: $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Zavedeme pomocný úhel φ:
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, kde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Osamostatníme goniometrickou funkci:
  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Základní rovnice $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Vyjádříme neznámou

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \ \vee\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graf



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Průsečíky grafů:

- $[-2\pi; 1]$
- $\left[-\frac{3\pi}{2}; 1\right]$
- $[0; 1]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$
- $[2\pi; 1]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Řecké písmeno – výsledek ve stupních.

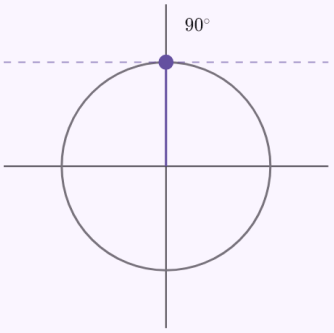
Zadání: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Výsledek

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

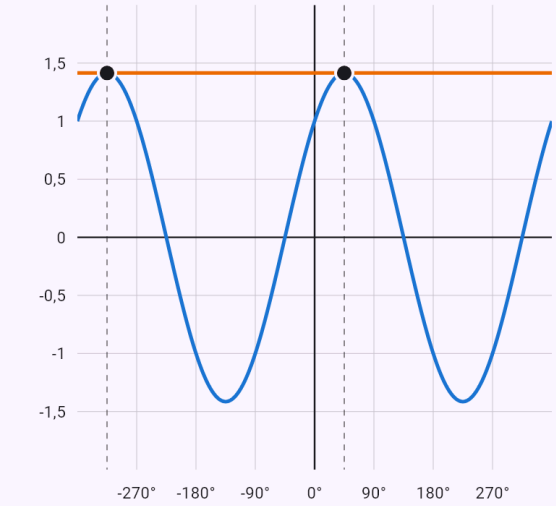
Postup

- Převedeme vše na jednu stranu: $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Zavedeme pomocný úhel φ:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, kde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Osamostatníme goniometrickou funkci:
  $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Základní rovnice $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly 90°; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Vyjádříme neznámou
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Graf



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Průsečíky grafů:

- $[-315^\circ; \sqrt{2}]$
- $[45^\circ; \sqrt{2}]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Jen kořeny v zadaném intervalu.

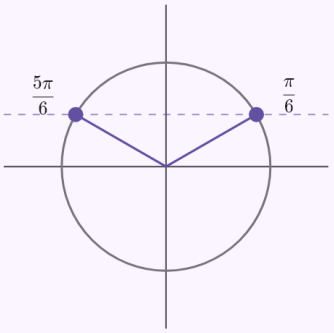
Zadání: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Výsledek

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

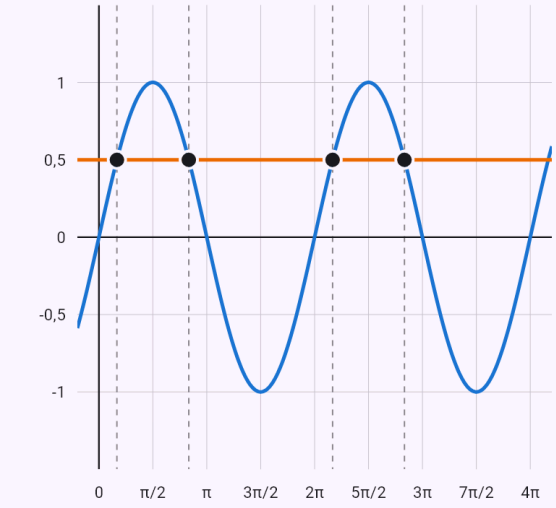
Postup

- Základní rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- V intervalu $x \in \langle 0;\ 4\pi)$ leží řešení $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Graf



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Průsečíky grafů:

- $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Oblouk na jednotkové kružnici, interval kolem nuly.

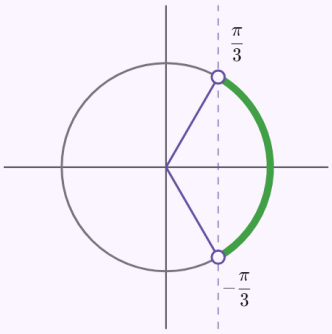
Zadání: `cos x > 1/2`

Výsledek

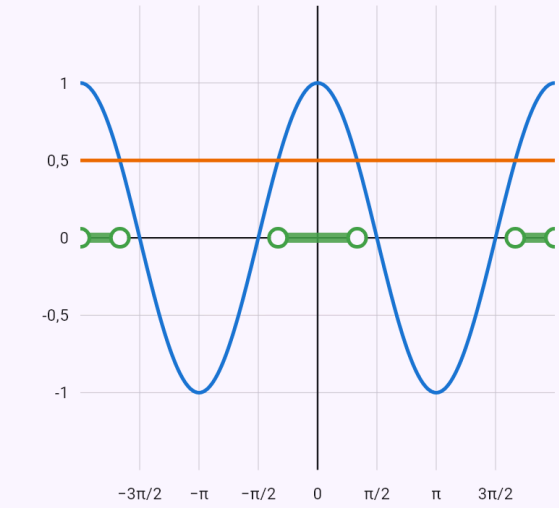
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Základní nerovnice $\cos x > \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí vyhovuje vyznačený oblouk; s periodou: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Graf



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Nulové body na periodě a znaménko mezi nimi.

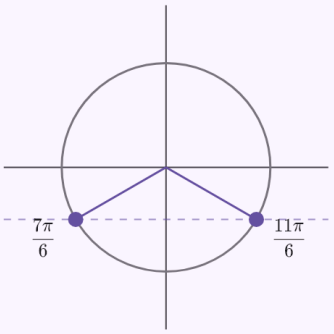
Zadání: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

Výsledek

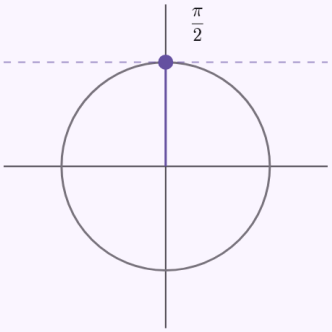
$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Nejdřív vyřešíme rovnici $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Zavedeme substituci $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Základní rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

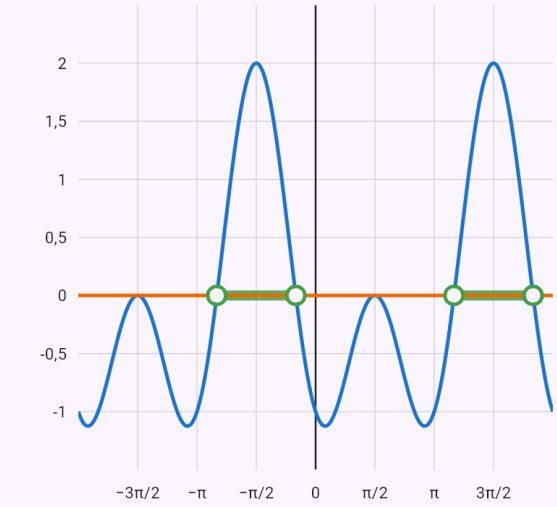


- Základní rovnice $\sin x = 1$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{2}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- Funkce má periodu 2π. Jednu periodu rozdělí na intervaly nulové body (a body, kde funkce není definovaná) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; podle znaménka v nich nerovnici vyhovuje: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$

Graf



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$
Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Známá omezení

- Rovnice, kde je neznámá i mimo goniometrickou funkci (x = cos x), řešíme jen numericky – metodou tečen s tabulkou iterací (viz Numerické metody), bez periody.
- Dvojitou goniometrickou nerovnici (−1/2 < sin x < 1/2) a goniometrické funkce v absolutní hodnotě zatím neumíme.

9. Nerovnice a soustavy nerovnic

Kvadratickou a lomenou nerovnici aplikace řeší nulovými body a tabulkou znamének. Dvojitou nerovnici a soustavu nerovnic řeší jako průnik řešení jednotlivých nerovnic, který ukáže na číselné ose. Soustavu nerovnic se dvěma neznámými vyřeší jako oblast v rovině a vybarví ji v grafu.

V soustavě nerovnic se dvěma neznámými aplikace vypíše i rohy oblasti – průsečíky hranic s přesnými souřadnicemi. Soustavu rovnice a nerovnic s jednou neznámou řeší vyřešením rovnice a dosazením kořenů do nerovnic; se dvěma neznámými je řešením část křivky rovnice ležící v oblasti nerovnic – v grafu je zvýrazněná a její krajní body jsou spočítané přesně. Soustavu lze zapsat i na jeden řádek, oddělenou středníky ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Soustavu dvou a více rovnic s nerovnicemi vyřeší jako soustavu rovnic a její řešení dosadí do nerovnic; se dvěma neznámými ukáže v grafu křivky v oblasti nerovnic, nevyhovující průsečíky prázdným kolečkem.

Ukázky

Kvadratická nerovnice – nulové body a znaménka.

Zadání: `x^2 - x - 6 > 0`

Výsledek

$$x \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ \infty)$$

Postup

- Rozložíme na součin: $(x-3)(x+2) > 0$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Graf



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$
Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:
● $[-2; 0]$ ● $[3; 0]$

Lomená nerovnice – jmenovatel nesmí být nula.

Zadání: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Výsledek

$$x \in \langle -1;\ 3)$$

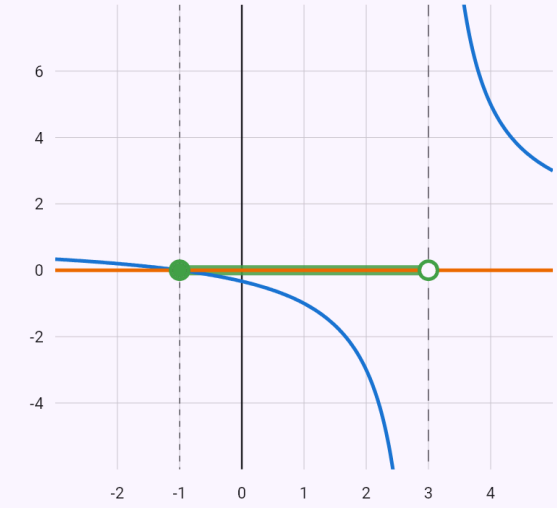
Podmínky: $x \neq 3$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq 3$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Graf



$y = \frac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

- $[-1; 0]$

Dvojitá nerovnice.

Zadání: `-1 <= 2x + 1 < 5`

Výsledek

$$x \in \langle -1;\ 2)$$

Postup

- 1. nerovnice: $-1 \leq 2x + 1$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-2x \leq 2$
- Vydělíme záporným číslem -2, znaménko nerovnosti se obrátí: $x \geq -1$
- Řešením této nerovnice je $x \in \langle -1;\ \infty)$
- 2. nerovnice: $2x + 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $2x < 4$
- Vydělíme kladným číslem 2, znaménko nerovnosti se nemění: $x < 2$
- Řešením této nerovnice je $x \in (-\infty;\ 2)$

- Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých nerovnic: $x \in \langle -1;\ 2)$

Graf



Každá nerovnice má na ose svůj řádek, zeleně je jejich průnik. Plné kolečko k řešení patří, prázdné ne.

Soustava nerovnic se dvěma neznámými – oblast v rovině a její rohy.

Zadání: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

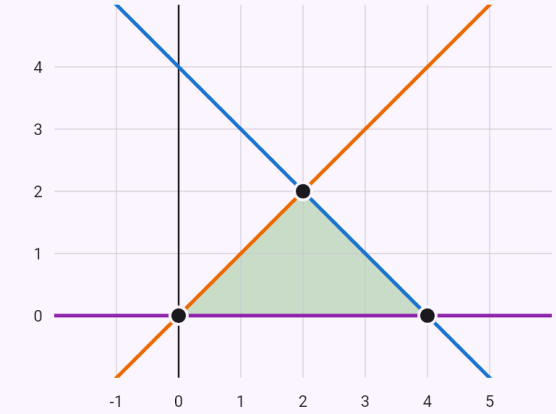
Výsledek

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in \langle 0;\, \infty)$$

Postup

- 1. nerovnice: $x + y \leq 4$
- Hranicí je křivka $x + y = 4$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
- Dosadíme bod $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- 2. nerovnice: $x - y \geq 0$
- Hranicí je křivka $x - y = 0$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
- Dosadíme bod $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- 3. nerovnice: $y \geq 0$
- Hranicí je křivka $y = 0$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
- Dosadíme bod $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- Řešením soustavy je společná část těchto oblastí – v grafu je vybarvená.
- Rohy oblasti (průsečíky hranic): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Graf



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow\ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in \langle 0;\, \infty)$

Řešením je vybarvená oblast. Plná hranice k řešení patří, čárkovaná ne.

Rohy oblasti:

● $[0; 0]$ ● $[2; 2]$ ● $[4; 0]$

Nerovnice v oboru celých čísel – vypíšou se celá čísla z intervalu.

Zadání: `x^2 < 10`

Výsledek

$$x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$$

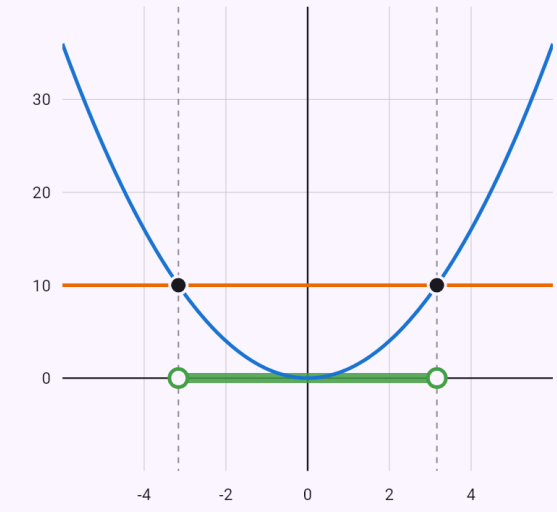
Postup

- Převedeme vše na jednu stranu: $x^2 - 10 < 0$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly: $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10};\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- V reálných číslech vychází $x \in \left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$, v $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Graf



$y = x^2$
$y = 10$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

- $\left[-\sqrt{10}; 10\right]$
- $\left[\sqrt{10}; 10\right]$

Rovnice a nerovnice – kořeny rovnice dosadíme do nerovnice.

Zadání: `x^2 - x - 6 = 0`

`x > 0`

Výsledek

$$x = 3$$

Postup

- Nejdřív vyřešíme rovnici $x^2 - x - 6 = 0$, její kořeny pak dosadíme do nerovnic.
- Vypočítáme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
- Kořen $x = -2$ nevyhovuje podmínce $x > 0$, není tedy řešením.
- Kořen $x = 3$ podmínkám vyhovuje.

Kružnice a polorovina – řešením je oblouk, krajní body k němu nepatří.

Zadání: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

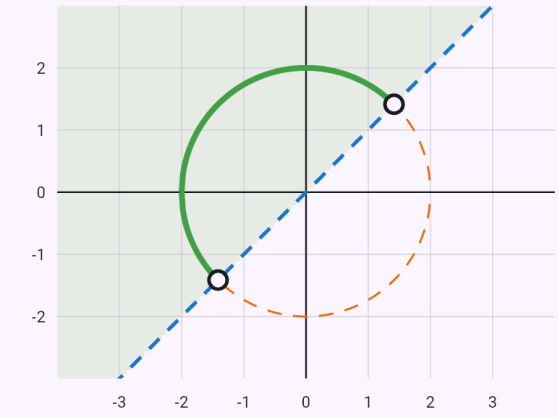
Výsledek

$x^2 + y^2 = 4$
$y > x$

Postup

- Řešením jsou body křivky $x^2 + y^2 = 4$, které leží v oblasti dané nerovnicemi. Nejdřív tuto oblast najdeme:
- Hranicí je křivka $y = x$ – kreslíme ji čárkovaně, její body k řešení nepatří.
- Dosadíme bod $[1;\ 0]$: $0 > 1$ neplatí – řešením je ta část roviny, ve které bod neleží.
- Krajní body části křivky: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – leží na čárkované hranici, k řešení nepatří.

Graf



$y > x$
$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Řešením je zeleně zvýrazněná část křivky – ta, která leží ve vybarvené oblasti. Plný krajní bod k řešení patří, prázdný ne.

Krajní body:

○ $\left[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right]$ ○ $\left[\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Kružnice a přímka s nerovnicí – průsečík pod osou x nevyhovuje.

Zadání: `x^2 + y^2 = 25`
`x - y = 1`
`y > 0`

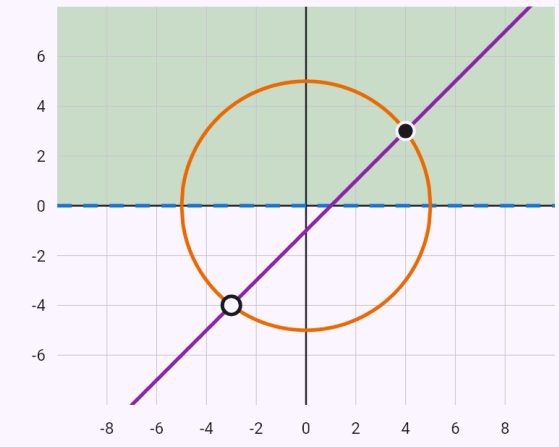
Výsledek

$x = 4$
$y = 3$

Postup

- Nejdřív vyřešíme soustavu rovnic, její řešení pak dosadíme do nerovnic.
- Řešení $x = -3,\ y = -4$ nevyhovuje nerovnici $y > 0$, soustavě tedy nevyhovuje.
- Řešení $x = 4,\ y = 3$ nerovnicím vyhovuje.

Graf



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0;\ \infty)$
$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Řešením jsou průsečíky křivek ve vybarvené oblasti (plný bod); prázdný bod nerovnicím nevyhovuje.

Průsečíky grafů:

○ $[-3; -4]$ ● $[4; 3]$

10. Soustavy rovnic

Soustavu lineárních rovnic se dvěma neznámými aplikace řeší sčítací nebo dosazovací metodou, větší soustavu Gaussovou eliminací – v rovnicích nebo v matici (rozšířená matice soustavy a řádkové úpravy). Čtvercovou soustavu vyřeší i Cramerovým pravidlem (determinanty). Metodu vyberete čipem. U soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými je i graf, na kterém jsou řešení průsečíky přímek nebo křivek.

Počet rovnic a neznámých se nemusí shodovat. Gaussova eliminace pozná, kdy soustava nemá řešení (vyjde rovnice jako 0 = 1), a kdy jich má nekonečně mnoho: neznámé, které rovnice neurčují, zvolí jako parametry t, s, … (tak, aby řešení vyšlo bez zlomků) a řešení zapíše i ve vektorovém tvaru. V maticovém tvaru rozhodne o počtu řešení Frobeniova věta – porovná hodnost matice soustavy, hodnost rozšířené matice a počet neznámých. U homogenní soustavy (všechny pravé strany 0) ukáže bázi prostoru řešení.

Neznámé můžete psát i s indexem: x_1, x_1 nebo x1. Soustavu lze zadat i maticí – rozšířenou maticí s pravými stranami za svislou čarou, nebo maticí A, vektorem pravých stran b a rovnicí Ax = b; neznámé jsou pak x_1, x_2, … a výchozí metodou je Gaussova eliminace v matici.

Soustava může obsahovat jeden nebo dva parametry – písmena, která nejsou neznámými (neznámé jsou x, y, z, u, v, w, t a x_1, x_2, …). Aplikace pak rozebere řešitelnost podle hodnot parametrů (diskuse): s čipem „Gauss – matice“ (výchozí u tří a více rovnic) upravuje rozšířenou matici; kde by násobila výrazem s parametrem, který může být nulový, předpokládá, že nulový není, a jeho nulové hodnoty dosadí a dořeší zvlášť – v každém případě rozhodne Frobeniova věta. S čipem „Cramerovo pravidlo“ spočítá determinanty jako výrazy s parametrem: pro D ≠ 0 dostane vzorce, kořeny D dosadí. U dvou parametrů vyjdou i případy jako „b = 4, a ≠ 2“ nebo „a = b“.

Nelineární soustavu (třeba kružnice a přímka) aplikace vyřeší a zakreslí, zatím bez postupu.

Jak zadat

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Neznámé s indexem – x_1, x_1 i x1.
`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	Rozšířená matice – pravé strany za svislou čarou.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	Matice soustavy, vektor pravých stran a rovnice Ax = b.

Ukázky

Sčítací metoda.

Zadání: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Sčítací

Výsledek

$$x = 2$$
$$y = 1$$

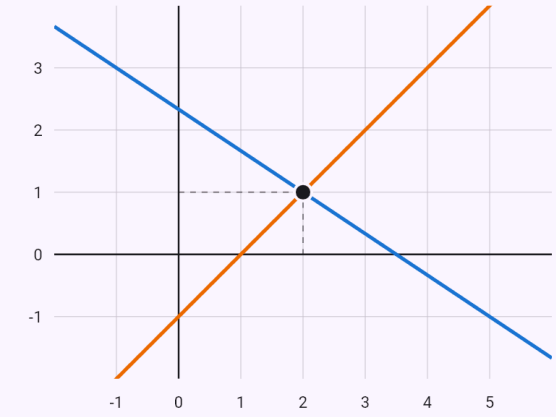
Postup

- První rovnici vynásobíme číslem 1 a druhou číslem -2, aby se po sečtení vyrušilo x

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Rovnice sečteme, x se vyruší: $5y = 5$
- Vyřešíme: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- Dosadíme do 2. rovnice: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Graf



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Průsečíky grafů:

- $[2; 1]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení soustavy – jeho souřadnice jsou hodnoty x a y.

Tři rovnice – Gaussova eliminace.

Zadání: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Gaussova eliminace

Výsledek

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Postup

- Z dalších rovnic vyloučíme x

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Z dalších rovnic vyloučíme y

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Vyřešíme: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Dosadíme do 2. rovnice: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Cramerovo pravidlo – determinanty D, D_x, D_y.

Zadání: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Cramerovo pravidlo

Výsledek

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Postup

- Spočítáme determinant

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

- Spočítáme determinant

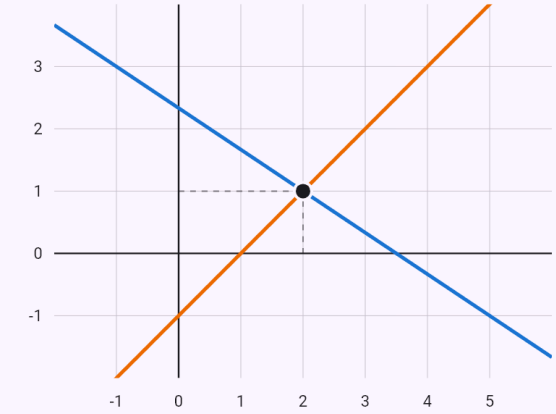
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

- Spočítáme determinant

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$

- Podle Cramerova pravidla: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$
- Podle Cramerova pravidla: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$

Graf



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$
$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Průsečíky grafů:

- $[2; 1]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení soustavy – jeho souřadnice jsou hodnoty x a y.

Nekonečně mnoho řešení – Frobeniova věta, parametr a vektorový tvar.

Zadání: `x + 2y + z = 3`
`2x + 4y + 3z = 7`

`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – matice

Výsledek

Má nekonečně mnoho řešení.

$x = 2 - 2t$

$y = t$

$z = 1$

$t \in \mathbb{R}$

Postup

- Rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Řádkové úpravy $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rovnice 0 = 0 platí vždy, vynecháme ji

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Frobeniova věta: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – hodnosti se rovnají, ale jsou menší než počet neznámých, soustava má nekonečně mnoho řešení.
- Matici v odstupňovaném tvaru přepíšeme zpět na rovnice

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Neznámé, které rovnice neurčují, zvolíme jako parametry: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Vyřešíme: $z = 1$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow\ x = 2 - 2t$
- Řešení ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustava bez řešení – vyjde rovnice, která neplatí.

Zadání: `x + y + z = 2`

`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Výsledek

Nemá žádné řešení.

Postup

- Z dalších rovnic vyloučíme x

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$

- Z dalších rovnic vyloučíme y

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- Vyšla rovnice $0 = 1$, která nemá řešení – soustava tedy nemá řešení.

Homogenní soustava – báze prostoru řešení.

Zadání: `x + 2y - z = 0`

`2x + 4y - 2z = 0`

`x - y + z = 0` Gauss – matice

Výsledek

Má nekonečně mnoho řešení.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Postup

- Soustava je homogenní (všechny pravé strany jsou 0) – vždy má triviální řešení (samé nuly), netriviální řešení má právě tehdy, když je hodnost matice soustavy menší než počet neznámých.
- Rozšířená matice soustavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Prohodíme 2. a 3. rovnici
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Rovnice 0 = 0 platí vždy, vynecháme ji
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Frobeniova věta: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – hodnosti se rovnají, ale jsou menší než počet neznámých, soustava má nekonečně mnoho řešení.
- Matici v odstupňovaném tvaru přepíšeme zpět na rovnice
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Neznámé, které rovnice neurčují, zvolíme jako parametry: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- Dosadíme do 2. rovnice: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- Řešení ve vektorovém tvaru
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Báze prostoru řešení (dimenze 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Soustava zadaná rozšířenou maticí.

Zadání: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Výsledek

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Postup

- Rozšířená matice soustavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$
- Frobeniova věta: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice i počtu neznámých, soustava má právě jedno řešení.
- Matici v odstupňovaném tvaru přepíšeme zpět na rovnice
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Vyřešíme: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- Dosadíme do 2. rovnice: $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Soustava s parametrem – rozšířená matice, případy a = 1 a a = −2.

Zadání: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – matice

Výsledek

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Postup

- Neznámé jsou $x,\ y,\ z$, parametr a je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Rozšířená matice soustavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Prohodíme $1.$ a $2.$ rovnici
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Dál budeme počítat s prvkem $1 - a$, který může být nulový – předpokládáme proto $a \neq 1$; případ $a = 1$ rozebereme zvlášť.
- Prohodíme $2.$ a $3.$ rovnici
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Dál budeme počítat s prvkem $-a - 2$, který může být nulový – předpokládáme proto $a \neq -2$; případ $a = -2$ rozebereme zvlášť.
- Pro $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – soustava má jediné řešení: $x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Pro $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$ – soustava má nekonečně mnoho řešení: $x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. Matice po dosazení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Pro $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – soustava nemá řešení. Matice po dosazení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Dva parametry – rozbor podle a i b.

Zadání: `x + y + z = 1`

`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Výsledek

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \overline{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Postup

- Neznámé jsou $x,\ y,\ z$, parametry $a,\ b$ jsou libovolná reálná čísla. Řešení závisí na jejich hodnotách, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Rozšířená matice soustavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Řádkové úpravy $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Dál budeme počítat s prvkem $(a-2)(a-1)$, který může být nulový – předpokládáme proto $a \neq 1,\ a \neq 2$; případ $a = 2,\ a = 1$ rozebereme zvlášť.
- Pro $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – soustava má jediné řešení
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Pro $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – soustava nemá řešení. Matice po dosazení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Pro $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – soustava má nekonečně mnoho řešení:
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Matice po dosazení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Pro $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – soustava nemá řešení. Matice po dosazení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Pro $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – soustava má nekonečně mnoho řešení:
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Matice po dosazení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kružnice a přímka.

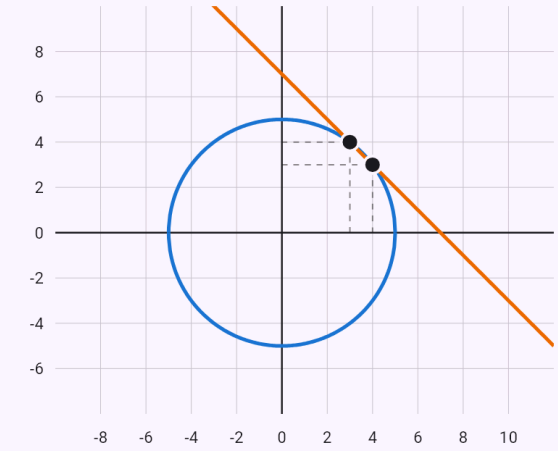
Zadání: `x^2 + y^2 = 25`

```
x + y = 7
```

Výsledek

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Graf



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Průsečíky grafů:

● $[3; 4]$ ● $[4; 3]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení soustavy – jeho souřadnice jsou hodnoty x a y.

Známá omezení

- Nelineární soustavy jsou zatím bez postupu.

11. Rovnice a nerovnice s parametrem

Je-li v rovnici kromě neznámé ještě další písmeno, je to parametr – libovolné reálné číslo, na kterém závisí řešení. Aplikace rovnici upraví na tvar A·x = B (u kvadratické A·x² + B·x + C = 0) a řešení rozebere podle hodnot parametru (diskuse): kde je koeficient u neznámé nulový, kde je diskriminant kladný, nulový nebo záporný, kde podmínky vyloučí kořen a pro které hodnoty nemá úloha smysl. Výsledek shrne po případech.

Neznámou aplikace vybere podle pořadí x, y, z, u, v, w, t, ostatní písmena jsou parametry; jinou neznámou vyberete čipem „Neznámá“ nebo ji napíšete za čárku. Graf ukáže všechna řešení jako křivku (u nerovnice oblast) v rovině parametr – neznámá; posuvníkem zvolíte hodnotu parametru a na svislé přímce přečtete řešení.

Za čárku můžete napsat i otázku na kořeny: „x^2 + px + 4 = 0, x > 0“ – pro která p jsou všechny kořeny kladné (čipem „Podmínka platí pro“ přepnete na alespoň jeden kořen), „…, x = 3“ – pro která p je 3 kořenem. Lineární rovnici aplikace řeší dosazením kořene do podmínky, kvadratickou Vietovými vzorci. Soustavu dvou lineárních rovnic s parametrem řeší determinanty (Cramerovým pravidlem) a rozebere, kdy má jedno, žádné a nekonečně mnoho řešení. Kvadratickou a lomenou nerovnici rozebere podle pořadí nulových bodů. Posuvník v grafu se zastaví přesně na kritických hodnotách parametru, ty jsou i pod grafem. Soustavu s parametrem o více rovnicích, se dvěma parametry nebo maticovou metodou najdete v kapitole Soustavy rovnic.

Písmena v neurčitém integrálu bere aplikace jako konstanty a připíše, které nesmí být nulové (∫ dx/(a − bx)³ pro b ≠ 0). V limitě a v určitém integrálu jsou písmena také parametry – viz kapitoly Limity a Určitý integrál.

Jak zadat

`2ax + a = 4x`	Parametr je každé další písmeno; neznámá je x (nebo y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, neznámá q`	Neznámou nebo parametr můžete napsat za čárku („a je parametr“, „neznámá q“).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Otázka na kořeny za čárkou: pro která p mají všechny kořeny (nebo alespoň jeden) danou vlastnost.

Ukázky

Lineární rovnice – pro a = 2 nemá řešení.

Zadání: `2ax + a = 4x`

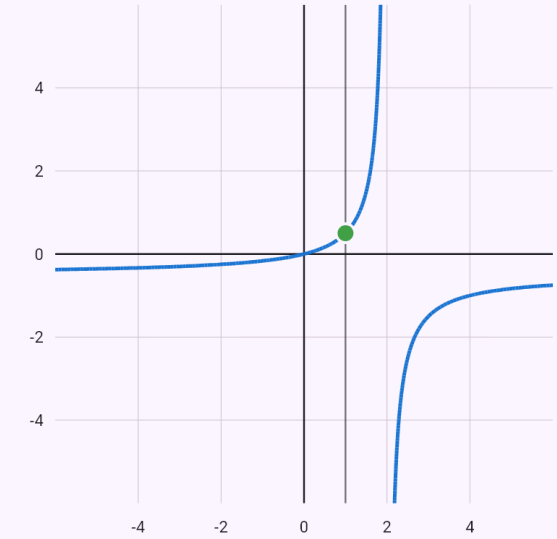
Výsledek

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Postup

- Neznámá je x, parametr a je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $2(a-2)x = -a$
- Pro $a \neq 2$ je $2(a-2)$ různé od nuly, můžeme jím vydělit: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Pro $a = 2$ je koeficient u neznámé nulový: $0 \cdot x = -2$, tedy $x \in \emptyset$

Graf



$2ax + a = 4x$

Každý bod [a; x] křivky je řešením. Pro zvolenou hodnotu a leží řešení na svislé přímce – posouvej ji posuvníkem.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Kvadratická rovnice – diskuse podle diskriminantu.

Zadání: `x^2 + 6x + p = 0`

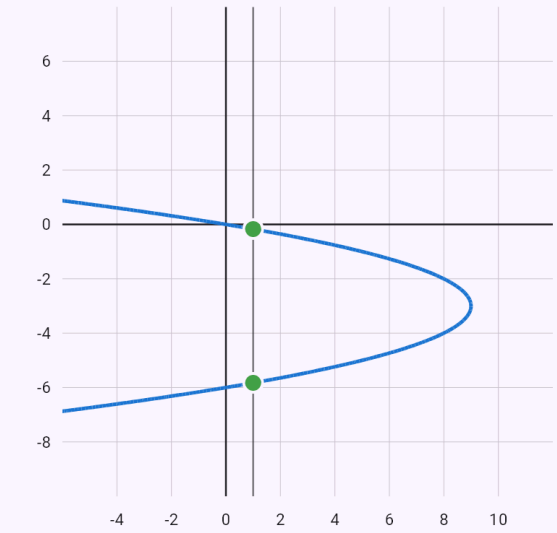
Výsledek

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Postup

- Neznámá je x, parametr p je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $x^2 + 6x + p = 0$
- Diskriminant v závislosti na parametru: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Pro $p < 9$ je D > 0, rovnice má dva různé kořeny: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Pro $p > 9$ je D < 0, rovnice nemá reálné řešení.
- Pro $p = 9$ je D = 0, rovnice má jeden dvojnásobný kořen: $x = -3$

Graf



$x^2 + 6x + p = 0$

Každý bod [p; x] křivky je řešením. Pro zvolenou hodnotu p leží řešení na svislé přímce – posouvej ji posuvníkem.

p = 9

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Nerovnice – znaménko koeficientu rozhoduje o směru nerovnosti.

Zadání: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

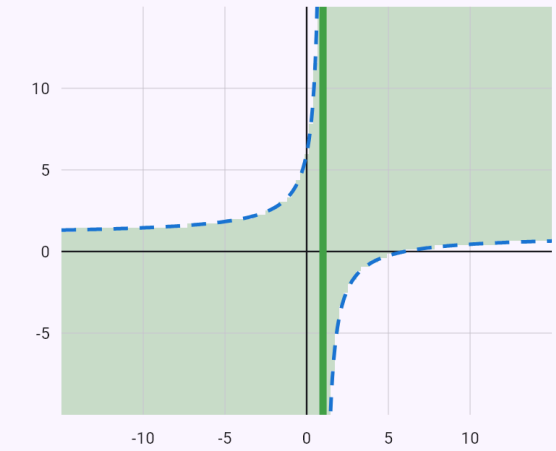
Výsledek

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Postup

- Neznámá je x, parametr p je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Pro $p < 1$ je $2(1-p)$ kladné – vydělíme a znak nerovnosti zůstane: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Pro $p > 1$ je $2(1-p)$ záporné – vydělíme a znak nerovnosti se obrátí: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Pro $p = 1$ je koeficient u neznámé nulový: $0 \cdot x < 10$, tedy $x \in \mathbb{R}$

Graf



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{p-6}{p-1}$

Vybarvená oblast tvoří všechna řešení [p; x]. Pro zvolenou hodnotu p je řešením zvýrazněná část svislé přímky – posouvej ji posuvníkem.

p = 1

$p = 1$

Oba kořeny větší než 1 – diskriminant a Vietovy vzorce.

Zadání: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

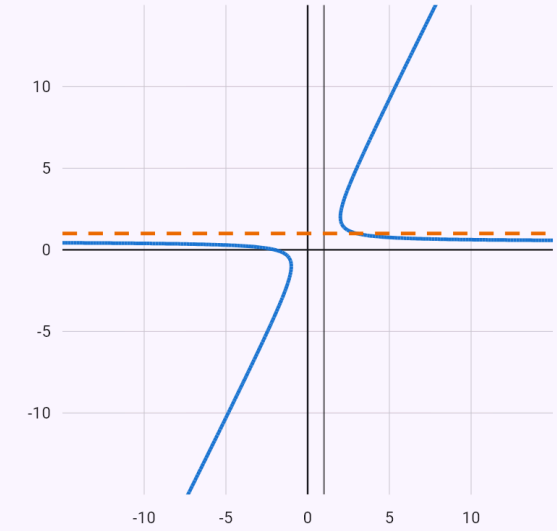
Výsledek

$$2 \leq p < 3$$

Postup

- Neznámá je x, parametr p je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- Diskriminant v závislosti na parametru
  $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p - 2$
- Pro $p \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$ je D > 0, rovnice má dva různé kořeny: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Pro $-1 < p < 2$ je D < 0, rovnice nemá reálné řešení.
- Pro $p = -1$ je D = 0, rovnice má jeden dvojnásobný kořen: $x = -1$
- Pro $p = 2$ je D = 0, rovnice má jeden dvojnásobný kořen: $x = 2$
- Hledáme hodnoty parametru, pro které všechny kořeny rovnice splňují $x > 1$ (a nějaký kořen existuje).
- Podle Vietových vzorců: $x_1 + x_2 = 2p, \quad x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- Rovnice musí mít reálné kořeny: $D \geq 0$, tedy $p \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 2;\ \infty)$
- Podmínka na součet: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p-1) > 0$, tedy $p > 1$
- Podmínka na součin: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, tedy $p < 3$
- Podmínku splňují hodnoty parametru $2 \leq p < 3$

Graf



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Každý bod [p; x] křivky je řešením. Pro zvolenou hodnotu p leží řešení na svislé přímce – posouvej ji posuvníkem.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1: \quad x \in \emptyset$

Soustava s parametrem – determinanty, přímky různoběžné, rovnoběžné, totožné.

Zadání: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Výsledek

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Postup

- Neznámé jsou $x,\ y$, parametr a je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Soustavu řešíme pomocí determinantů (Cramerovo pravidlo)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Pro $a \neq -1,\ a \neq 1$ je D ≠ 0 – soustava má jediné řešení (přímky jsou různoběžné): $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$
- Pro $a = -1$ je D = 0 a soustava nemá řešení (přímky jsou rovnoběžné různé).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Pro $a = 1$ je D = 0 a obě rovnice soustavy popisují tutéž přímku – řešení je nekonečně mnoho: $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Lomená nerovnice – řešení podle pořadí nulového bodu p a bodu 1.

Zadání: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Výsledek

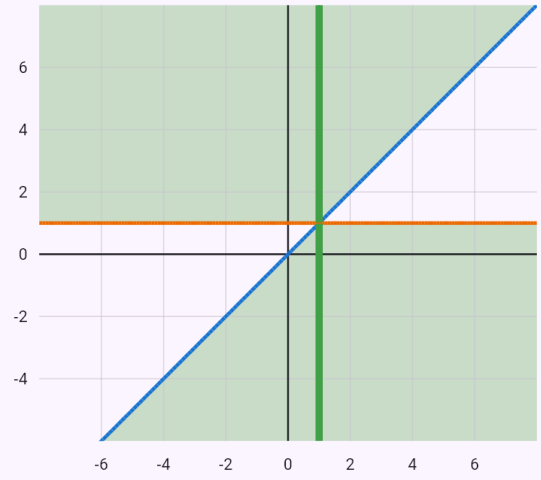
$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty), & p > 1 \end{cases}$$

Podmínky: $x \neq 1$

Postup

- Neznámá je x, parametr p je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq 1$
- Upravíme na základní tvar: $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Nulové body čitatele: p; jmenovatel je nulový pro 1
- Pro $p < 1$ – podle pořadí nulových bodů a znaménka na intervalech: $x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty)$
- Pro $p > 1$ – podle pořadí nulových bodů a znaménka na intervalech: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty)$
- Pro $p = 1$ řešíme $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$

Graf



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

Vybarvená oblast tvoří všechna řešení [p; x]. Pro zvolenou hodnotu p je řešením zvýrazněná část svislé přímky – posouvej ji posuvníkem.

p = 1

$p = 1$

Známá omezení

- Úplná diskuse po intervalech jen s jedním parametrem, s více parametry obecné případy.
- Otázky na kořeny jen u lineárních a kvadratických rovnic; soustavy s parametrem jen dvě lineární rovnice; parametr v odmocnině nebo logaritmu zatím ne.

12. Vyjádření neznámé ze vzorce

Vzorec z matematiky, fyziky nebo chemie (m = ρV, S = πr², v = s/t) aplikace upraví tak, aby zvolené písmeno zůstalo samo na jedné straně. Ostatní písmena jsou dané veličiny – počítá s nimi jako se známými čísly. Kroky jsou ekvivalentní úpravy jako ve škole: převedení členů na druhou stranu, vynásobení jmenovatelem, vydělení, vytknutí, odmocnění, převrácené hodnoty.

Které písmeno vyjádřit, vyberete čipem „Vyjádřit“; bez volby aplikace vyjádří první písmeno na straně se vzorcem. Výsledek je vzorec s podmínkami – čím se dělí, nesmí být nula (V = m/ρ pro ρ ≠ 0). Veličiny ve vzorci jsou kladné, proto odmocnina má jen kladnou hodnotu: r = √(S/π).

Rovnici v x a y aplikace vyjádří podle y (přímka 2x + y = x + 2y je y = x); u ostatních rovnic v x a y jsou mezi čipy derivace, integrálu a grafu i „Vyjádřit y“ a „Vyjádřit x“. Tady odmocnina dává obě znaménka: x² + y² = 25 je y = ±√(25 − x²).

Rovnice s parametrem (2ax + a = 4x, neznámá x) se nevyjadřují jako vzorec, ale řeší s diskusí – viz předchozí kapitola.

Jak zadat

`m = ρV`	Vzorec – na jedné straně samotná veličina, písmena velká i malá (E, I, V jsou veličiny).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Indexy podtržítkem (R_1, v_0), řecká písmena (ρ, rho, \rho), π je konstanta.
`2x + y = x + 2y`	Rovnice v x a y – vyjádří se y.

Ukázky

Hustota – vydělení veličinou s podmínkou ρ ≠ 0.

Zadání: `m = ρV`

Výsledek

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Podmínky: $\rho \neq 0$

Postup

- Vyjádříme V. S ostatními písmeny ($m,\ \rho$) počítáme jako se známými čísly a rovnici upravujeme ekvivalentními úpravami, dokud V nezůstane samo na jedné straně.
- Zaměníme strany rovnice: $\rho V = m$
- Obě strany vydělíme ρ, které nesmí být nula ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

Obsah lichoběžníku – vynásobení dvěma, vydělení výškou a převedení a.

Zadání: `S = (a + c)/2 · v`

Výsledek

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Podmínky: $v \neq 0$

Postup

- Vyjádříme c. S ostatními písmeny ($S,\ a,\ v$) počítáme jako se známými čísly a rovnici upravujeme ekvivalentními úpravami, dokud c nezůstane samo na jedné straně.
- Zaměníme strany rovnice: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Obě strany vynásobíme 2: $v(a+c) = 2S$
- Obě strany vydělíme v, které nesmí být nula ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Od obou stran odečteme a: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Převedeme na společný jmenovatel: $c = \frac{2S - av}{v}$

Obsah kruhu – odmocnění, poloměr je kladný.

Zadání: `S = πr^2`

Výsledek

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Postup

- Vyjádříme r. S ostatními písmeny (S) počítáme jako se známými čísly a rovnici upravujeme ekvivalentními úpravami, dokud r nezůstane samo na jedné straně.
- Zaměníme strany rovnice: $\pi r^2 = S$
- Obě strany vydělíme π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Obě strany odmocníme. r je veličina, a veličiny jsou kladné – platí jen kladná odmocnina: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Paralelní rezistory – společný jmenovatel a převrácené hodnoty.

Zadání: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Výsledek

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Podmínky: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Postup

- Vyjádříme R_1. S ostatními písmeny ($R,\ R_2$) počítáme jako se známými čísly a rovnici upravujeme ekvivalentními úpravami, dokud R_1 nezůstane samo na jedné straně.
- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Zaměníme strany rovnice: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Od obou stran odečteme $\frac{1}{R_2}$: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Převedeme na společný jmenovatel: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Když se rovnají dva výrazy, rovnají se i jejich převrácené hodnoty: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Přímka – členy s y vlevo, ostatní vpravo.

Zadání: `2x + y = x + 2y`

Výsledek

$$y = x$$

Postup

- Vyjádříme y. S ostatními písmeny (x) počítáme jako se známými čísly a rovnici upravujeme ekvivalentními úpravami, dokud y nezůstane samo na jedné straně.
- Členy s y převedeme na levou stranu, ostatní na pravou (s opačným znaménkem) a sečteme

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Obě strany vynásobíme (-1): $y = x$

Kružnice vyjádřená podle y – odmocnina s ±.

Zadání: `x^2 + y^2 = 25`

Výsledek

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Postup

- Vyjádříme y. S ostatními písmeny (x) počítáme jako se známými čísly a rovnici upravujeme ekvivalentními úpravami, dokud y nezůstane samo na jedné straně.
- Od obou stran odečteme x^2: $y^2 = 25 - x^2$
- Obě strany odmocníme; stejnou druhou mocninu má číslo i číslo k němu opačné, proto ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Známá omezení

- Písmeno jen v mocninách, zlomcích a odmocninách; ve funkcích (sin, log, exponent) ani ve druhé mocnině spolu s první (s = $v_0t + \frac{1}{2}at^2$ podle t) zatím ne.

13. Úpravy výrazů

Výraz bez rovnítka aplikace upraví podle zvoleného čipu: zjednoduší (u lomeného výrazu převede na společný jmenovatel a zkrátí, s podmínkami), roznásobí, rozloží na součin (vytýkáním, vzorci i Hornerovým schématem) nebo rozloží na parciální zlomky – jako na papíře, s rovnicemi pro neznámé koeficienty. Rozklad na součin je nad celými čísly; jde-li výraz nad reálnými čísly rozložit dál (pomocí iracionálních kořenů), ukáže to další krok. Odmocninu z jednočlenu aplikace částečně odmocní – u sudé odmocniny s absolutní hodnotou tam, kde může být základ záporný. Počítá i s komplexními čísly – dělení rozšířením komplexně sdruženým číslem.

Číselné výrazy se zlomky počítá po krocích jako ve škole: nejdřív nejvnitřnější závorky (kulaté, hranaté i složené), u složeného zlomku čitatel a jmenovatel zvlášť, pak mocniny, násobení a dělení (zlomkem násobením převrácenou hodnotou, i s dvojtečkou nebo ÷) a nakonec sčítání přes společného jmenovatele. Smíšené číslo zapíšete s mezerou – 2 1/3 (z fotky i 2⅓) – a aplikace ho nejdřív převede na zlomek; součin dvou čísel pište vždy s tečkou. Výsledek větší než 1 ukáže i jako smíšené číslo.

Polynom vydělený polynomem zapište s dvojtečkou: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). Aplikace dělí pod sebou jako na papíře – vydělí nejvyšší členy, výsledkem vynásobí dělitel a odečte – a ukáže podíl, zbytek a zkoušku; u dělitele x − a nabídne i Hornerovo schéma. Zlomek p/q se jako dosud zjednoduší, dělení zvolíte čipem „Dělení polynomů“.

Binomická věta: k-tý člen rozvoje („5. člen (2x - 1/x)^8“) i člen bez x („člen bez x v (x + 1/x)^10“) z obecného členu. Permutace P(5) a s opakováním P′(2, 3, 1) aplikace počítá jako faktoriály.

Kombinatoriku můžete zadat i krátkou větou: „Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?“ (s dovětkem „záleží na pořadí“, „s opakováním“), „Kolika způsoby lze seřadit 5 osob?“ (i kolem kulatého stolu), „Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5 bez opakování?“ a „Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?“. Umí i dvě klasické úlohy o pravděpodobnosti: narozeninový problém (alespoň dva z n lidí slaví narozeniny týž den) a šatnářku, která ztratí lístky (nikdo nedostane svůj kabát – i dopisy v obálkách).

Ukázky

Číselný výraz se zlomky – nejdřív násobení, pak společný jmenovatel.

Zadání: `2/3 - 1/6*2` Zjednodušit

Výsledek

$$\frac{1}{3}$$

Postup

- Nejdřív násobení a dělení: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Vnořené závorky od nejvnitřnější.

Zadání: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Výsledek

$$7$$

Postup

- Nejdřív vypočítáme nejvnitřnější závorku: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Dosadíme: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Nejdřív vypočítáme nejvnitřnější závorku: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Dosadíme: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Nejdřív vypočítáme nejvnitřnější závorku: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Dosadíme: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Násobíme – čitatel čitatelem, jmenovatel jmenovatelem – a krátíme: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Složený zlomek – čitatel a jmenovatel zvlášť, pak násobení převrácenou hodnotou.

Zadání: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Výsledek

$$\frac{10}{21}$$

Postup

- Nejdřív vypočítáme čitatele a jmenovatele složeného zlomku zvlášť: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Nejdřív vypočítáme čitatele a jmenovatele složeného zlomku zvlášť: $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Dosadíme: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Složený zlomek: čitatele vynásobíme převrácenou hodnotou jmenovatele
  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Smíšená čísla – převod na zlomky a výsledek i jako smíšené číslo.

Zadání: `2 1/3 + 1 1/2`

Výsledek

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Postup

- Smíšená čísla převedeme na zlomky – celou část vynásobíme jmenovatelem a přičteme čitatel
  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Dosadíme: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Převedeme na společný jmenovatel: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- Výsledek jako smíšené číslo: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Zjednodušení lomeného výrazu.

Zadání: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Zjednodušit

Výsledek

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Podmínky: $x \neq -1$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq -1$
- Rozložíme čitatel a jmenovatel na součin: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Zkrátíme společným činitelem $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Roznásobení.

Zadání: `(x + 2)^3` Roznásobit

Výsledek

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Postup

- Roznásobíme závorky a sečteme podobné členy: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Rozklad na součin Hornerovým schématem.

Zadání: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Rozložit

Výsledek

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Postup

- Racionální kořeny mohou být jen dělitelé absolutního členu -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Hornerovým schématem ověříme kořen $x = 1$ a vydělíme jím polynom:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Dosazením zjistíme, že tito kandidáti kořeny nejsou: $P(-1) = -24 \neq 0$
- Hornerovým schématem ověříme kořen $x = 2$ a vydělíme jím polynom:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Rozklad na parciální zlomky.

Zadání: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Parciální zlomky

Výsledek

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Podmínky: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Rozložíme jmenovatel na součin: $(x-1)(x+2)$
- Rozklad hledáme ve tvaru: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Obě strany vynásobíme jmenovatelem $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Dosadíme $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Dosadíme $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Částečné odmocnění s absolutní hodnotou.

Zadání: `sqrt(8a^5 b^2)` Zjednodušit

Výsledek

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Postup

- Částečně odmocníme – mocniny pod odmocninou vytkneme před ni (u sudé odmocniny s absolutní hodnotou, kde může být základ záporný): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Dělení komplexních čísel.

Zadání: `(3+4i)/(1-2i)` Algebraický tvar

Výsledek

$$-1+2i$$

Postup

- Zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli, $1+2i$
  $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

Rovnice s faktoriály – podmínky, zkrácení a kontrola kořenů.

Zadání: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Výsledek

$$x = 5$$

Postup

- Podmínky: faktoriál a kombinační číslo existují jen pro celá nezáporná čísla – každý argument (u kombinačního čísla n, k i n − k) musí být celé číslo ≥ 0:
  $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Faktoriály rozepíšeme na nejmenší z nich, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), a zkrátíme; kombinační číslo zapíšeme jako součin: $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2+x = 30$
- Zbývá rovnice bez faktoriálů, vše převedeme na jednu stranu: $x^2+x-30 = 0$
- Kořeny rovnice jsou $x = -6,\ x = 5$; podmínkám vyhovuje $x = 5$

Dělení pod sebou – podíl, zbytek a zkouška.

Zadání: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Výsledek

$$\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$$
$$=2x+3-\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Postup

- 1. krok – vydělíme nejvyšší členy $2x^3 : x^2 = 2x$, výsledkem vynásobíme dělitel $2x \cdot \left(x^2+1\right) = 2x^3+2x$ a odečteme, zbude $3x^2-3x+5$
- 2. krok – vydělíme nejvyšší členy $3x^2 : x^2 = 3$, výsledkem vynásobíme dělitel $3 \cdot \left(x^2+1\right) = 3x^2+3$ a odečteme, zbude $-3x+2$
- Dělení pod sebou $\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- Podíl je $2x+3$, zbytek $-3x+2$
- Zkouška – podíl krát dělitel plus zbytek dá dělenec: $(2x+3)\left(x^2+1\right)+(-3x+2)=2x^3+3x^2-x+5$

Dělení dvojčlenem x − 1 Hornerovým schématem.

Zadání: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Hornerovo schéma

Výsledek

$$\left(x^3-2x+1\right):(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

Postup

- Hornerovo schéma pro $x=1$ – nahoře koeficienty dělence, dole jejich postupné součty; poslední číslo je zbytek

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

- Podíl je x^2+x-1, zbytek 0
- Zkouška – podíl krát dělitel plus zbytek dá dělenec: $\left(x^2+x-1\right)(x-1)=x^3-2x+1$

Rovnice s kombinačním číslem C(n, 2) – i V(n, k), C', V' s opakováním.

Zadání: `C(n, 2) = 45`

Výsledek

$$n = 10$$

Postup

- Podmínky: faktoriál a kombinační číslo existují jen pro celá nezáporná čísla – každý argument (u kombinačního čísla n, k i n − k) musí být celé číslo ≥ 0:
  $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Faktoriály rozepíšeme na nejmenší z nich, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), a zkrátíme; kombinační číslo zapíšeme jako součin: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Zbývá rovnice bez faktoriálů, vše převedeme na jednu stranu: $n^2 - n - 90 = 0$
- Kořeny rovnice jsou $n = -9,\ n = 10$; podmínkám vyhovuje $n = 10$

Výběr k z n zadaný větou – kombinace.

Zadání: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Výsledek

$$120$$

Postup

- Vybíráme 3 z 10, na pořadí nezáleží a prvky se neopakují – počet kombinací:
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Sudá trojmístná čísla – dva případy podle poslední číslice.

Zadání: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Výsledek

52

Postup

- Hledáme 3místná čísla z číslic $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Na prvním místě nesmí být nula. Číslice se nesmějí opakovat. Číslo je sudé, právě když je sudá jeho poslední číslice.
- Na konci je 0 – na ostatní místa zbývají všechny ostatní číslice: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- Na konci je jiná vhodná číslice než 0 – na prvním místě pak nesmí být nula ani tato číslice: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Oba případy sečteme: $20 + 32 = 52$

Slova z písmen slova – permutace s opakováním.

Zadání: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Výsledek

151200

Postup

- Slovo má 10 písmen, spočítáme, kolikrát je v něm které: $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Slova jsou permutace s opakováním – prohozením stejných písmen vznikne totéž slovo: $P'(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200$

Narozeninový problém přes opačný jev.

Zadání: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Výsledek

$P(A) \approx 0{,}5073$

Postup

- Snazší je spočítat opačný jev A': všech 23 lidí má narozeniny v různé dny (rok má 365 dní, každý je stejně pravděpodobný).
- Pravděpodobnost, že jsou všechny narozeniny různé $P(A') = \frac{V(365,23)}{365^{23}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- Hledaná pravděpodobnost je doplněk do jedné: $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

Šatnářka ztratila lístky – permutace bez pevného bodu.

Zadání: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Výsledek

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Postup

- Rozdání, při kterých nikdo nedostane to své, jsou permutace bez pevného bodu – jejich počet podle principu inkluze a exkluze
  $$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$
- Všech rozdání je n!, pravděpodobnost je podíl:
  $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Pro větší počet lidí se pravděpodobnost skoro nemění:
  $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

Člen binomického rozvoje bez x.

Zadání: `člen bez x v (x + 1/x)^10`

Výsledek

$$T_6 = 252$$

Postup

- Obecný $(k+1)$. člen binomického rozvoje:
  $$T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$$
- Člen bez x má exponent u x nulový:
  $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- Hledaný 6. člen: $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Dělitelnost a prvočísla

Samotné celé číslo aplikace rozloží na prvočinitele – dělí je postupně nejmenšími prvočísly a zapíše 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; u prvočísla ukáže, že ho nedělí žádné prvočíslo do jeho odmocniny. Test můžete zadat i jako prvocislo(97).

Největší společný dělitel NSD(60, 90) a nejmenší společný násobek NSN(18, 30) aplikace počítá z rozkladů na prvočinitele, čipem „Eukleidův algoritmus“ dělením se zbytkem. Rozšířený Eukleidův algoritmus s tabulkou dá Bézoutovu rovnost bezout(240, 46): NSD(240, 46) = 240·u + 46·v.

Dělitele čísla dělitelé(36) aplikace hledá po dvojicích 1·36, 2·18, … až k odmocnině a počet ověří z rozkladu. Znaky dělitelnosti dělitelnost(1236) projde tabulkou pro 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 a 25 (poslední číslice, ciferný součet, střídavý součet…); jeden dělitel napíšete jako dělitelnost(1236, 7), větou „je 1236 dělitelné 7“ nebo 7 | 1236 – pro dělitele bez školního pravidla aplikace vydělí se zbytkem. Prvočísla do 200 najde Eratosthenovým sítem („prvočísla do 50“). Lineární rovnici ax + by = c v celých číslech („3x + 5y = 1, x, y ∈ $\mathbb{Z}$“ nebo čipem $\mathbb{Z}$) řeší přes Bézoutovu rovnost – všechna řešení $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Modulární aritmetika: zbytek 17 mod 5, inverze 3^(-1) mod 11 (z rozšířeného Eukleidova algoritmu, se zkouškou) a mocnina 7^13 mod 13 opakovaným umocňováním na druhou. Na nich stojí šifra RSA – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) spočítá n, φ(n), soukromý klíč d a zprávu zašifruje a zase dešifruje; e a m můžete vynechat.

Jak zadat

`360, rozklad(360), prvocislo(97)`	Rozklad na prvočinitele, test prvočíselnosti.
`NSD(60, 90), NSN(18, 30)`	Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek (i gcd, lcm).
`dělitelé(36), dělitelnost(1236), dělitelnost(1236, 7)`	Dělitelé čísla a znaky dělitelnosti – všechny, nebo jeden dělitel (i věta „je 1236 dělitelné 7“, 7 | 1236).
`prvočísla do 50`	Prvočísla do n (nejvýš 200) Eratosthenovým sítem; i prvocisla(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Lineární rovnice v celých číslech (diofantická); i diofant(3, 5, 1).
`bezout(240, 46)`	Bézoutova rovnost.

`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Zbytek, inverze a mocnina modulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	Šifra RSA s malými čísly.

Ukázky

Rozklad na prvočinitele postupným dělením.

Zadání: `360`

Výsledek

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Postup

- Číslo 360 dělíme postupně nejmenšími prvočísly, dokud nezbude 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Rozklad na prvočinitele: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Prvočíslo – žádný dělitel do odmocniny.

Zadání: `97`

Výsledek

Číslo je prvočíslo.

Postup

- Stačí zkusit prvočísla do $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – žádné z nich číslo 97 nedělí, je to tedy prvočíslo.

NSD z rozkladů na prvočinitele.

Zadání: `NSD(60, 90)`

Výsledek

$$\mathrm{NSD}\,(60, 90) = 30$$

Postup

- Rozklad na prvočinitele: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Rozklad na prvočinitele: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Největší společný dělitel je součin společných prvočinitelů s nejmenšími exponenty:
  $\mathrm{NSD}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

NSN přes NSD Eukleidovým algoritmem.

Zadání: `NSN(60, 90)` Eukleidův algoritmus

Výsledek

$$\mathrm{NSN}\,(60, 90) = 180$$

Postup

- Eukleidův algoritmus – větší číslo vydělíme menším se zbytkem, pak dělitel zbytkem, dokud zbytek není 0; poslední nenulový zbytek je největší společný dělitel

  $$90 = 1 \cdot 60 + 30$$
  $$60 = 2 \cdot 30 + 0$$
  $$\Rightarrow\ \mathrm{NSD}\,(60, 90) = 30$$

- Nejmenší společný násobek je součin čísel dělený jejich největším společným dělitelem

  $$\mathrm{NSN}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\mathrm{NSD}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Dělitelé po dvojicích, počet z rozkladu.

Zadání: `dělitelé(36)`

Výsledek

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Postup

- Dělitele hledáme po dvojicích $d \cdot 36/d$ – stačí zkoušet čísla d do 6, druhý dělitel dvojice k nim dopočítáme

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Kontrola počtu dělitelů z rozkladu na prvočinitele – exponenty zvětšené o 1 vynásobíme:
  $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

Tabulka znaků dělitelnosti.

Zadání: `dělitelnost(1236)`

Výsledek

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Postup

- Znaky dělitelnosti: 2, 5, 10 – poslední číslice; 4, 25 – poslední dvojčíslí; 8 – poslední trojčíslí; 3, 9 – ciferný součet; 6 = 2 · 3 a 12 = 3 · 4 – obě zároveň; 7 – poslední číslici odtrhneme a její dvojnásobek odečteme od zbytku; 11 – střídavý součet číslic

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Dělitelnost sedmi – odtržení poslední číslice.

Zadání: `dělitelnost(1309, 7)`

Výsledek

$$7 \mid 1309$$

Postup

- Dělitelnost sedmi: odtrhneme poslední číslici, její dvojnásobek odečteme od zbylého čísla a opakujeme, dokud nezbude nejvýš dvojciferné číslo – to je dělitelné 7, právě když je dělitelné původní číslo (u velkých čísel bývá rychlejší rovnou dělit):
  $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

Eratosthenovo síto.

Zadání: `prvočísla do 50`

Výsledek

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Postup

- Číslo 2 je prvočíslo – škrtneme všechny jeho násobky; menší násobky už jsou škrtnuté, začneme od $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- Číslo 3 je prvočíslo – škrtneme všechny jeho násobky; menší násobky už jsou škrtnuté, začneme od $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- Číslo 5 je prvočíslo – škrtneme všechny jeho násobky; menší násobky už jsou škrtnuté, začneme od $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- Číslo 7 je prvočíslo – škrtneme všechny jeho násobky; menší násobky už jsou škrtnuté, začneme od $7^2 = 49$: 49
- Eratosthenovo síto: stačí škrtat násobky prvočísel do odmocniny z 50. Neškrtnutá čísla jsou prvočísla – je jich 15

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

Bézoutova rovnost rozšířeným Eukleidovým algoritmem.

Zadání: `bezout(240, 46)`

Výsledek

$$\mathrm{NSD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46$$

Postup

- Rozšířený Eukleidův algoritmus – každý zbytek r zapíšeme jako r = 240·u + 46·v; nový řádek je předposlední minus q-násobek posledního

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- Z posledního nenulového řádku tabulky plyne Bézoutova rovnost: $\mathrm{NSD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Diofantická rovnice přes Bézoutovu rovnost.

Zadání: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Výsledek

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Rovnici $3x + 5y = 1$ řešíme v celých číslech. Má řešení, právě když největší společný dělitel čísel 3 a 5 dělí pravou stranu.
- Rozšířený Eukleidův algoritmus – každý zbytek r zapíšeme jako r = 5·u + 3·v; nový řádek je předposlední minus q-násobek posledního

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- Z posledního nenulového řádku tabulky plyne Bézoutova rovnost: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- Bézoutovu rovnost vynásobíme číslem 1 – dostaneme jedno řešení: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, tedy $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Všechna řešení dostaneme, když k x přičítáme násobky 5 a k y zároveň násobky -3 (levá strana se nezmění); posunem volíme nejmenší nezáporné $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Zkouška: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Mocnina modulo n opakovaným umocňováním na druhou.

Zadání: `7^13 mod 13`

Výsledek

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Postup

- Exponent rozložíme na součet mocnin dvojky:
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Opakovaně umocňujeme na druhou a bereme zbytky modulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- Vynásobíme potřebné mocniny a průběžně bereme zbytky modulo 13
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – klíče, zašifrování a dešifrování.

Zadání: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Výsledek

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Postup

- Modul: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- Eulerova funkce:
  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Eukleidův algoritmus – větší číslo vydělíme menším se zbytkem, pak dělitel zbytkem, dokud zbytek není 0; poslední nenulový zbytek je největší společný dělitel

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{NSD}\,(120, 7) = 1$$

- Veřejný exponent e musí být nesoudělný s φ(n):
  $\mathrm{NSD}\,(7, 120) = 1$ – podmínka platí.
- Rozšířený Eukleidův algoritmus – každý zbytek r zapíšeme jako r = 120·u + 7·v; nový řádek je předposlední minus q-násobek posledního

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- Soukromý exponent d je inverze e modulo φ(n):
  $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Veřejný klíč $(n, e) = (143, 7)$, soukromý klíč $(n, d) = (143, 103)$
- Zašifrování zprávy m: $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Exponent rozložíme na součet mocnin dvojky:
  $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Opakovaně umocňujeme na druhou a bereme zbytky modulo 143
  $9^1 \equiv 9$
  $9^2 \equiv 9^2 = 81$
  $9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$
- Vynásobíme potřebné mocniny a průběžně bereme zbytky modulo 143
  $9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
  $\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
  $126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
  $53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$
- Dešifrování – vyjde původní zpráva:
  $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Exponent rozložíme na součet mocnin dvojky:
  $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Opakovaně umocňujeme na druhou a bereme zbytky modulo 143
  $48^1 \equiv 48$
  $48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
  $48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
  $48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
  $48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
- Vynásobíme potřebné mocniny a průběžně bereme zbytky modulo 143
  $48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
  $\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
  $113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
  $92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
  $100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
  $27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Známá omezení

- Rozklad na prvočinitele umí čísla do 10^{18}; větší prvočíslo jen ověří testem.
- RSA je školní ukázka s malými čísly (n = p·q do zhruba bilionu), ne skutečné šifrování.

15. Úhly ve stupních, minutách a vteřinách

Samotný úhel aplikace převede do všech tvarů: stupně, minuty a vteřiny (5,5° = 5°30′), desetinné stupně, minuty, vteřiny a radiány – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Jen jeden tvar dostanete zápisem „= ?′“, „= ?°“, „= ?″“ nebo „= ? rad“. Radiány na stupně: „π/6 rad“.

Úhly sčítá a odčítá jako ve škole – zvlášť stupně, minuty a vteřiny; 60′ převede na 1°, a když minut není dost, rozmění jeden stupeň na 60′. Násobí a dělí je číslem: 100° : 3 dělí postupně, zbytek stupňů převede na minuty a zbytek minut na vteřiny.

Minuty a vteřiny zapíšete znaky ′ a ″ (na klávesnici aplikace) nebo apostrofem a uvozovkami: 25°30'15". Stupně s funkcí (sin 30°) počítá kapitola Goniometrické rovnice.

Jak zadat

`25°30’15”, 25°30'15", 5,5°`	Úhel – stupně, minuty, vteřiny, i desetinné stupně.
`25°30’ + 18°45’, 3 · 25°30’, 100° : 3`	Součet, rozdíl, násobek a podíl číslem.
`5,5° = ?’, 30° = ? rad, π/6 rad`	Jeden tvar převodu, radiány na stupně.

Ukázky

Desetinné stupně ve všech tvarech.

Zadání: `5,5°`

Výsledek

$$
\begin{aligned}
&5^\circ 30' \\
&= 330' \\
&= 19800'' \\
&= \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}
\end{aligned}
$$

Postup

- Desetinnou část stupně převedeme na minuty (1° = 60'), desetinnou část minuty na vteřiny (1' = 60"): $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- Na minuty: stupně násobíme 60 (1° = 60') a přičteme minuty: $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- Na vteřiny: minuty násobíme 60 (1' = 60"): $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- Na radiány: 180° = π rad, stupně tedy násobíme π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$

Součet – 60′ převedeme na 1°.

Zadání: `25°30′ + 18°45′`

Výsledek

$$44^\circ 15'$$

Postup

- Sčítáme zvlášť stupně, minuty a vteřiny: $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Každých 60" dává 1' a každých 60' dává 1° – převedeme: $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Rozdíl – jeden stupeň rozměníme na 60′.

Zadání: `25°15′ - 18°45′`

Výsledek

$$6^\circ 30'$$

Postup

- Minut (vteřin) je méně, než odčítáme – jeden stupeň (minutu) rozměníme na 60′ (60″): $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Odčítáme zvlášť stupně, minuty a vteřiny: $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Dělení číslem se zbytkem v minutách.

Zadání: `100° : 3`

Výsledek

$$33^\circ 20'$$

Postup

- Dělíme postupně: stupně, zbytek převedeme na minuty a přičteme; minuty, zbytek na vteřiny; vteřiny

$$\begin{aligned} 100^\circ : 3 &= 33^\circ,\ 1^\circ = 60' \\ 60' : 3 &= 20' \\ \Rightarrow\ 100^\circ : 3 &= 33^\circ 20' \end{aligned}$$

Radiány na stupně.

Zadání: `π/6 rad`

Výsledek

$$\begin{aligned} &30^\circ \\ &= 1800' \\ &= 108000'' \end{aligned}$$

Postup

- Z radiánů na stupně: π rad = 180°, násobíme tedy 180°/π: $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- Na minuty: stupně násobíme 60 (1° = 60′) a přičteme minuty: $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- Na vteřiny: minuty násobíme 60 (1′ = 60″): $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Známá omezení

- Rovnice s úhly v minutách (x + 25°30′ = 90°) zatím ne.

16. Procenta, poměr a trojčlenka

Procenta zadáte krátce, bez slovní úlohy: část „20 % z 480“, základ „15 % = 45“, počet procent „96 z 480 = ? %“, zdražení a zlevnění „480 + 15 %“, „480 − 20 %“ a původní hodnotu před změnou „x − 20 % = 384“. Aplikace počítá přes 1 % jako dnes ve škole (1 % = 480 : 100 = 4,8); čipem „Vzorcem“ přepnete na část = základ · počet procent s procenty jako desetinným číslem (480 · 0,2).

Poměr „12 : 18“ zkrátí na 2 : 3, celek rozdělí v poměru („300 v poměru 2 : 3 : 5“ – součet dílů, jeden díl, jednotlivé části) a úměru „3 : 4 = x : 20“ vyřeší součinem vnějších a vnitřních členů. Poměr zlomků („2/3 : 4/9“) nejdřív vynásobí nejmenším společným násobkem jmenovatelů; uvnitř delšího výrazu je dvojtečka dělení.

Trojčlenku zapíšete jako ve škole – dvě řádky se třemi tečkami (nebo ..., →): „10 kg … 250 Kč, 12 kg … x“, jednotky můžete vynechat. Výchozí je přímá úměrnost, čipem „Nepřímá“ (nebo slovem „nepřímá“ za čárkou) nepřímá. Jednoduchý úrok: úrok(jistina, sazba %, roky, daň %) – daň je nepovinná. Složený úrok: složený úrok(vklad, sazba %, roky, daň %, frekvence) – daň a frekvence (ročně, pololetně, čtvrtletně, měsíčně, spojitě) jsou nepovinné; další úlohy (spoření, úvěr, úročení na dny) jsou v Aplikacích, kapitola Ekonomie.

Jak zadat

`20 % z 480, 15 % = 45, 96 z 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Procenta – část, základ, počet procent, změna, původní hodnota.
`12 : 18, 300 v poměru 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Krácení poměru, rozdělení v poměru, úměra.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	Trojčlenka – přímá i nepřímá úměrnost.
`úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Jednoduchý úrok s daní.
`složený úrok(10000, 3 %, 5, 15 %, měsíčně)`	Složený úrok s daní a frekvencí připisování.

Ukázky

Část přes 1 %.

Zadání: `20 % z 480`

Výsledek

96

Postup

- Nejdřív 1 % – základ (celek, 100 %) vydělíme 100:
  $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Hledaná procenta jsou tolikrát 1 %: $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Zlevnění vzorcem.

Zadání: `480 - 20 %` Vzorcem část = základ · počet procent

Výsledek

384

Postup

- Snížená hodnota = základ · (1 − počet procent),
  $20\,\% = 0{,}2$: $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

Původní cena před slevou.

Zadání: `x - 20 % = 384`

Výsledek

$x = 480$

Postup

- Původní hodnota je 100 %; po snížení z ní zbylo méně procent – a to je známá hodnota:
  $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- 1 % dostaneme, když známou hodnotu vydělíme počtem jejích procent: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- Základ je 100 %, tedy stokrát 1 %:
  $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Rozdělení v poměru.

Zadání: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Výsledek

$$60,\ 90,\ 150$$

Postup

- Celek rozdělíme na tolik dílů, kolik je součet členů poměru: $2 + 3 + 5 = 10$
- Na jeden díl připadá: $300 : 10 = 30$
- Každá část má tolik dílů, kolik říká její člen poměru: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; zkouška $60 + 90 + 150 = 300$

Poměr zlomků.

Zadání: `2/3 : 4/9`

Výsledek

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Postup

- Zlomky odstraníme – všechny členy poměru vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů 9
  $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$
- Poměr zkrátíme – všechny členy vydělíme jejich největším společným dělitelem 2:
  $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Nepřímá úměrnost.

Zadání: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Nepřímá

Výsledek

$$x = 8\,\text{dní}$$

Postup

- Zápis trojčlenky. Nepřímá úměrnost – kolikrát víc jedné veličiny, tolikrát méně druhé, šipky míří proti sobě

  $$\begin{array}{lcc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$

- Podle šipek sestavíme úměru – druhý poměr je převrácený: $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Jednoduchý úrok s daní 15 %.

Zadání: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Výsledek

$$10000 + 510 = 10510$$

Postup

- Úrok = jistina · p/100 · doba v letech:
  $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Z úroku se odvádí daň $15\,\%$, zbude čistý úrok:
  $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- Na konci je jistina i s úrokem: $10000 + 510 = 10510$

Složený úrok s daní 15 % a měsíčním připisováním.

Zadání: `složený úrok(10000, 3 %, 5, 15 %, měsíčně)`

Výsledek

$$K_n \approx 11\,358{,}31$$

Postup

- Zadáno: $K_0 = 10\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Převedeme jednotky:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Při jednoduchém úročení se úrok počítá stále z původního vkladu: K_n = K₀(1 + pn). Při složeném se úroky připisují a dál úročí: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), kde m je počet připsání za rok (roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční). Spojité úročení je limita pro m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Daň z úroků d (v ČR 15 %) snižuje sazbu na p(1 − d). Efektivní roční sazba porovná různé frekvence. Diskontování je opačný výpočet – kolik vložit dnes. S inflací π je reálná hodnota K_n/(1 + π)^n. Smíšené úročení (jak banky připisují úroky jednou ročně) úročí celé roky složeně a zbytek posledního roku jednoduše: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Rovnice modelu:
  $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Připsání úroků za rok: $m = 12$
- Sazba po zdanění úroků:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Efektivní roční sazba: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Dosadíme: $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11\,358{,}31$
- Úroky celkem: $K_n - K_0 \approx 1\,358{,}31$

Známá omezení

- Slovní úlohy zatím ne – zadání je potřeba zapsat krátce; složené úročení s pravidelnými vklady a další finanční úlohy jsou ve formulářích v Aplikacích.

17. Převody jednotek

Převod zapíšete jako „5 m² = ? cm²“ (nebo „5 m2 na cm2“). Aplikace napíše převodní vztah a podle něj násobí (na menší jednotku) nebo dělí (na větší); u desetinných jednotek dodá, o kolik míst se posune desetinná čárka. U ploch a objemů vysvětlí, proč je převodní číslo mocninou: 1 m = 100 cm, tedy 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Délka mm až km, plocha mm² až km² i ar a hektar, objem mm³ až m³ i ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), hmotnost mg až t, čas s, min, h, d – i složený „1 h 30 min“ a výsledek v hodinách a minutách –, rychlost km/h a m/s (1 m/s = 3,6 km/h) a teplota °C, K, °F podle vzorců.

Jak zadat

`5 m² = ? cm², 3,5 l na m³, 1 h 30 min = ? min`	Hodnota s jednotkou, „= ?“ (nebo „na“) a cílová jednotka.

Ukázky

Plocha – převodní číslo je druhá mocnina.

Zadání: `5 m² = ? cm²`

Výsledek

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- U ploch a objemů se převádějí oba (všechny tři) rozměry – převodní číslo délek umocníme
  $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Na menší jednotku – vyjde víc jednotek, číslo násobíme:
  $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Násobíme-li jedničkou s nulami (zde 4), posuneme desetinnou čárku doprava o tolik míst, kolik má nul; chybějící místa doplníme nulami.

Litry na krychlové metry.

Zadání: `3,5 l = ? m³`

Výsledek

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Postup

- Převodní vztah: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- Na větší jednotku – vyjde méně jednotek, číslo dělíme: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Dělíme-li jedničkou s nulami (zde 3), posuneme desetinnou čárku doleva o tolik míst, kolik má nul; chybějící místa doplníme nulami.

Minuty na hodiny i v hodinách a minutách.

Zadání: `150 min = ? h`

Výsledek

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Postup

- Převodní vztah: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- Na větší jednotku – vyjde méně jednotek, číslo dělíme: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- V hodinách a minutách: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Rychlost – dělíme 3,6.

Zadání: `72 km/h = ? m/s`

Výsledek

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Převodní vztah: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- Na větší jednotku – vyjde méně jednotek, číslo dělíme: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Teplota vzorcem.

Zadání: `20 °C = ? K`

Výsledek

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Postup

- Teploty se nepřevádějí násobkem, ale vzorcem (stupnice mají jinou nulu):
  $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Logika a množiny

Výrok se spojkami ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ aplikace vyhodnotí pravdivostní tabulkou – sloupec pro každou spojku, jedničky pro pravdu – a řekne, jestli je to tautologie, kontradikce, nebo jen splnitelný výrok; u splnitelného připíše disjunktivní a konjunktivní normální formu a zjednodušený tvar.

Čipem „Negace“ výrok neguje krok za krokem podle de Morganových zákonů, negace implikace a ekvivalence. Výrok s kvantifikátory (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) neguje rovnou – obecný kvantifikátor se změní na existenční, nerovnost na opačnou. U implikace nabídne i obměněnou a obrácenou implikaci.

Množiny zadané výčtem ({1, 2, 3}) nebo intervalem ((1; 5), ⟨3; 7)) a jejich sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk vůči základní množině U a symetrický rozdíl aplikace spočítá operaci po operaci. U výčtů nakreslí Vennův diagram s prvky v jednotlivých oblastech, u intervalů výsledek na číselné ose.

Bez zadaných prvků (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) ověří rovnost množinových výrazů tabulkou příslušnosti a Vennovými diagramy obou stran; samotný výraz (A \ B) ∪ (B \ C) vybarví ve Vennově diagramu. Rozhodne také, jestli platí 3 ∈ A nebo A ⊆ B.

Jak zadat

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Spojky z klávesnice aplikace (záložka ∧∪) nebo z fotky (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	Implikace a ekvivalence šipkami z běžné klávesnice. &, | a ! aplikace jako spojky nečte – znamenají absolutní hodnotu a faktoriál.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Kvantifikátory s oborem (∈ ℝ) nebo podmínkou (> 0), za dvojtečkou výrok.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	Úloha zapsaná slovem – negace, obměněná a obrácená implikace (i anglicky negation, contrapositive, converse).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Množina výčtem (prvky oddělené čárkou, se středníky při desetinné čárce), intervalem, základní množina U; každá definice na vlastní řádek nebo za čárkou.
`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	Sjednocení, průnik, rozdíl (i \), doplněk A', symetrický rozdíl; průnik se vyhodnocuje před ostatními.

`3 ∈ A, A ⊆ B`	Prvek množiny a podmnožina – platí, nebo neplatí.

Ukázky

Tautologie – implikace je ekvivalentní se svou obměnou.

Zadání: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Výsledek

Výrok je tautologie – je pravdivý pro každé ohodnocení.

Postup

- Pravdivostní tabulka (1 – pravda, 0 – nepravda), sloupec pro každou spojku

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- V posledním sloupci jsou samé jedničky – výrok je pravdivý pro každé ohodnocení, je to tautologie.

Splnitelný výrok s normálními formami.

Zadání: `(p ∨ q) ⇒ r`

Výsledek

Výrok je splnitelný – pravdivý jen pro některá ohodnocení. Zjednodušený ekvivalentní tvar:
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Postup

- Pravdivostní tabulka (1 – pravda, 0 – nepravda), sloupec pro každou spojku

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- V posledním sloupci jsou jedničky i nuly – výrok je splnitelný, ale není to tautologie.
- Zjednodušený tvar: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; úplná disjunktivní normální forma – disjunkce řádků, kde je výrok pravdivý
  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- Konjunktivní normální forma – z řádků, kde je výrok nepravdivý
  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Negace de Morganovými zákony krok za krokem.

Zadání: `p ∧ (q ⇒ r)` Negace

Výsledek

$$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

Postup

- Negace výroku: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- De Morganův zákon, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$: $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- Negace implikace, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$: $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Negace výroku s kvantifikátorem.

Zadání: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Výsledek

$$\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$$

Postup

- Negace výroku: $\neg\big(\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 > 0\big)$
- Negace obecného výroku – „pro všechna platí“ se změní na „existuje, pro které neplatí“: $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \neg\big(x^2 + 1 > 0\big)$
- Negace rovnosti či nerovnosti je opačný vztah ($<$ na $\geq$, $=$ na $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

Obměněná implikace.

Zadání: `p ⇒ ¬q` Obměněná implikace

Výsledek

$$q \Rightarrow \neg p$$

Postup

- Obměněná implikace k $A \Rightarrow B$ je $\neg B \Rightarrow \neg A$ – je s ní ekvivalentní: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, po úpravě negací $q \Rightarrow \neg p$

Doplněk sjednocení s Vennovým diagramem.

Zadání: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

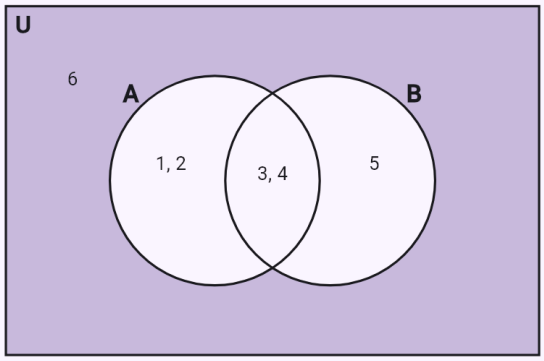
Výsledek

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Postup

- Zadáno: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Zadáno: $B = \{3, 4, 5\}$
- Zadáno: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sjednocení – prvky, které patří aspoň do jedné z množin: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Doplněk – prvky základní množiny, které do množiny nepatří: $(A \cup B)' = \{6\}$

Graf



Průnik intervalů na číselné ose.

Zadání: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

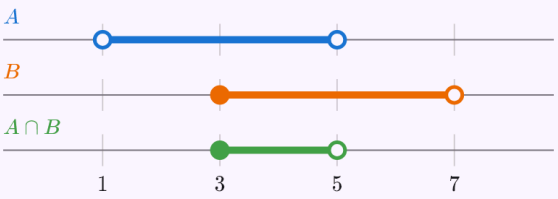
Výsledek

$$A \cap B = \langle 3;\ 5)$$

Postup

- Zadáno: $A = (1;\ 5)$
- Zadáno: $B = \langle 3;\ 7)$
- Průnik – prvky, které patří do obou množin: $A \cap B = \langle 3;\ 5)$

Graf



Každá zadaná množina má na ose svůj řádek, zeleně je výsledek. Plné kolečko do množiny patří, prázdné ne.

Distributivní zákon tabulkou příslušnosti.

Zadání: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Výsledek

Rovnost platí – obě strany jsou tatáž množina.

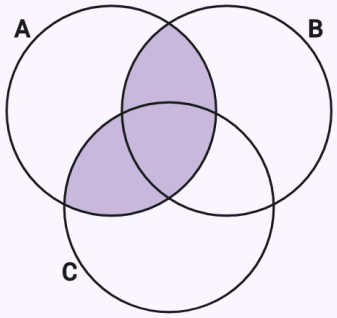
Postup

- Tabulka příslušnosti – pro každou možnost, do kterých množin prvek patří (1 – patří), porovnáme obě strany

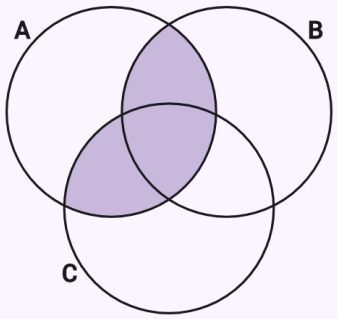
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Graf

$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



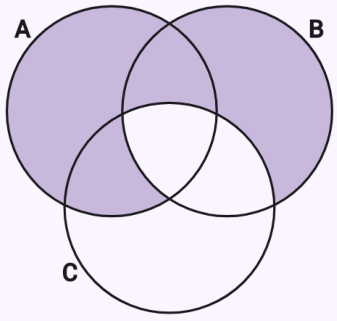
Množinový výraz ve Vennově diagramu.

Zadání: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Výsledek

$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

Graf



Známá omezení

- Pravdivostní tabulka nejvýš pro 5 proměnných (32 řádků), Vennův diagram nejvýš pro 4 množiny.
- Množiny zadané vlastností ({x ∈ ℝ: x² < 4}) zatím aplikace nečte – zapište je intervalem.

19. Komplexní čísla

Komplexní číslo zapište s imaginární jednotkou i: 1 - i√3 (nebo 1 - i*sqrt(3)), v goniometrickém tvaru 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) nebo cis(pi/3), v exponenciálním 3e^(i pi/4); úhly můžete zadat i ve stupních (cos 60° + i sin 60°). Čísla lze pojmenovat, každé na vlastním řádku (z_1 = 1 + i), a na poslední řádek napsat výraz s jejich jmény (z_1/z_2, z^8).

U samotného čísla aplikace spočítá absolutní hodnotu $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ a argument φ – z tabulkových hodnot kosinu a sinu, jinak přes ostrý úhel z $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$ podle kvadrantu (přesně s arctg i přibližně v radiánech a ve stupních) – a zapíše goniometrický a exponenciální tvar. Číslo v goniometrickém tvaru převede na algebraický. Argument je v intervalu $\langle 0; 2\pi)$, čipem „Hlavní hodnota argumentu“ ho přepnete na $(-\pi; \pi\rangle$. Graf ukáže číslo v Gaussově rovině jako vektor s obloukem argumentu.

Mocninu (1 + i)^10 aplikace počítá Moivreovou větou a argument zmenší o násobky 2π; součin a podíl přes absolutní hodnoty a argumenty. Čipem zvolíte „Goniometrický tvar“ (u mocniny „Moivreova věta“) nebo „Algebraický tvar“; dělení algebraických čísel rozšířením komplexně sdruženým číslem je v kapitole Úpravy výrazů. Odmocnina root(3, 8i) i binomická rovnice $z^3 = 8i$ dají všech n kořenů ze vzorce $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$; v grafu leží ve vrcholech pravidelného n-úhelníku. Rovnice s neznámou z se řeší rovnou v komplexním oboru, čip „Obor řešení:“ ji přepne na $\mathbb{R}$. Kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty ($z^2 + i = 2z$) aplikace řeší doplněním na čtverec, $(z - 1)^2 = 1 - i$, a odmocninu komplexního čísla hledá jako a + bi porovnáním reálných a imaginárních částí.

Rovnici s komplexně sdruženým číslem $\bar{z}$ (klávesa $\bar{z}$ vloží conj(z), z fotky \bar{z}), s |z|, Re z a Im z aplikace řeší dosazením z = x + yi: obě strany upraví na tvar a + bi, porovná reálné a imaginární části a vzniklou soustavu dvou rovnic pro x a y vyřeší – jednu rovnici vyjádří a dosadí do druhé, a když jde rozložit na součin (y(2x + 1) = 0), rozdělí řešení na případy. Řešení ukáže jako body Gaussovy roviny. Když se imaginární části srovnají samy ($|z - 1| = 2$, Re z ≥ 1, $|z - i| < |z + 1|$), je výsledkem množina bodů: aplikace umocní absolutní hodnoty, doplní na čtverce a popíše kružnici (kruh, vnějšek kruhu), přímku, polorovinu nebo osu úsečky. Více podmínek, každou na vlastní řádek nebo oddělené čárkou ($|z| \leq 2$, Re z > 0), i dvojitou nerovnost ($1 < |z - 1| \leq 2$) zakreslí jako průnik – vybarvenou oblast, plná hranice do množiny patří, čárkovaná ne.

Jak zadat

`1 - i*sqrt(3)`	Algebraický tvar s imaginární jednotkou i.
`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	Goniometrický tvar, zkráceně cis φ.
`3e^(i pi/4)`	Exponenciální tvar.

`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Pojmenovaná čísla, každé na vlastním řádku, a výraz s nimi.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Všechny n-té odmocniny, binomická rovnice.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	Komplexně sdružené číslo, reálná a imaginární část.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Množina bodů v Gaussově rovině, více podmínek po řádcích.

Ukázky

Absolutní hodnota, argument z tabulkových hodnot, goniometrický a exponenciální tvar.

Zadání: `1 - i*sqrt(3)`

Výsledek

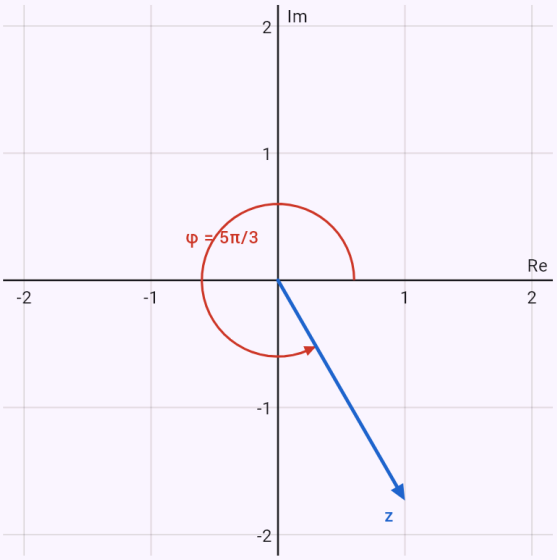
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Postup

- Absolutní hodnota |z| = √(a² + b²):
  $$\left|1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – jsou to tabulkové hodnoty
  $$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- Goniometrický tvar z = |z|(cos φ + i sin φ):
  $$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- Exponenciální tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Argument, který není v tabulce – ostrý úhel a kvadrant.

Zadání: `-3 + 4i`

Výsledek

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

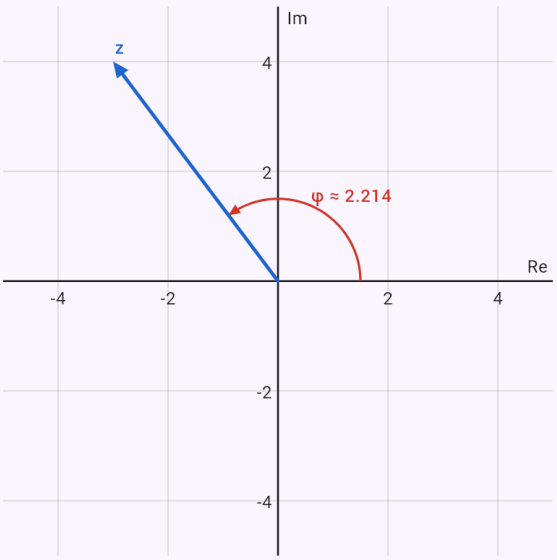
$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Postup

- Absolutní hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- Ostrý úhel α z tg α = |b/a|. Číslo leží v 2. kvadrantu, odtud argument
  $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$
  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- Goniometrický tvar z = |z|(cos φ + i sin φ)
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$
- Exponenciální tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Z goniometrického tvaru na algebraický.

Zadání: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Výsledek

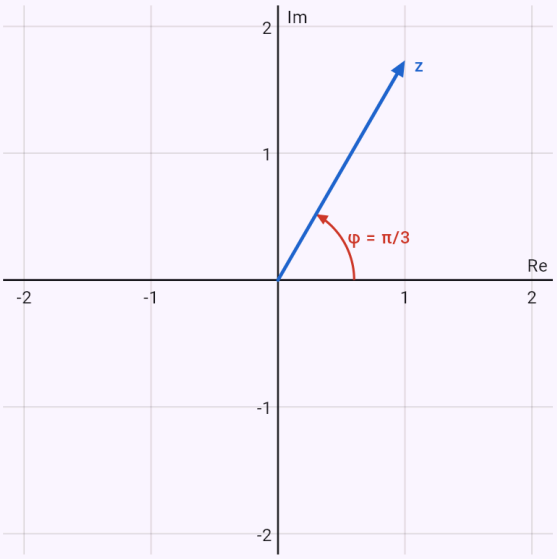
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Postup

- Číslo je zadané v goniometrickém (exponenciálním) tvaru – absolutní hodnotu a argument přečteme
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- Algebraický tvar – dosadíme hodnoty kosinu a sinu a roznásobíme
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- Exponenciální tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Moivreova věta.

Zadání: `(1 + i)^10` Moivreova věta

Výsledek

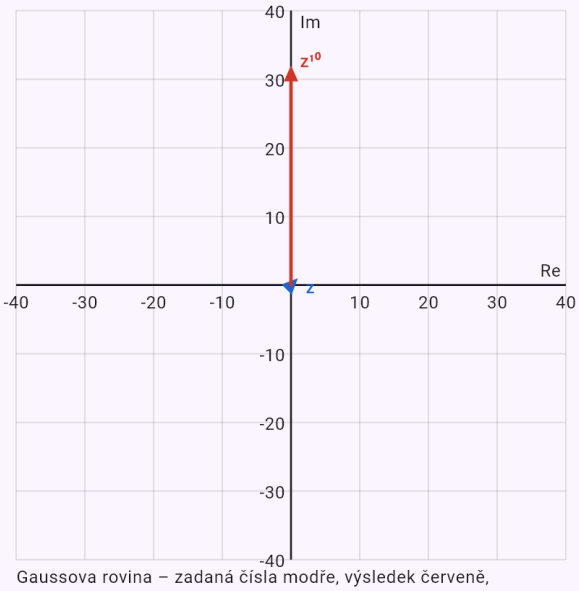
$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

Postup

- Absolutní hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – jsou to tabulkové hodnoty
  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Moivreova věta $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- Argument upravíme do intervalu $\langle 0; 2\pi)$ – odečteme (přičteme) násobek plného úhlu: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- Algebraický tvar – dosadíme hodnoty kosinu a sinu a roznásobíme: $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Podíl v goniometrickém tvaru.

Zadání: `z_1 = 1 + i`

`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Goniometrický tvar

Výsledek

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

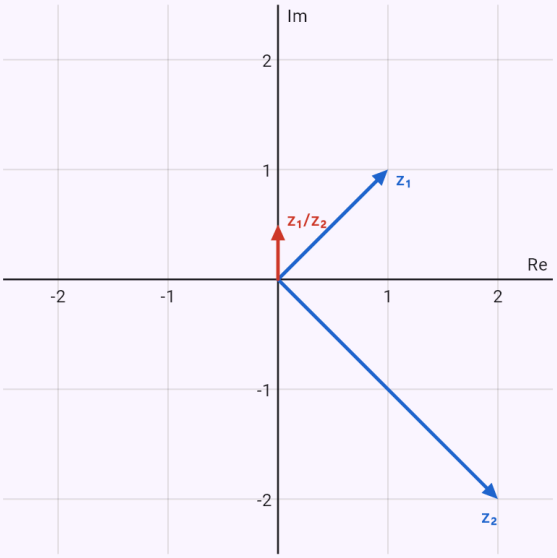
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Postup

- Absolutní hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – jsou to tabulkové hodnoty
  $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- Absolutní hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – jsou to tabulkové hodnoty
  $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$
- Při dělení se absolutní hodnoty dělí a argumenty odečítají
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}($
- Argument upravíme do intervalu $\langle 0; 2\pi)$ – odečteme (přičteme) násobek plného úhlu: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- Algebraický tvar – dosadíme hodnoty kosinu a sinu a roznásobíme

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0 + i) = \frac{1}{2}i$$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Binomická rovnice – tři kořeny ve vrcholech trojúhelníku.

Zadání: `z^3 = 8i`

Výsledek

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

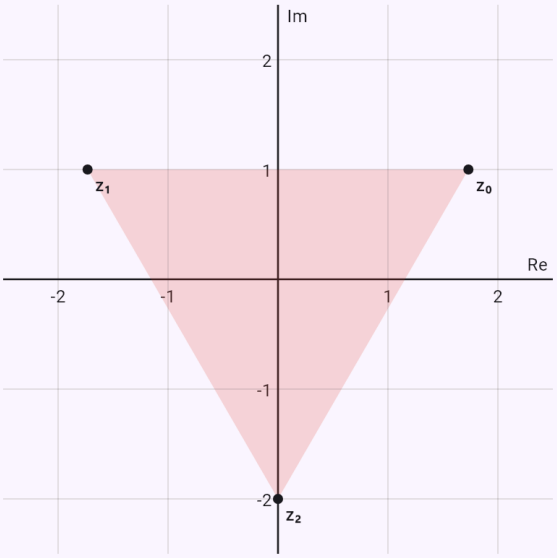
Postup

- Binomická rovnice $z^n = a$ – její kořeny jsou všechny n-té odmocniny čísla a: $z^3 = 8i$
- Absolutní hodnota |z| = √(a² + b²): $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- Číslo leží na ose, argument určíme přímo: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Všech 3 kořenů dává vzorec $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$

  $$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Pro k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Pro k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Pro k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- Kořeny leží v Gaussově rovině ve vrcholech pravidelného 3-úhelníku vepsaného do kružnice se středem 0 a poloměrem 2

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Rovnice s komplexně sdruženým číslem – porovnání reálných a imaginárních částí.

Zadání: `z + 2conj(z) = 3 - i`

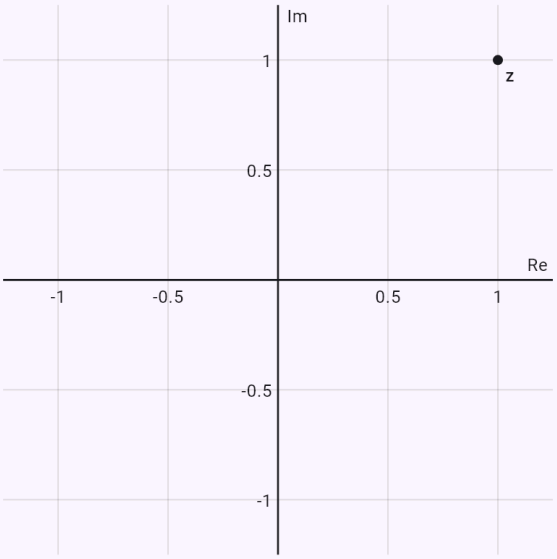
Výsledek

$$z = 1 + i$$

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y jsou reálná čísla: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Obě strany upravíme na tvar a + bi: $3x - yi = 3 - i$
- Komplexní čísla se rovnají, když se rovnají jejich reálné i imaginární části: $3x = 3$ a $-y = -1$
- Dosadíme $y = 1$ do druhé rovnice: $3x = 3$
- Převedeme vše na jednu stranu: $3x - 3 = 0$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $3x = 3$
- Vydělíme koeficientem 3: $x = 1$

Graf



Gaussova rovina – řešení rovnice jako body: na vodorovné ose reálná část, na svislé imaginární.

Rovnice z² = z̄ – rozklad na součin a řešení po případech, čtyři body.

Zadání: `z^2 = conj(z)`

Výsledek

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

Řešit numerickou metodou:

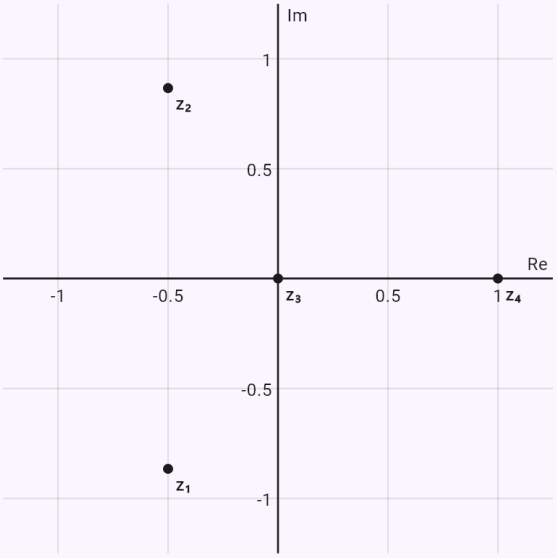
Σ Tečny (Newton) | Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y jsou reálná čísla: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Obě strany upravíme na tvar a + bi: $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Komplexní čísla se rovnají, když se rovnají jejich reálné i imaginární části: $x^2 - y^2 = x$ a $2xy = -y$
- Rovnici rozložíme na součin – je nulový, když je nulový některý z činitelů

  $2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$
- Dosadíme $x = -\frac{1}{2}$ do druhé rovnice: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Převedeme vše na jednu stranu: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Vypočítáme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Dosadíme $y = 0$ do druhé rovnice: $x^2 = x$
- Převedeme vše na jednu stranu: $x^2 - x = 0$
- Vypočítáme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Graf



Gaussova rovina – řešení rovnice jako body: na vodorovné ose reálná část, na svislé imaginární.

Průnik kruhu a poloroviny – vybarvená oblast, čárkovaná hranice do ní nepatří.

Zadání: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

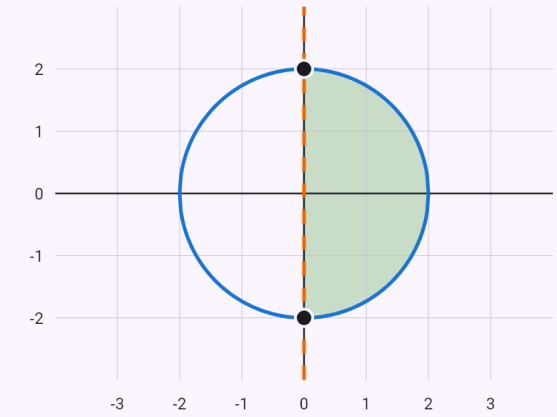
Výsledek

$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y jsou reálná čísla: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}\, z = x$
- 1. podmínka pro x a y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Obě strany jsou nezáporné, umocníme je na druhou: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Je to kruh se středem 0 a poloměrem 2 i s hraniční kružnicí.
- 2. podmínka pro x a y: $x > 0$
- Je to polorovina vpravo od přímky $x = 0$, hraniční přímka do ní nepatří.
- 1. nerovnice: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Hranicí je křivka $x^2 + y^2 = 4$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
- Dosadíme bod $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- 2. nerovnice: $x > 0$
- Hranicí je křivka $x = 0$ – kreslíme ji čárkovaně, její body k řešení nepatří.
- Dosadíme bod $[1;\ 0]$: $1 > 0$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- Řešením soustavy je společná část těchto oblastí – v grafu je vybarvená.
- Rohy oblasti (průsečíky hranic): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Graf



$|z| \leq 2 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 \leq 4$
$\mathrm{Re}\,(z) > 0 \ \Leftrightarrow\ x > 0$

Gaussova rovina – na vodorovné ose x = Re z, na svislé y = Im z. Množinou bodů je vybarvená oblast. Plná hranice do ní patří, čárkovaná ne.

Body stejně vzdálené od i a od −1 – osa úsečky.

Zadání: `|z - i| = |z + 1|`

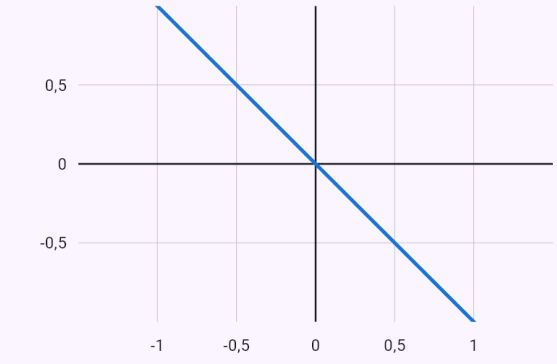
Výsledek

$$y = -x$$

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y jsou reálná čísla: $z = x + yi$
- Podmínka pro x a y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Obě strany jsou nezáporné, umocníme je na druhou: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- Jsou to body stejně vzdálené od bodů i a -1 – osa úsečky s krajními body i a -1: $y = -x$

Graf



$|z - i| = |z + 1|$

Gaussova rovina – na vodorovné ose x = Re z, na svislé y = Im z. Množinou bodů je zakreslená čára.

Známá omezení

- Kořeny s argumentem mimo tabulkové hodnoty jsou v goniometrickém tvaru a přibližně v algebraickém.
- Množinu bodů aplikace popíše, když je to kružnice (kruh), přímka (polorovina) nebo osa úsečky; jiné kuželosečky (Im $z^2 = 2$) jen zakreslí a součet absolutních hodnot ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, elipsa) zatím neumí.
- Soustavu pro x a y, kterou nejde řešit vyjádřením jedné neznámé, aplikace vyřeší bez postupu.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace