Mathtrace – příručka

VI. Aplikace: fyzika a technika

Obsah

VI. Aplikace: fyzika a technika

42. Aplikace diferenciálních rovnic

43. Fyzika

44. Statika a pružnost

45. Astronomie a astrofyzika

46. Aplikace komplexní analýzy

42. Aplikace diferenciálních rovnic

Aplikace najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“ – dlaždice oborů, které si zvolíte v nastavení (ozubené kolo, „Moje obory“), a jednotlivé aplikace připnuté špendlíkem v seznamu nebo ve formuláři; „Všechny aplikace“ je ukáže po oborech (aplikace může patřit do víc oborů, třeba RC obvod do fyziky i elektrotechniky). Diferenciální rovnice používá formulář s 23 modely: radiouhlíková metoda, rozpad a poločas, exponenciální růst, rozpadová řada, Newtonovo ochlazování (i doba smrti ze dvou měření), chemická kinetika 0.–2. řádu, lék v krvi (jedna dávka, opakované dávky, infuze), alkohol v krvi, spoření a splácení úvěru, obvody RC, RL a RLC, kmitání pružiny, pád s odporem vzduchu, vytékání nádoby, směšování v nádrži, logistický a Gompertzův růst, populace s lovem, epidemie SIR, dravec a kořist, konkurence dvou druhů a chemostat.

Vyberete model, jeho variantu a co hledáte; konstanty (poločas ^{14}C, tíhové zrychlení, …) jsou předvyplněné a jdou přepsat. U každé veličiny i u výsledku si zvolíte jednotku – aplikace hodnoty převede (převod je v postupu). Ikonka „?“ u modelu vysvětlí, jak se k jeho rovnici došlo.

Postup začíná sestavením modelu (proč právě tahle rovnice), pokračuje řešením rovnice (separace proměnných, integrační faktor, charakteristická rovnice), dosazením podmínek a vyjádřením hledané veličiny a končí dosazením čísel. Soustavy (SIR, dravec–kořist, konkurence, chemostat) se řeší numericky metodou Runge–Kutta, přesně pak rovnovážné stavy a jejich stabilita. Graf ukáže veličiny v čase s vyznačenou odpovědí, u soustav i fázovou rovinu.

Ukázky

Stáří nálezu, ve kterém zbývá 35 % ¹⁴C.

Zadání: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Výsledek

$$t \approx 8700\,\text{let}$$

Postup

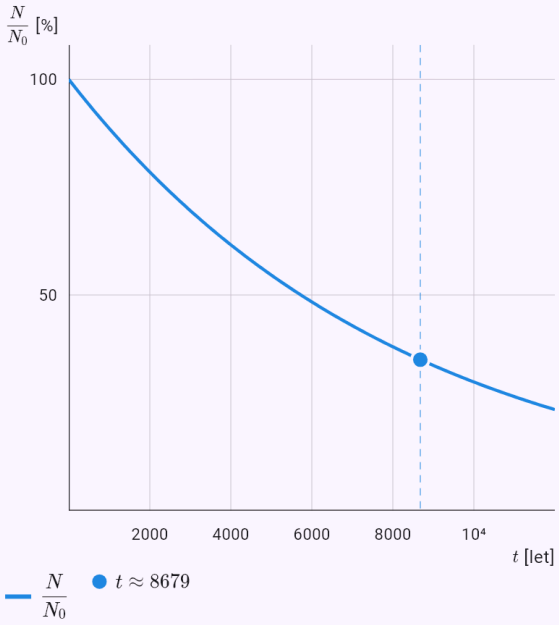
- Hledáme t; zadáno: $T_{1/2} = 5730\,\text{let}, \quad \frac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Převedeme jednotky: $\frac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Živé organismy přijímají uhlík z ovzduší, a proto obsahují stejný podíl radioaktivního izotopu ¹⁴C jako atmosféra. Po smrti příjem ustane a ¹⁴C se rozpadá. Počet rozpadů za jednotku času je úměrný počtu jader, která ještě zbývají: dN/dt = −λN, kde λ je rozpadová konstanta. Řešením je N = N₀·e^(−λt) a za poločas T½ = 5730 let ubude polovina, takže λ = ln 2 / T½. Ze zbývajícího podílu ¹⁴C (nebo z poměru naměřené aktivity a aktivity živého vzorku) vypočítáme stáří. Rovnice modelu: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separujeme proměnné: $\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Dosadíme počáteční podmínku $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- Za poločas klesne množství na polovinu – rozpadová konstanta

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\text{rok}^{-}$$

- Vyjádříme hledanou veličinu: $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N_0}{N}$
- Dosadíme: $t = \frac{5730}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\text{let}$

- Laboratoře uvádějí „radiouhlíkové stáří“ s Libbyho poločasem 5568 let a přepočítávají ho kalibrační křivkou (obsah ¹⁴C v atmosféře nebyl vždy stejný) – skutečné stáří se proto může o něco lišit.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Doba smrti: tělo mělo při nálezu 30 °C, o hodinu později 28 °C, v místnosti je 20 °C.

Zadání: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

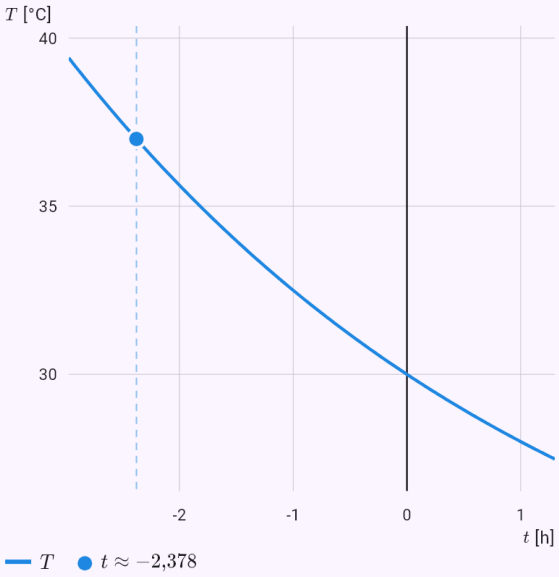
Výsledek

$$t \approx -2{,}38\,\mathrm{h}$$

Postup

- Hledáme t; zadáno $T_0 = 30\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_a = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad t_1 = 1\,\mathrm{h}, \quad T_1 = 28\,^\circ\mathrm{C},$
- Těleso předává teplo okolí tím rychleji, čím větší je rozdíl teplot: dT/dt = −k(T − Tₐ), kde Tₐ je teplota okolí a k závisí na tělese (velikost, materiál, proudění vzduchu). Řešením je T = Tₐ + (T₀ − Tₐ)·e^(−kt) – rozdíl teplot klesá exponenciálně. Konstantu k lze určit ze dvou měření. Kriminalisté tak odhadují dobu smrti: změří teplotu těla při nálezu a o něco později a dopočítají, kdy mělo tělo 37 °C. Rovnice modelu: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Separujeme proměnné: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Dosadíme počáteční podmínku $T(0) = T_0$: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- Konstantu k určíme z druhého měření $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Vyjádříme hledanou veličinu $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Dosadíme: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\mathrm{h}$
- Záporný čas znamená dobu před prvním měřením (u určení doby smrti tolik hodin před nálezem).

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Lék 500 mg každých 8 hodin – ustálená hladina mezi dávkami.

Zadání: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

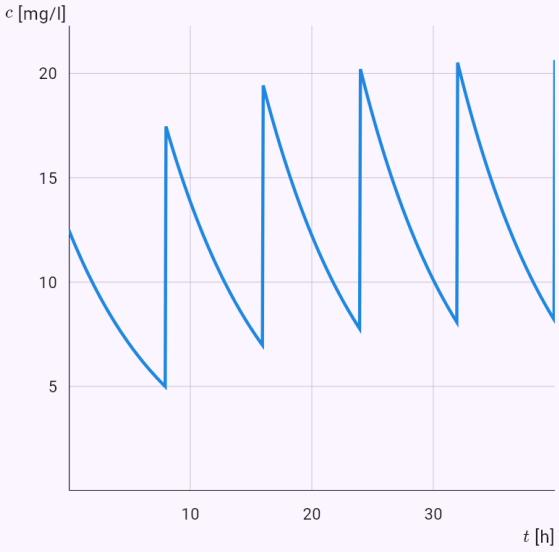
Výsledek

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$$

Postup

- Hledáme c_{max}; zadáno $D = 500\,\mathrm{mg}, \quad V = 40\,\mathrm{l}, \quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h}, \quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Lék podaný do krve se rozptýlí v distribučním objemu V; ledviny a játra ho vylučují rychlostí úměrnou koncentraci: dc/dt = −kc, kde k = ln 2 / T½ (biologický poločas). Po jedné dávce D je c = (D/V)·e^(−kt). Při opakovaném podávání po intervalu τ se zbytky sčítají (geometrická řada) a hladina se ustálí mezi c_min a c_max. Při infuzi rychlostí R platí dc/dt = R/V − kc a koncentrace se blíží ustálené hodnotě R/(kV). Rovnice modelu: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Počáteční koncentrace po podání dávky: $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Eliminační konstanta z biologického poločasu: $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h^{-1}}$
- Separujeme proměnné: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln|c| = -kt + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C: $c = Ce^{-kt}$
- Dosadíme počáteční podmínku $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $c = c_0 e^{-kt}$
- Podíl léku, který zbude do další dávky: $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155 \cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Vyjádříme hledanou veličinu $c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q}, \quad c_{min} = q\,c_{max}$
- Dosadíme: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- Dosadíme: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Kumulační faktor (kolikrát je ustálená hladina vyšší než po jedné dávce): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Graf



Jak se veličiny mění v čase.

Měsíční splátka úvěru 1 000 000 Kč na 20 let při úroku 5 %.

Zadání: model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];

```
kind=loan)
```

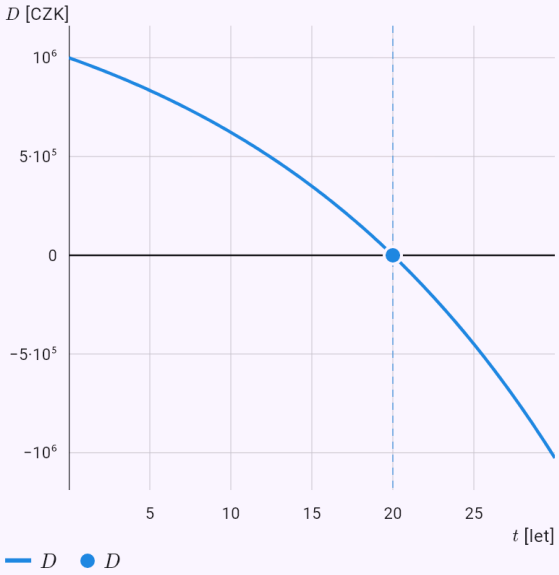
Výsledek

$$a \approx 6\,592\,\text{Kč/měs.}$$

Postup

- Hledáme a; zadáno
  $D_0 = 1\,000\,000\,\text{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \text{ročně}, \quad t = 20\,\text{let},$
- Převedeme jednotky: $r = 5\,\%\ \text{ročně} = 0{,}05\,\text{rok}^{-1}$
- Při spojitém úročení přibývá úrok v každém okamžiku úměrně zůstatku: dB/dt = rB, kde r je roční úroková sazba. Pravidelné vklady a zůstatek zvyšují (dB/dt = rB + a), splátky úvěru dluh snižují (dD/dt = rD − a). Rovnici vyřešíme separací proměnných a z řešení dopočítáme zůstatek, dobu splácení nebo výši splátky (spojitá obdoba anuity). Rovnice modelu: $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Separujeme proměnné: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C:
  $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Dosadíme počáteční podmínku $D(0) = D_0$:
  $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
  $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- Spojité úročení je model – banky úročí měsíčně nebo ročně, výsledky se liší jen málo.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Dosadíme
  $a = \frac{0{,}05(1\,000\,000 e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79\,100\,\text{Kč/rok}$
- Celkem zaplaceno: $a\,t = 1\,582\,000\,\text{CZK}$
- Převedeme jednotky:
  $a \approx 79\,100\,\text{Kč/rok} = 6\,592\,\text{Kč/měs.}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Za jak dlouho se kondenzátor nabije na polovinu napětí zdroje.

Zadání: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

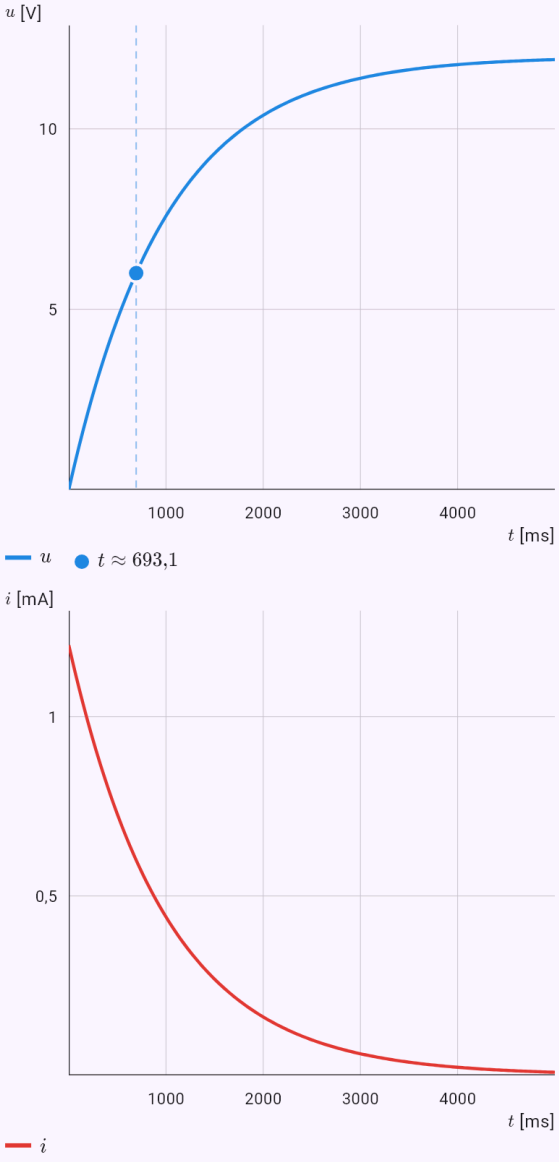
Výsledek

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Postup

- Hledáme t; zadáno $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Při nabíjení kondenzátoru přes rezistor platí podle Kirchhoffova zákona U = Ri + u a proud kondenzátor nabíjí: i = C·du/dt. Dohromady RC·du/dt + u = U. Napětí se blíží napětí zdroje: u = U(1 − e^(−t/τ)), kde τ = RC je časová konstanta; proud i = (U/R)·e^(−t/τ) klesá. Při vybíjení je u = U_0·e^(−t/τ). Rovnice modelu: $RC\frac{du}{dt} + u = U$
- Časová konstanta: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Separujeme proměnné: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Integrujeme obě strany: $\ln|u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C: $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Dosadíme počáteční podmínku $u(0) = 0$: $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Dosadíme: $t = -1000 \ln\left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Tlumené kmitání pružiny – výchylka v čase 1 s.

Zadání: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

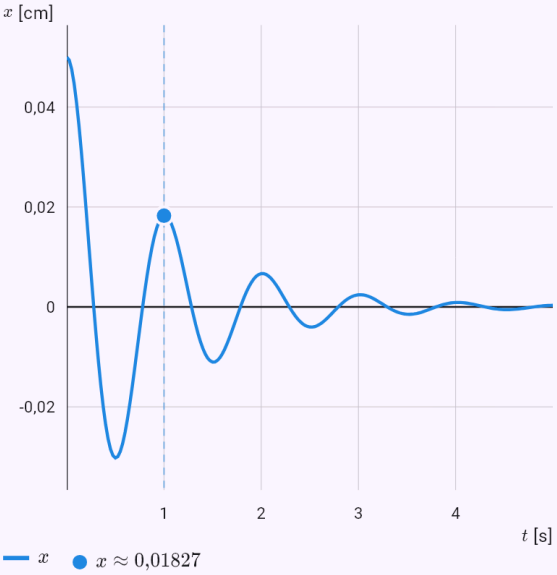
Výsledek

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Postup

- Hledáme x; zadáno $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Převedeme jednotky: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Na těleso na pružině působí síla pružiny −kx (Hookův zákon), tlumení −b·v (odpor úměrný rychlosti) a případně budicí síla $F_0 \cdot \cos \omega t$. Podle 2. Newtonova zákona $m \cdot x'' = -kx - b \cdot x' + F_0 \cdot \cos \omega t$, tedy $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ – lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Kořeny charakteristické rovnice určí, zda těleso kmitá (podkritické tlumení), nebo se jen vrací do rovnováhy. Při buzení blízko vlastní frekvence $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ nastává rezonance. Rovnice modelu: $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Vlastní úhlová frekvence (bez tlumení): $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Součinitel útlumu: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Řešení hledáme ve tvaru x = e^(λt); po dosazení a vydělení e^(λt) dostaneme charakteristickou rovnici: $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Podkritické tlumení ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): komplexní kořeny – tlumené kmity.
- Řešení homogenní rovnice: $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení: $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, odtud $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Dosadíme: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Převedeme jednotky: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Epidemie s R_0 = 2,5 – vrchol a konečný počet nakažených.

Zadání: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Výsledek

$$I_{max} \approx 2340\,\text{jed.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{jed.}$$

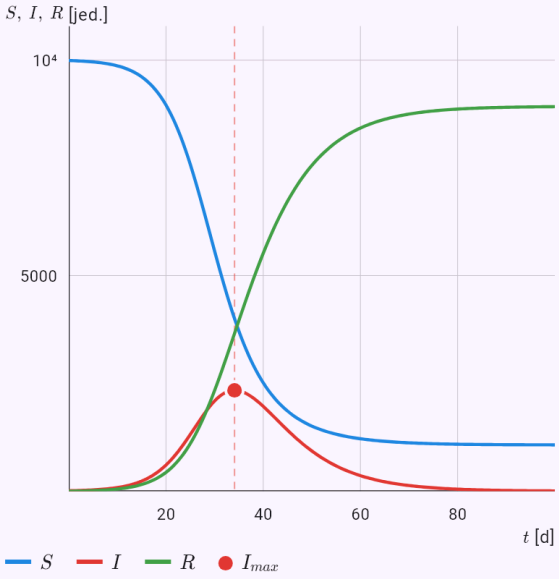
Postup

- Hledáme t_{max}; zadáno
  $N = 10\,000\,\text{jed.}, \quad I_0 = 10\,\text{jed.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7\,\text{d}$
- Populaci N rozdělíme na vnímavé S, nakažené I a uzdravené (imunní) R. Nakažených přibývá úměrně počtu setkání vnímavých s nakaženými: β·S·I/N; nakažení se uzdravují rychlostí γ = 1/D, kde D je doba nemoci. Soustava S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI nemá řešení v elementárních funkcích – řešíme ji numericky. Přesně ale odvodíme základní reprodukční číslo R_0 = β/γ, vrchol epidemie, konečný počet nakažených a práh kolektivní imunity 1 − 1/R_0. Rovnice modelu
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Rychlost uzdravování: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{d}^{-1}$
- Rychlost přenosu nákazy: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{d}^{-1}$
- Součet S + I + R = N je stálý (sečtením rovnic dostaneme nulu).
- Práh kolektivní imunity (podíl imunních, při kterém se nemoc přestane šířit): $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- Epidemie se rozběhne, protože na začátku platí
  $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- Vrchol epidemie nastane při S = N/R_0; z rovnice pro dI/dS
  $\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$
- Rovnici vyřešíme numericky (půlením intervalu)
  $\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{jed.}$

- Nemoc celkem prodělá:
  $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{jed.}\ (89{,}3\,\%)$
- Soustavu nelze vyřešit v elementárních funkcích – řešíme ji numericky metodou Runge–Kutta 4. řádu s krokem $0{,}05$ na intervalu $\langle 0;\ 100\rangle$
- › Postup metody: Rungeova–Kuttova metoda 4. řádu, 2000 kroků
- Z numerického řešení: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$

Graf

Průběh v čase | Fázová rovina



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Dravec a kořist – rovnováha, stabilita a perioda kmitů.

Zadání: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo];`

`c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Výsledek

$[x^*;\, y^*] \approx [80;\, 50]$

$T \approx 14{,}9\,\text{měs.}$

Postup

- Hledáme T; zadáno

  $a = 0{,}5\,\text{měs.}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{jed.}\cdot\text{měs.})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{m}$

- Kořist x se bez dravců množí (ax), dravci y bez kořisti hynou (−cy). Setkání, úměrná součinu xy, kořist ubírají (−bxy) a dravcům přidávají potravu (+dxy). Soustava x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) má rovnovážný stav [c/d; a/b]. Linearizace v něm dává ryze imaginární vlastní čísla – populace kolem rovnováhy periodicky kolísají, dravci se zpožděním za kořistí. Řešíme numericky, přesně odvodíme rovnováhy a první integrál. Rovnice modelu

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Rovnovážné stavy – všechny derivace jsou nulové

  $x(a-by)=0,\ y(dx-c)=0 \Rightarrow [0;\,0],\ \left[\frac{c}{d};\,\frac{a}{b}\right] \approx [80;$

- Stabilitu určíme linearizací – Jacobiho matice soustavy

  $J = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & dx-c \end{pmatrix}$

- V bodě $[0;\,0]$ vlastní čísla $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – sedlo (nestabilní).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- V bodě $[80;\,50]$ vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – střed (kmity kolem rovnováhy).

  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Vydělením rovnic a separací dostaneme první integrál – veličinu, která se podél trajektorie nemění:
  $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$

- Protože V se podél trajektorie nemění, trajektorie jsou uzavřené křivky – populace periodicky kolísají kolem rovnováhy.

- Perioda malých kmitů kolem rovnováhy (z vlastních čísel): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\,\text{měs.}$

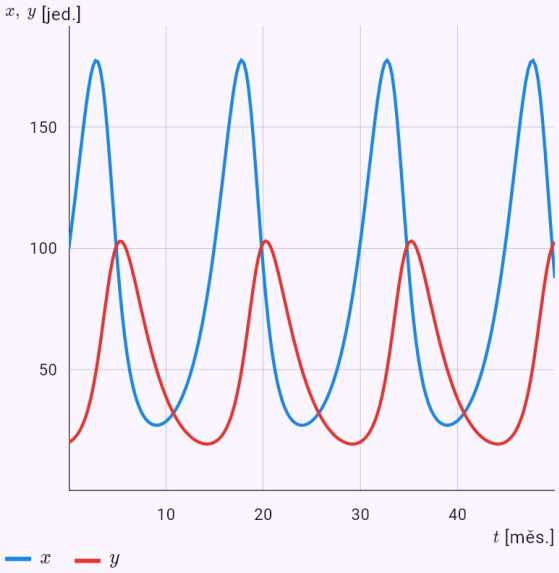
- Soustavu nelze vyřešit v elementárních funkcích – řešíme ji numericky metodou Runge–Kutta 4. řádu s krokem $0{,}0125$ na intervalu $\langle 0;\,50\rangle$

- › Postup metody: Rungeova–Kuttova metoda 4. řádu, 4000 kroků

- Z numerického řešení: $T \approx 14{,}95\,\text{měs.}$

Graf

Průběh v čase | Fázová rovina



Jak se veličiny mění v čase.

Kuželová nádoba: doba vyprázdnění.

Zadání: `model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

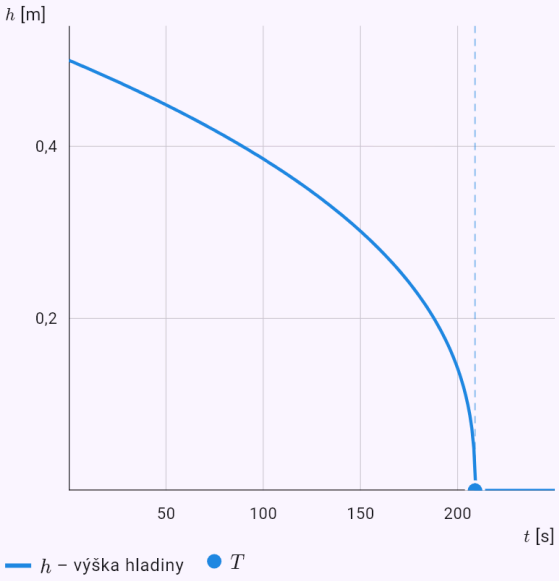
Výsledek

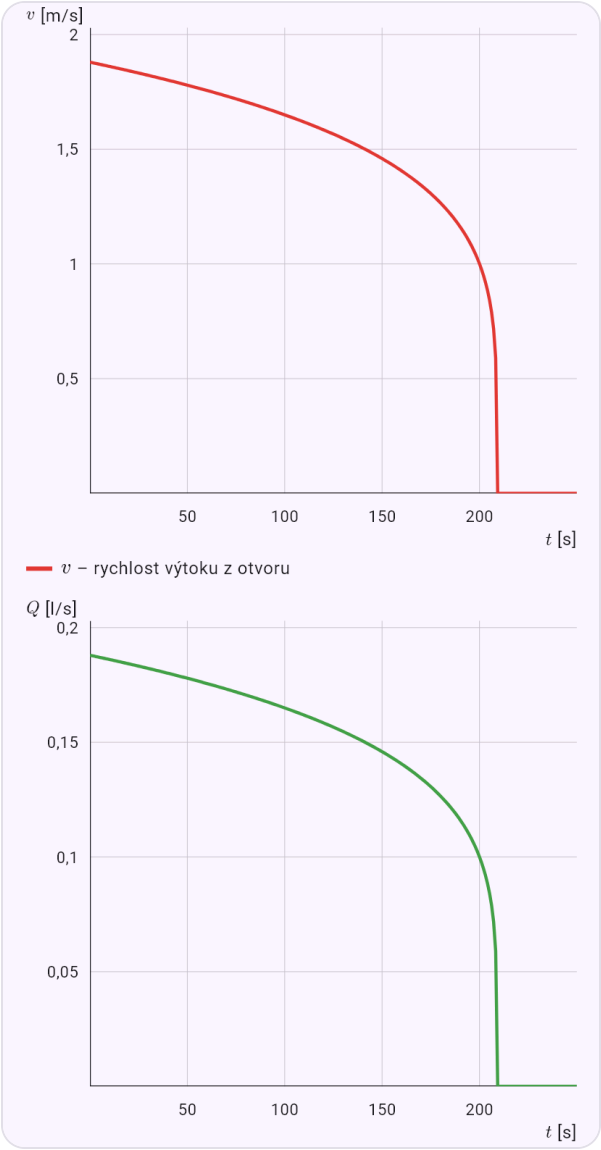
$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

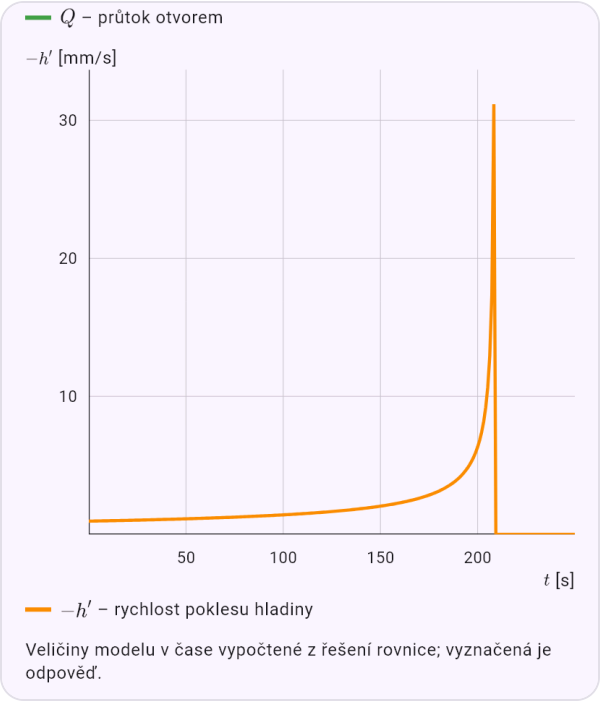
Postup

- Hledáme T; zadáno
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Převedeme jednotky
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Rotační nádoba vybraného tvaru má otvor ve dně. Kapalina z něj vytéká rychlostí danou rovnováhou energie: Torricelliho v = μ√(2gh) opravíme o velký otvor (člen s²/S²), o výtokovou trubku délky L (přidá výšku L, ale i tření podle viskozity kapaliny – laminární nebo turbulentní) a u uzavřené nádoby o podtlak vzduchu nad hladinou, který odtok zpomalí až zastaví. Za čas dt vyteče s·v·dt a hladina klesne o dh, takže dt = −S(h)/(s·v) dh a čas dostaneme integrací. Graf ukazuje výšku hladiny, rychlost výtoku a průtok. U tvaru r = R·(h/H)^p bez trubky a víka ukáže pro srovnání i vzorec. Při r = k·h^(1/4) klesá hladina stejnou rychlostí, tak fungovaly vodní hodiny. Rovnice modelu
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Průřez nádoby ve výšce h: $S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$
- Voda při 20 °C: $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Kapalná za běžného tlaku od 0 do 100 °C.
- Separujeme proměnné: $dt = -\frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Rychlost výtoku závisí na výšce hladiny složitě, integrál proto počítáme numericky.
- Pro srovnání podle Torricelliho bez opravy na velký otvor:
  $T_0 = \frac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $T = \int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Dosadíme: $T = \int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Převedeme jednotky: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Graf







Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Olej z kulové nádoby trubkou – výška hladiny, rychlost výtoku z otvoru, průtok a rychlost poklesu hladiny.

Zadání: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

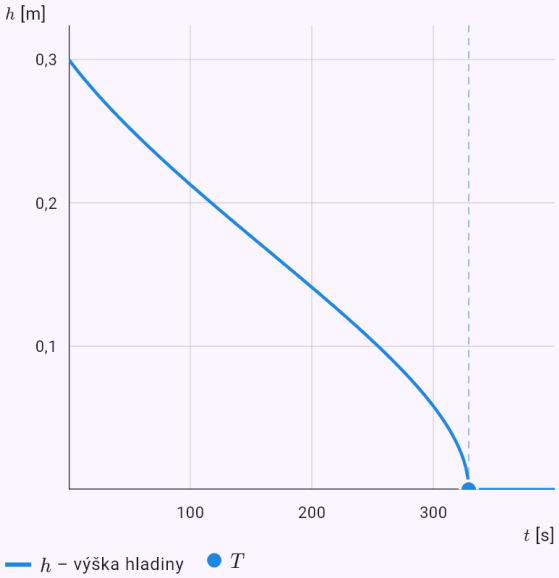
Výsledek

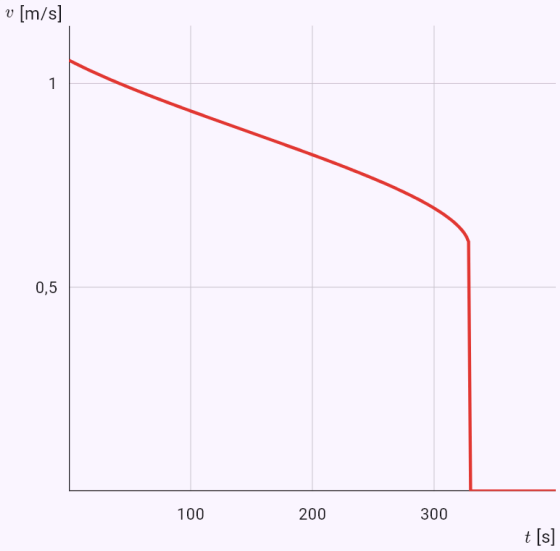
$$T \approx 5{,}48\ \text{min}$$

Postup

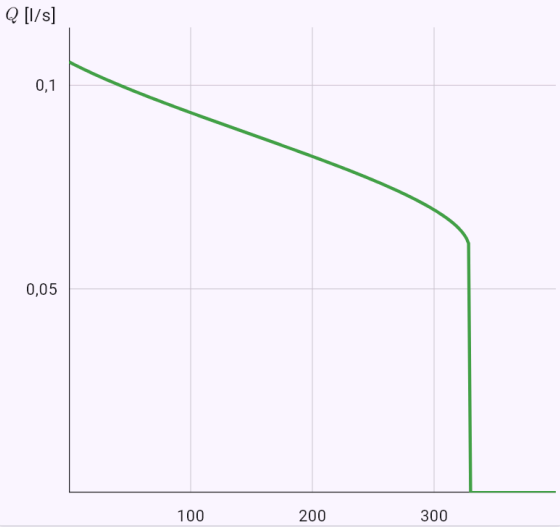
- Hledáme T; zadáno
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Převedeme jednotky
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Rotační nádoba vybraného tvaru má otvor ve dně. Kapalina z něj vytéká rychlostí danou rovnováhou energie: Torricelliho v = μ√(2gh) opravíme o velký otvor (člen s²/S²), o výtokovou trubku délky L (přidá výšku L, ale i tření podle viskozity kapaliny – laminární nebo turbulentní) a u uzavřené nádoby o podtlak vzduchu nad hladinou, který odtok zpomalí až zastaví. Za čas dt vyteče s·v·dt a hladina klesne o dh, takže dt = −S(h)/(s·v) dh a čas dostaneme integrací. Graf ukazuje výšku hladiny, rychlost výtoku a průtok. U tvaru r = R·(h/H)^p bez trubky a víka ukáže pro srovnání i vzorec. Při r = k·h^(1/4) klesá hladina stejnou rychlostí, tak fungovaly vodní hodiny. Rovnice modelu
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Průřez nádoby ve výšce h: $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Slunečnicový olej při 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Tuhne kolem −17 °C, nevře – nad 200 °C se rozkládá; viskozita silně klesá s teplotou.
- Separujeme proměnné: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Rychlost výtoku závisí na výšce hladiny složitě, integrál proto počítáme numericky.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Dosadíme: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Převedeme jednotky: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

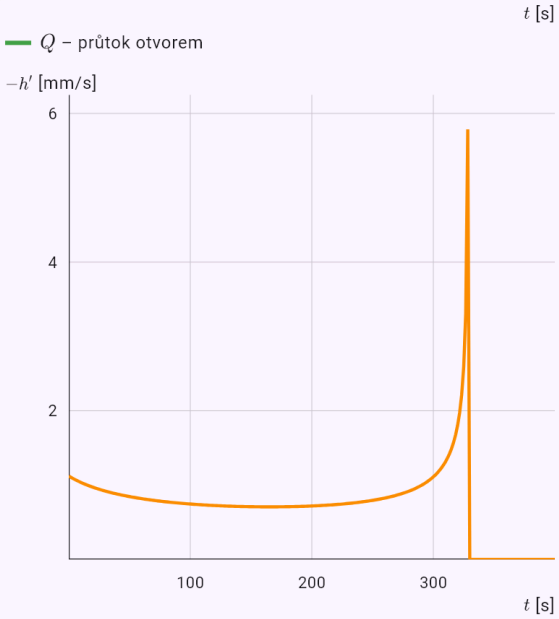
Graf





v – rychlost výtoku z otvoru





$-h'$ – rychlost poklesu hladiny

Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Tvar nádoby, ze které hladina klesá rovnoměrně.

Zadání: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2]; v=0.001[m_s])`

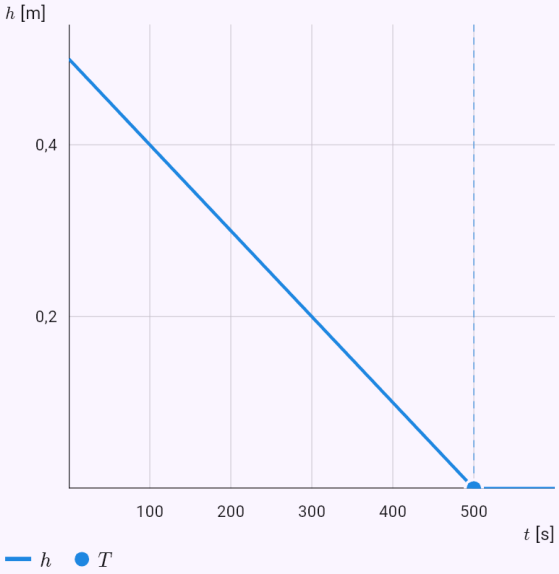
Výsledek

$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hledáme $r(h_0)$; zadáno
  $s = 1\,\mathrm{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\mathrm{cm}, \quad g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2,$
- Převedeme jednotky
  $s = 1\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2, \quad h_0 = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}5\,\mathrm{m}$
- Rotační nádoba vybraného tvaru má otvor ve dně. Kapalina z něj vytéká rychlostí danou rovnováhou energie: Torricelliho v = μ√(2gh) opravíme o velký otvor (člen s²/S²), o výtokovou trubku délky L (přidá výšku L, ale i tření podle viskozity kapaliny – laminární nebo turbulentní) a u uzavřené nádoby o podtlak vzduchu nad hladinou, který odtok zpomalí až zastaví. Za čas dt vyteče s·v·dt a hladina klesne o dh, takže dt = −S(h)/(s·v) dh a čas dostaneme integrací. Graf ukazuje výšku hladiny, rychlost výtoku a průtok. U tvaru r = R·(h/H)^p bez trubky a víka ukáže pro srovnání i vzorec. Při r = k·h^(1/4) klesá hladina stejnou rychlostí, tak fungovaly vodní hodiny. Rovnice modelu: $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- Hladina klesá rovnoměrně, když je průřez úměrný √h, tedy r = k·h^(1/4). Tento tvar měly vodní hodiny.
- Dosadíme: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\mathrm{m}$
- Převedeme jednotky: $r(h_0) \approx 0{,}2446\,\mathrm{m} = 24{,}46\,\mathrm{cm}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

43. Fyzika

Fyzikální výpočty najdete v sekci „Aplikace“, obor Fyzika. Raketový motor má pět režimů: tah, specifický impuls, Ciolkovského rovnici, vícestupňovou raketu a výtokovou rychlost z termodynamiky ideální trysky.

Tah se počítá z hmotnostního toku a výtokové rychlosti, volitelně i s tlakovým členem – graf pak ukáže, jak tah roste s výškou ve standardní atmosféře. V Ciolkovského rovnici lze hledat přírůstek rychlosti, potřebné palivo, startovní nebo konečnou hmotnost i výtokovou rychlost. Výsledky jsou ideální, bez gravitačních a aerodynamických ztrát.

Keplerovy zákony má samostatný formulář s pěti režimy: elipsa, plochy, poloha v čase, doba oběhu a rychlost z rovnice vis-viva. Graf kreslí dráhu v pravém měřítku a těleso se v ní pohybuje podle posuvníku nebo po stisknutí tlačítka přehrát. Ve 2. zákoně jsou barevné výseče, které těleso opíše za stejný čas.

Formulář Vzájemné ovlivňování těles počítá těžiště soustavy, Lagrangeovy body, slapy, drahové rezonance a stáčení perihelia. Graf těžiště ukáže obě tělesa kolem [[barycenter|těžiště]] B v pravém měřítku. Když je kroužek většího tělesa v celku neviditelně malý (Slunce kolem těžiště soustavy Slunce–Jupiter), přepínač „Detail kolem těžiště“ ho ukáže zvětšený a s poloměrem R i obrys tělesa – je vidět, že těžiště leží těsně nad povrchem Slunce. Známý příběh: Uran se od předpovězené dráhy odchyloval a Le Verrier z těchto poruch v roce 1846 spočítal, kde má být neznámá planeta. Neptun byl pak nalezen téměř na vypočteném místě.

Problém tří těles se počítá numericky v jednotkách, kde G = 1: periodické řešení „osmička“, chaotická pythagorejská úloha, kde se dva téměř stejné běhy časem rozejdou, a vlastní zadání. Přesnost výpočtu kontroluje změna celkové energie.

Jaderná fyzika je v aplikacích jen pro mírové použití: laboratoř, medicína a energetika. Formulář Jaderná fyzika počítá aktivitu vzorku, radioaktivní rovnováhu, Batemanovy rovnice rozpadové řady, vazebnou energii s grafem podle hmotnostního čísla, energii reakce a energii paliva ve srovnání s uhlím.

Formulář Jaderný reaktor ukazuje pokolení neutronů jako geometrickou posloupnost, periodu reaktoru se zpožděnými neutrony a velikost aktivní zóny v jednogrupovém difuzním modelu, a to jen pro moderované mříže (grafit, lehká voda).

Balistika počítá šikmý vrh pro školní fyziku, sport a myslivost. Ve vakuu jsou k dispozici přesné vzorce s postupem, s odporem vzduchu numerické řešení metodou Runge-Kutta včetně čelního a bočního větru, hustoty vzduchu podle výšky a Coriolisovy síly. Graf ukazuje bokorys a srovnání s vakuem, při bočním unášení i půdorys. U nadzvukových střel se součinitel odporu bere z přibližné křivky podle Machova čísla. Počítá se jen let, ne účinek na cíl, a stáčení rotující střely zahrnuto není. Obrácená úloha najde pro danou vzdálenost oba elevační úhly, plochý a strmý.

Letadlo počítá výkony pro civilní letectví a výuku: ustálený let s parabolickou polárou, délku rozjezdu a dojezdu numericky včetně větru a nadmořské výšky, zatáčku a klouzavý let. Volitelný přízemní efekt zmenší indukovaný odpor. Stlačitelnost vzduchu model nepočítá, u dopravních letadel v cestovní rychlosti je výsledek jen orientační. Rychlost a délky lze zadat i v uzlech a stopách.

Návrat do atmosféry počítá průlet kosmické lodi atmosférou numericky metodou Runge-Kutta: rychlost, úhel dráhy a výšku nad kulatou Zemí se standardní atmosférou. Výsledkem je přistání, odraz zpět do vesmíru nebo překročení limitu, největší přetížení (s kontrolou vzorcem Allena a Eggerse), tepelný tok ve [[stagnationPoint|stagnačním bodě]] a teplota štítu z [[radiativeEquilibrium|radiační rovnováhy]]. Režim Vstupní koridor najde půlením intervalu mělkou a strmou mez vstupního úhlu – pro návrat od Měsíce vychází [[entryCorridor|koridor]] široký asi 2°, s poznámkou o Apollu 13. Předvolby: Vostok, Apollo, Sojuz a raketoplán (u něj věcná poznámka o nehodě Columbie). Jediné řízení je stálé [[bankAngle|natočení vztlaku]]; Země se v modelu neotáčí. Interaktivní ukázka, kde vztlak natáčíte za letu, je na mathtrace.app ve „Vyzkoušej si“.

Tělesa ve vodě jsou formulář pro výuku a civilní použití: vztlak a plování včetně balónu, tlak s hloubkou, Bernoulliho rovnice, klesání a stoupání s přidanou hmotností, dosah a pokles harpuny pro sportovní rybolov, ponořené plavidlo na vlastní pohon, balast a loď. Součinitel odporu koule se bere podle Reynoldsova čísla, bublina má vlastní korelaci. Odpor lodi je tření podle křivky ITTC-57 plus zadaný zbytkový součinitel, proto je mimo výtlačnou plavbu jen orientační. U lodi lze zapnout srovnání s ekranoplánem KM: práce proti odporu na tunu a kilometr a graf výkonu podle rychlosti.

Termonukleární fúze má dva formuláře, oba jen pro mírové použití (elektrárny, laboratoře, Slunce a hvězdy). Formulář Termonukleární fúze počítá energii reakce (D-T, D-D, D-^{3}He a řetězec p-p ve Slunci) včetně rozdělení energie mezi produkty, energii paliva ve srovnání se štěpením uranu a s uhlím, výšku [[coulombBarrier|Coulombovy bariéry]] a [[gamowPeak|Gamowův vrchol]]. Fúzní reaktor nemůže „utéct“ jako štěpný: fúze nemá kritické množství, při poruše plazma vychladne a reakce sama ustane.

Formulář Fúzní plazma počítá [[lawsonCriterion|Lawsonovo kritérium]] s grafem potřebného trojného součinu podle teploty, zisk Q, rychlost reakce $\langle\sigma v\rangle$ jako integrál přes Maxwellovo rozdělení Simpsonovou metodou (srovnaný s publikovanou parametrizací Bosche a Halea), hustotu fúzního výkonu, ztráty brzdným zářením a Larmorův poloměr nabité částice v magnetickém poli. Dynamiku plazmatu (magnetohydrodynamiku) appka nepočítá.

Urychlovače částic mají dva formuláře. Relativistická kinematika počítá [[lorentzFactor|Lorentzův faktor]], rychlost, energii a hybnost ze zadané rychlosti nebo kinetické energie a dilataci času s doletem nestabilních částic (mion, pion, kaon). Formulář Urychlovače porovnává energii srážky $\sqrt{s}$ ve vstřícných svazcích a na pevném terči, počítá poloměr dráhy a potřebné magnetické pole a ztráty synchrotronovým zářením. Nabídka nastaví hodnoty pro LHC, LEP nebo Tevatron.

Ukázky

Tah motoru u hladiny moře a srovnání s vakuem.

Zadání: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa]; pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)`

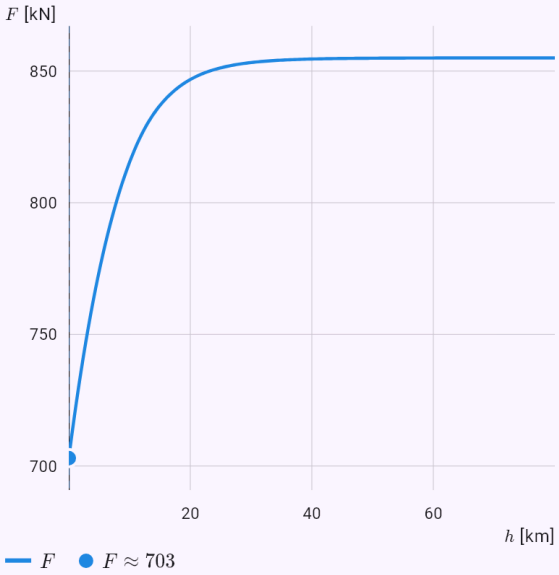
Výsledek

$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hledáme F; zadáno $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- Převedeme jednotky $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Raketa se pohání tím, že vyhazuje hmotu: za sekundu odejde hmotnost Δm/Δt rychlostí v_e a ze zachování hybnosti vzniká tah F = (Δm/Δt)·v_e. Je-li tlak plynu na výstupu trysky p_e jiný než okolní p_a, přidává se člen (p_e − p_a)·A_e – proto tah s výškou roste. Rovnice modelu: $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Tlakový člen tahu $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300) \cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- Plyn je v trysce přeexpandovaný (p_e < p_a) – okolní tlak tah snižuje. Typické při startu motoru určeného pro větší výšky.
- Hybnostní člen tahu: $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- Dosadíme: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Specifický impuls $I_{sp} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0} = \dfrac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$
- Tah ve vakuu: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$
- Převedeme jednotky: $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Výtoková rychlost ze specifického impulsu pro RP-1/LOX.

Zadání: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Výsledek

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hledáme v_e; zadáno: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- Specifický impuls I_sp = v_e/g_0 říká, po kolik sekund dokáže 1 kg paliva vyvinout tah rovný tíze 1 kg, a porovnává tak paliva. Rovnice modelu: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Normální tíhové zrychlení: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $v_e = I_{sp} g_0$
- Dosadíme: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Čím větší specifický impuls, tím méně paliva spotřebuje motor na stejný tah. Typicky ve vakuu: tuhé palivo ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

Přírůstek rychlosti podle Ciolkovského rovnice.

Zadání: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

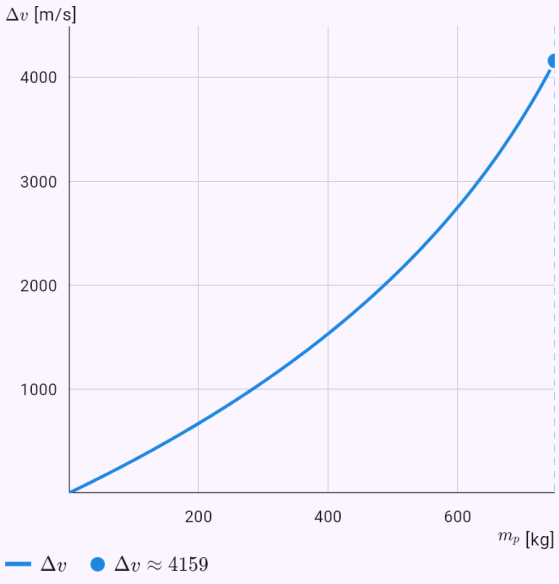
Výsledek

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hledáme Δv; zadáno: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- Hybnost vyhozeného paliva předává raketě rychlost: z m·dv = −v_e·dm integrací plyne Ciolkovského rovnice Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Rovnice modelu: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separujeme proměnné: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integrujeme obě strany: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Dosadíme: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Hmotnostní poměr: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Podíl paliva na startovní hmotnosti: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Ideální výsledek bez gravitačních a aerodynamických ztrát. Na nízkou oběžnou dráhu je skutečně potřeba asi 9,4 km/s.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Kolik paliva potřebuje 1 t rakety na nízkou oběžnou dráhu.

Zadání: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

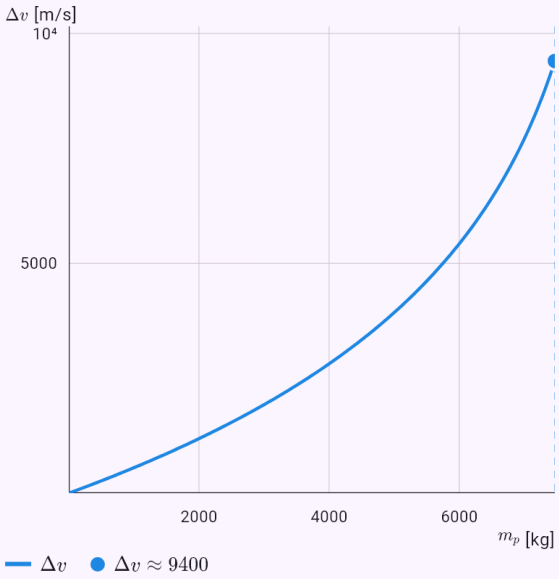
Výsledek

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Postup

- Hledáme m_p; zadáno: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- Hybnost vyhozeného paliva předává raketě rychlost: z m·dv = −vₑ·dm integrací plyne Ciolkovského rovnice Δv = vₑ·ln(m₀/m_f). Rovnice modelu: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separujeme proměnné: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integrujeme obě strany: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $m_p = m_0 - m_f = m_f \left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1 \right)$
- Dosadíme: $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1 \right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Hmotnostní poměr: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Podíl paliva na startovní hmotnosti: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Ideální výsledek bez gravitačních a aerodynamických ztrát. Na nízkou oběžnou dráhu je skutečně potřeba asi 9,4 km/s.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Třístupňová raketa třídy Saturn V a přínos stupňů.

Zadání: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

421[s]; mL=45[t]; mode=staging)

Výsledek

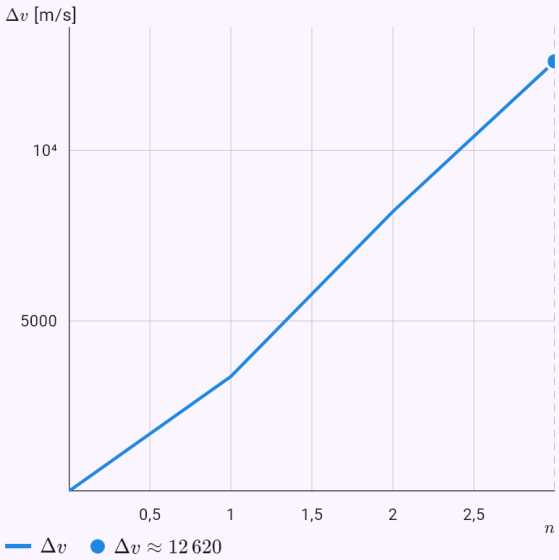
$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

Postup

- Hledáme Δv; zadáno $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sl}$
- Převedeme jednotky $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Každý stupeň přidá rychlost podle Ciolkovského rovnice a prázdné nádrže se odhodí, takže další stupeň už netáhne zbytečnou hmotu. Přírůstky rychlosti se sčítají. Rovnice modelu: $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Normální tíhové zrychlení: $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Přírůstek rychlosti stupně $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Přírůstek rychlosti stupně $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Přírůstek rychlosti stupně $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Pro srovnání jeden stupeň se stejnou hmotností a palivem $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- Odhozením prázdných stupňů získá raketa navíc $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ oproti jednomu stupni se stejným palivem.

- Ideální výsledek bez gravitačních a aerodynamických ztrát. Na nízkou oběžnou dráhu je skutečně potřeba asi 9,4 km/s.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Výtoková rychlost vodíkového motoru z termodynamiky trysky.

Zadání: model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one]; pr=1000[one];

`mode=nozzle; propellant=hydrogen)`

Výsledek

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hledáme v_e; zadáno

  $T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$

- Převedeme jednotky: $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- Výtoková rychlost plyne z termodynamiky ideální trysky: roste s teplotou ve spalovací komoře a klesá s molární hmotností spalin. Rovnice modelu

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Molární plynová konstanta: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Člen expanze

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Dosadíme

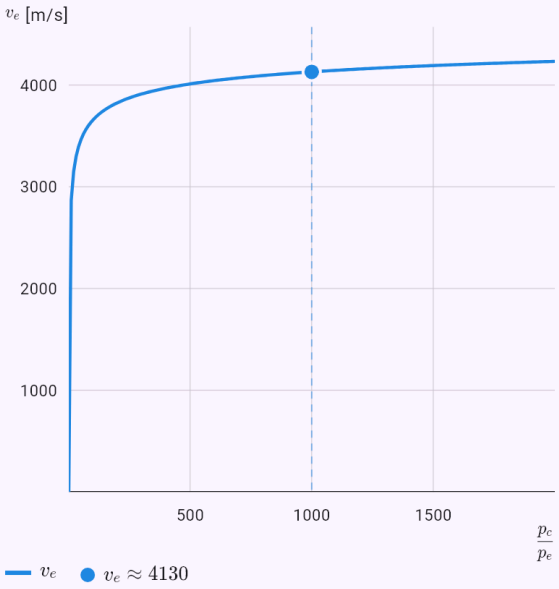
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Specifický impuls: $I_{sp} = \frac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Mezní rychlost při expanzi do vakua:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- Výtoková rychlost roste s √(T/M) – proto má vodík (lehké spaliny) největší specifický impuls.
- Ideální izoentropické proudění; skutečná tryska dosáhne asi 92–98 % této hodnoty.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Perihelium Halleyovy komety z velké poloosy a výstřednosti.

Zadání: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse; body=halley)`

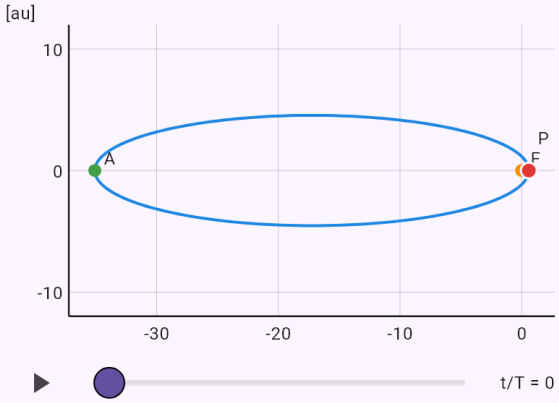
Výsledek

$$r_p \approx 0{,}586\,\mathrm{au}$$

Postup

- Hledáme r_p; zadáno: $a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad e = 0{,}9671$
- 1. Keplerův zákon: planeta obíhá po elipse a centrální těleso je v jejím ohnisku. Vzdálenost r závisí na úhlu θ od perihelia; nejblíž je v periheliu r_p = a(1 − e), nejdál v aféliu r_a = a(1 + e). Výstřednost e říká, jak je elipsa protáhlá. Rovnice modelu: $r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $r_p = a(1-e)$
- Dosadíme: $r_p = 17{,}83(1-0{,}9671) \approx 0{,}586\,\mathrm{au}$
- Vzdálenost v aféliu: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\mathrm{au}$

Graf



Tělesa v pravém měřítku. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte pohyb v čase.

Rychlost Země v aféliu z 2. Keplerova zákona; výseče za stejný čas.

Zadání: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

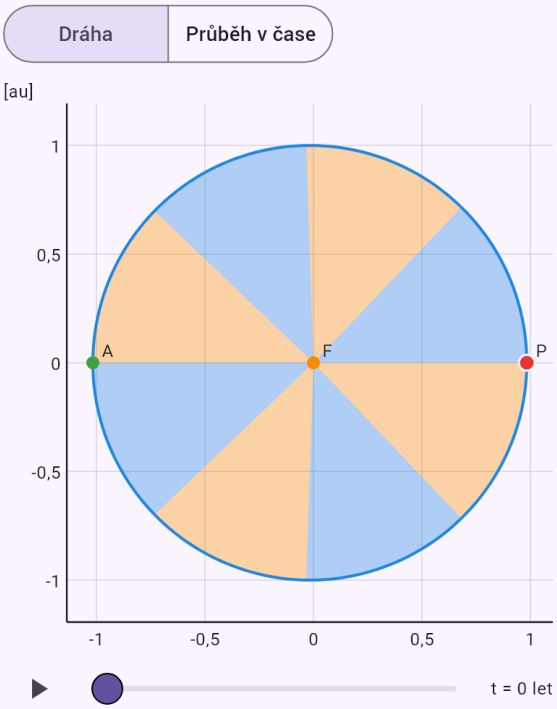
Výsledek

$$v_a \approx 29{,}29\,\mathrm{km/s}$$

Postup

- Hledáme v_a; zadáno
  $r_p = 0{,}9833\,\mathrm{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\mathrm{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\mathrm{km/s}$
- 2. Keplerův zákon: průvodič z ohniska opíše za stejný čas stejnou plochu, protože se zachovává moment hybnosti. Plošná rychlost je konstantní, takže těleso je nejrychlejší v periheliu: v_p·r_p = v_a·r_a. Barevné výseče v grafu vznikly za stejnou dobu a mají stejný obsah.
  Rovnice modelu: $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \mathrm{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $v_a = v_p \frac{r_p}{r_a}$
- Dosadíme: $v_a = 30{,}29 \cdot \frac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\mathrm{km/s}$
- Poměr rychlostí: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Těleso je nejrychlejší v perihelia a nejpomalejší v aféliu; Země proto obíhá nejrychleji v lednu.

Graf



Tělesa v pravém měřítku. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte pohyb v čase.

Kde je Halleyova kometa 10 let po průchodu periheliem (Newtonova metoda).

Zadání: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr];`

`mode=position; body=halley)`

Výsledek

$\theta \approx 168\,^\circ$

Postup

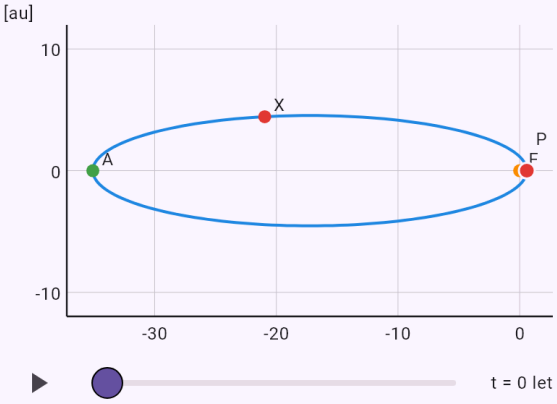
- Hledáme θ; zadáno
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{let}, \quad t = 10\,\text{l}$
- Kde bude těleso za čas t, určuje Keplerova rovnice M = E − e·sin E. Střední anomálie M roste s časem rovnoměrně, excentrická anomálie E se z ní nedá vyjádřit vzorcem, proto se hledá Newtonovou metodou. Rovnice modelu:
  $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Střední anomálie: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- Keplerova rovnice nemá řešení ve vzorcích, E se proto hledá numericky.
- Iterace Newtonovy metody:
  $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Krok: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Krok: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Krok: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Krok: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Krok: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Krok: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Krok: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Excentrická anomálie: $E \approx 1{,}78021$
- Pravá anomálie

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Vzdálenost od ohniska: $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Graf

Dráha | Průběh v čase



Tělesa v pravém měřítku. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte pohyb v čase.

Výška geostacionární dráhy z 3. Keplerova zákona.

Zadání: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

`central=earth)`

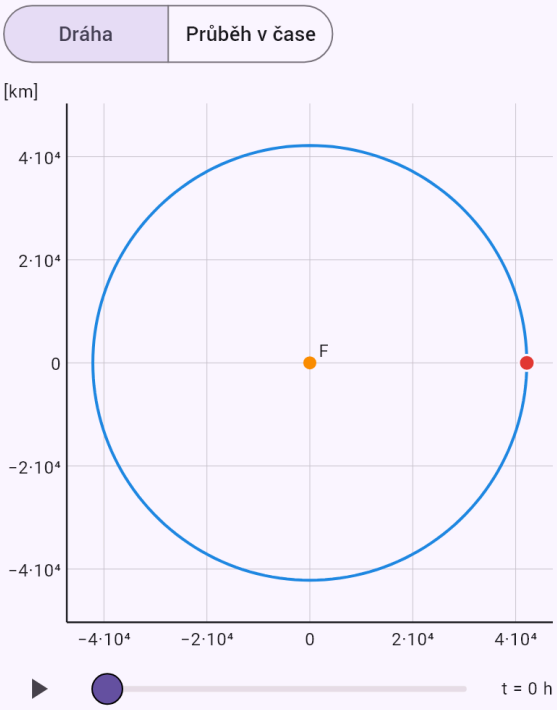
Výsledek

$$h \approx 35\,790\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hledáme h; zadáno
  $T = 86\,160\,\mathrm{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6378\,\mathrm{km}$
- Převedeme jednotky: $R = 6378\,\mathrm{km} = 6\,378\,000\,\mathrm{m}$
- 3. Keplerův zákon: poměr T²/a³ závisí jen na hmotnosti centrálního tělesa. Z oběhu měsíce proto zjistíme hmotnost planety a z požadované doby oběhu výšku dráhy, například geostacionární. Rovnice modelu:
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Dosadíme
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $h = a - R$
- Dosadíme: $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$
- Vztah platí pro hmotnost obíhajícího tělesa zanedbatelnou proti M; jinak do něj patří M + m.
- Převedeme jednotky: $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35\,790\,\mathrm{km}$

Graf



Tělesa v pravém měřítku. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte pohyb v čase.

Rychlost Halleyovy komety v periheliu z rovnice vis-viva.

Zadání: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg]; mode=visviva;`

`central=sun)`

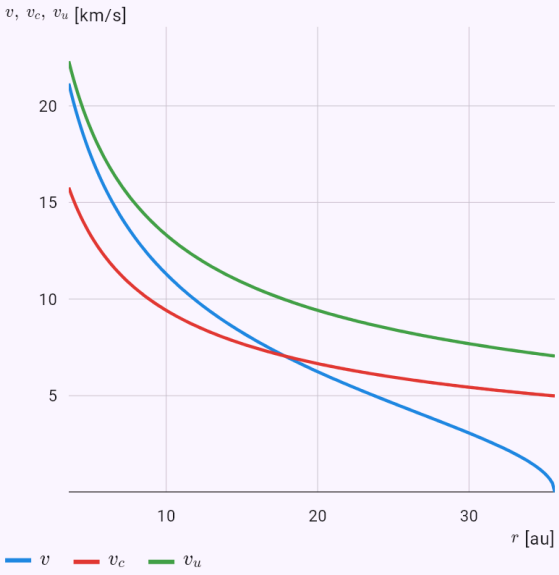
Výsledek

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Postup

- Hledáme v; zadáno
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Převedeme jednotky
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- Zákon vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) plyne ze zachování energie a dává rychlost v libovolném místě dráhy. Kruhová rychlost udrží těleso na kružnici, úniková je √2krát větší a těleso se už nevrátí. Rovnice modelu:
  $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Dosadíme
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Kruhová rychlost v této vzdálenosti:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Úniková rychlost v této vzdálenosti:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Převedeme jednotky: $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Těžiště soustavy Slunce–Jupiter leží těsně nad povrchem Slunce; „Detail kolem těžiště“ ukáže, jak Slunce kolem něj krouží.

Zadání: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

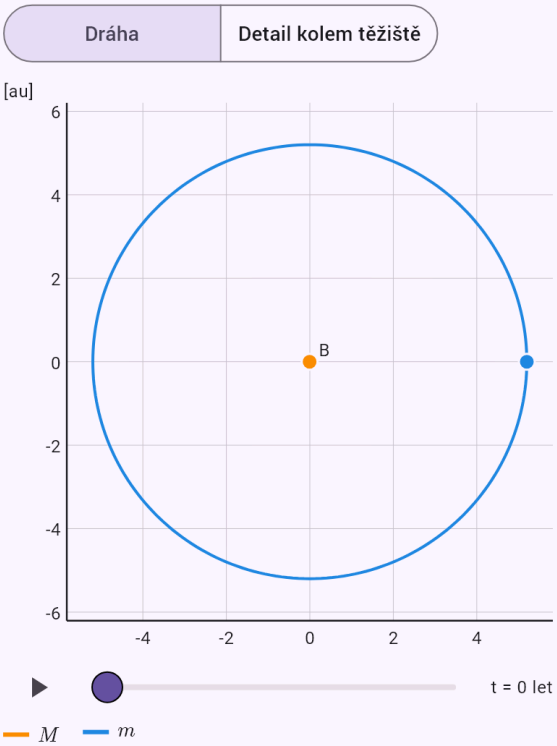
Výsledek

$$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$$

Postup

- Hledáme r_b; zadáno
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Převedeme jednotky
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- Ve skutečnosti obíhají obě tělesa kolem společného těžiště (barycentra). Problém dvou těles se převádí na pohyb jednoho tělesa s redukovanou hmotností a do 3. Keplerova zákona patří součet M + m. Kolébání hvězdy kolem těžiště prozrazuje exoplanety. Rovnice modelu
  $r_b = \frac{am}{M+m}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$
- Dosadíme
  $r_b = \frac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$
- Vzdálenost druhého tělesa od těžiště:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Těžiště leží mimo těleso: $\frac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. Větší těleso tak samo opisuje viditelný kroužek.
- Převedeme jednotky: $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Graf



Tělesa v pravém měřítku. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte pohyb v čase.

Vzdálenost bodu L2, kde pracuje teleskop Jamese Webba.

Zadání: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

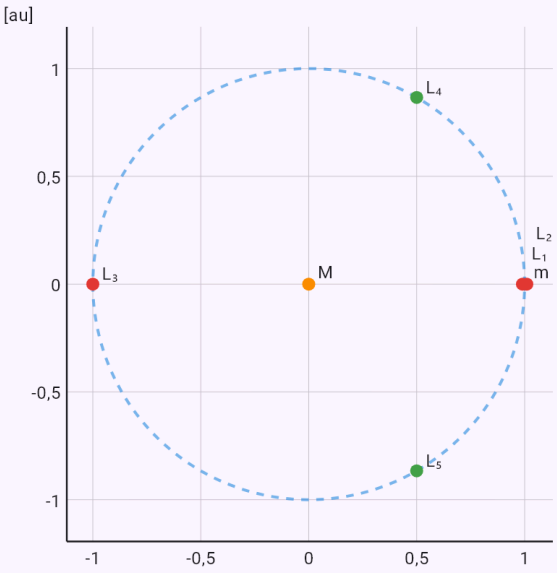
Výsledek

$$r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mil. km}$$

Postup

- Hledáme r_{L_2}; zadáno
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- V soustavě obíhající spolu s tělesem m je pět míst, kde se gravitace obou těles a odstředivá síla vyrovnají. L1, L2 a L3 leží na spojnici těles a hledají se numericky, L4 a L5 tvoří s oběma tělesy rovnostranné trojúhelníky. Rovnice modelu
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Poměr hmotností: $\mu = \frac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- Přibližně pro malé m: $r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \approx 1{,}503\,\text{mil. km}$
- Lagrangeův bod je kořenem rovnice na spojnici těles, počítá se půlením intervalu.
- Přesně z rovnice: $r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mil. km}$
- L1, L2 a L3 jsou nestabilní: těleso tam musí udržovat polohu korekcemi, jako teleskop Jamese Webba v L2.
- L4 a L5 jsou stabilní, protože M/m > 25; u Jupiteru se tam drží trojané.

Graf



Tělesa a význačné body v pravém měřítku.

Slapové zrychlení způsobené Měsícem.

Zadání: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km]; mode=tide;`

`tideSource=moon)`

Výsledek

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$$

Postup

- Hledáme a_s; zadáno $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km}$
- Převedeme jednotky $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km} = 3{,}84$
- Bližší strana tělesa je přitahována silněji než vzdálenější. Slapové zrychlení 2GMR/d³ klesá se třetí mocninou vzdálenosti, proto má Měsíc větší vliv než mnohem hmotnější Slunce. Rovnice modelu: $a_s \approx \frac{2GMR}{d^3}$
- Dosadíme $a_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{\left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right)^3} \approx 1{,}099$
- Přesně, rozdíl gravitace na bližší straně a ve středu $\frac{GM}{(d-R)^2} - \frac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$
- Působící těleso vytváří dva přílivové valy: na bližší straně i na opačné, a za otočku proto nastávají dva přílivy.
- Slapové tření brzdí rotaci: Měsíc je k Zemi vázaný stále stejnou stranou a vzdaluje se asi o 3,8 cm za rok.

Rezonance měsíců Io, Europa a Ganymed.

Zadání: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Výsledek

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Postup

- Zadáno: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{d}$
- Drahová rezonance vzniká, když jsou doby oběhu v poměru malých celých čísel; tělesa se pak pravidelně potkávají a ovlivňují. Příklady: Io, Europa a Ganymed 1 : 2 : 4, Neptun a Pluto 2 : 3. Kirkwoodovy mezery v pásu planetek leží v rezonancích s Jupiterem. Rovnice modelu: $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Největší odchylka od celočíselného poměru: $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Doby oběhu jsou v poměru malých celých čísel: jde o drahovou rezonanci.

Stáčení perihelia Merkuru podle obecné relativity.

Zadání: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km]; e=0.2056[one];`

`mode=precession)`

Výsledek

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{let}$$

Postup

- Hledáme $\Delta\varphi$; zadáno
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km}, \quad e = 0{,}205$
- Převedeme jednotky:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\text{m}$
- Podle obecné relativity se perihelium dráhy pomalu stáčí o 6πGM/(c²a(1 − e²)) za oběh. U Merkuru to dělá 43" za století, což je rozdíl, který Newtonova mechanika nevysvětlila. Rovnice modelu: $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Stočení za jeden oběh
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Počet oběhů za 100 let: $N = \dfrac{100\,\text{let}}{T} \approx 415{,}3$
- Dosadíme: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{let}$
- Newtonova mechanika předpovídá u Merkuru menší stáčení, zbylých 43" za století vysvětlila až obecná relativita.

Periodické řešení tří stejných těles ve tvaru osmičky.

Zadání: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Výsledek

$$E \approx -1{,}28714$$

Postup

- Hledáme E; zadáno: $t_k = 6{,}326$
- Tři tělesa obecně nemají řešení ve vzorcích. Existují ale výjimečné periodické dráhy: v řešení „osmička“ (Chenciner a Montgomery, 2000) obíhají tři stejná tělesa po jediné křivce tvaru osmičky. Rovnice modelu

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Obecně pro tři tělesa neexistuje řešení ve vzorcích, pohyb se proto počítá numericky s jednotkami, kde G = 1.
- Počet kroků výpočtu: $N = 2748$
- Celková energie:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$$

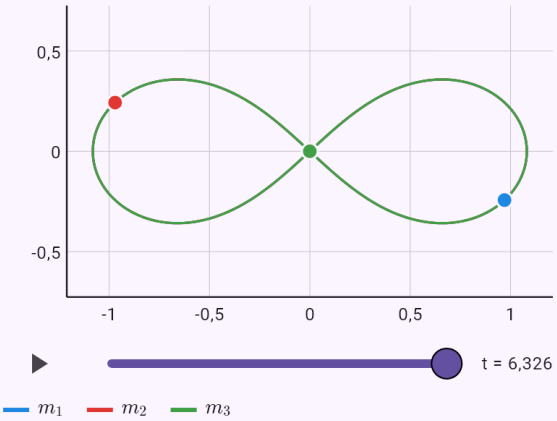
- Relativní změna energie za výpočet (kontrola přesnosti):

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$$

- Tři stejná tělesa obíhají po jedné křivce tvaru osmičky a po periodě se vrátí na svá místa.

- Největší vzdálenost od počáteční polohy po jedné periodě: $\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

Graf



Tělesa v pravém měřítku. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte pohyb v čase.

Chaos: kdy se dva téměř stejné běhy rozejdou.

Zadání: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Výsledek

$$t_s \approx 42{,}9$$

Postup

- Hledáme t_s; zadáno: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- Problém tří těles je chaotický: nepatrná změna počátku se časem zesílí tak, že dráhy nemají nic společného. Pythagorejská úloha s hmotnostmi 3, 4 a 5 se počítá dvakrát, podruhé s malou odchylkou δ. Rovnice modelu

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Obecně pro tři tělesa neexistuje řešení ve vzorcích, pohyb se proto počítá numericky s jednotkami, kde G = 1.
- Počet kroků výpočtu: $N = 52\,307$
- Celková energie:

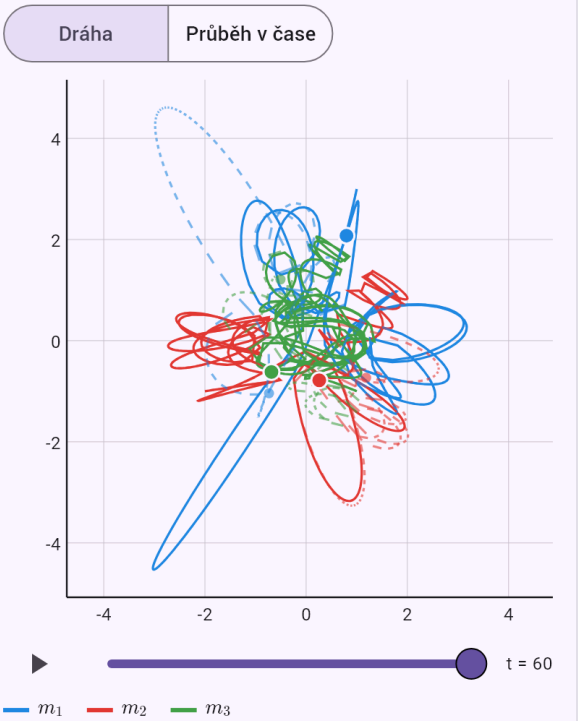
$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$$

- Relativní změna energie za výpočet (kontrola přesnosti):

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$$

- Počítá se i druhý běh s posunem o $\delta = 0{,}001$. Přerušované čáry jsou tento běh; rozchod ukazuje chaos. V grafu v čase je přímka v logaritmu znakem exponenciálního růstu.
- Za čas t_s se poloha některého tělesa v obou běžích liší o více než 1.

Graf



Plná a přerušovaná čára jsou dva běhy s nepatrně jiným začátkem.

Aktivita 1 g radia, přibližně jedno curie.

Zadání: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

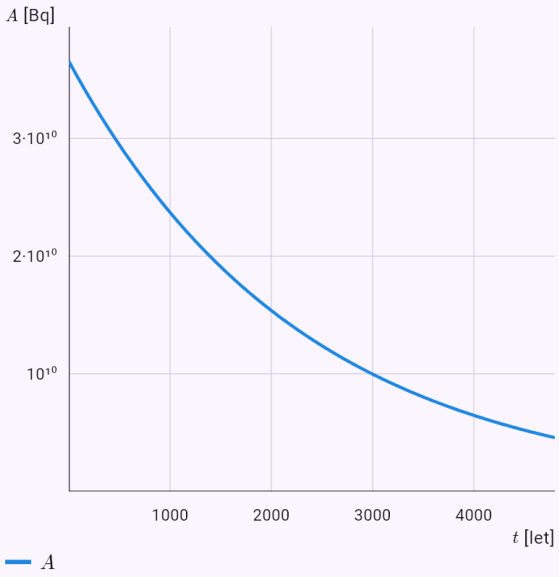
Výsledek

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Postup

- Hledáme A; zadáno:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{let}$
- Převedeme jednotky: $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{let} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- Aktivita A = λN říká, kolik jader se rozpadne za sekundu. Počet jader N plyne z hmotnosti, molární hmotnosti a Avogadrovy konstanty, rozpadová konstanta λ z poločasu. Rovnice modelu:
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \dfrac{m}{M} N_A$
- Za poločas klesne množství na polovinu – rozpadová konstanta: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Počet jader: $N = \dfrac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Dosadíme
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Becquerel je jeden rozpad za sekundu. Historická jednotka curie odpovídá přibližně aktivitě 1 g radia, 3,7·10¹⁰ Bq.

Graf



Jak se veličiny mění v čase.

Poměr aktivit v generátoru Mo-99 / Tc-99m používaném v nemocnicích.

Zadání: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

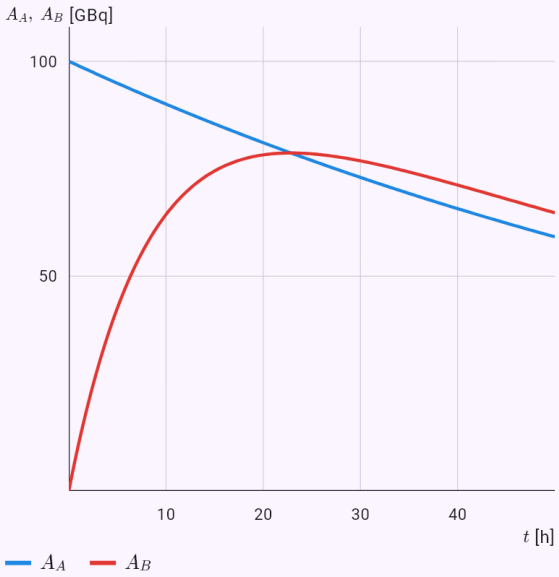
Výsledek

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Postup

- Hledáme $\frac{A_B}{A_A}$; zadáno:
  $A_{A,0} = 100\,\mathrm{GBq}, \quad T_A = 66\,\mathrm{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\mathrm{h}$
- Vzniká-li krátkodobý dceřiný nuklid z dlouhodobého mateřského, jeho aktivita po čase dožene mateřskou a pak ji sleduje v pevném poměru. Na tom stojí generátory radionuklidů v nemocnicích. Rovnice modelu
  $A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$
- Za poločas klesne množství na polovinu – rozpadová konstanta: $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  $\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$
- Dosadíme: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Přechodná rovnováha: po několika poločasech dceřiného nuklidu je poměr aktivit stálý.

Graf



Jak se veličiny mění v čase.

Tříčlenná rozpadová řada podle Batemanových rovnic.

Zadání: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

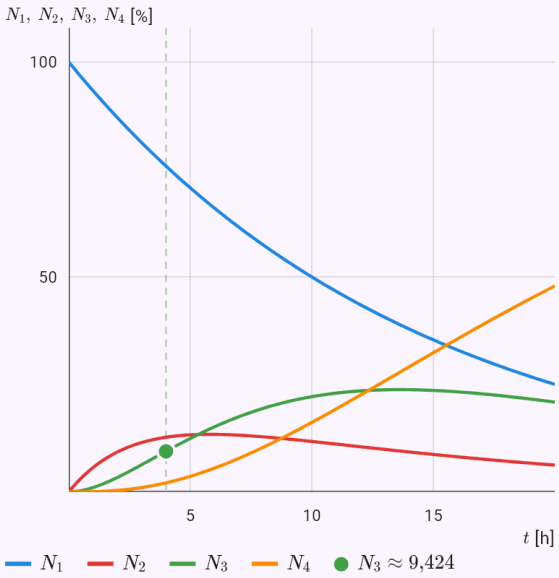
Výsledek

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Postup

- Hledáme N_n; zadáno:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\mathrm{h}, \quad t = 4\,\mathrm{h}$
- Batemanovy rovnice popisují rozpadovou řadu: každý člen vzniká z předchozího a rozpadá se na další. Je to soustava lineárních diferenciálních rovnic s řešením v uzavřeném tvaru. Rovnice modelu:
  $N_k' = \lambda_{k-1}N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- Za poločas klesne množství na polovinu – rozpadová konstanta
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j}(\lambda_l - \lambda_j)}$
- Dosadíme: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- V grafu je i stabilní konečný produkt; součet všech členů je stálý.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Vazebná energie na nukleon u železa-56.

Zadání: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

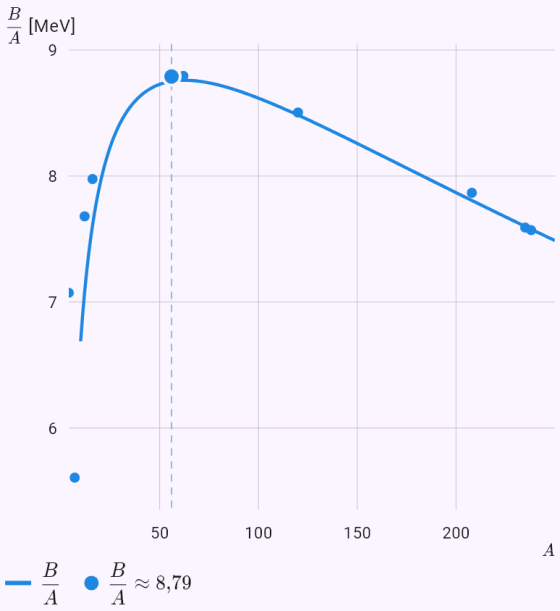
Výsledek

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Postup

- Hledáme $\frac{B}{A}$; zadáno:
  $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Jádro váží méně než jeho volné protony a neutrony. Rozdíl Δm odpovídá podle E = mc² vazebné energii. Její křivka na nukleon má maximum u železa, proto energii uvolňuje štěpení těžkých i slučování lehkých jader.
  Rovnice modelu:
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Hmotnostní úbytek
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Energetický ekvivalent: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Dosadíme: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Vazebná energie na nukleon: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Energie štěpení uranu-235.

Zadání: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Výsledek

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Postup

- Energie reakce Q je rozdíl hmotností před reakcí a po ní přepočtený vztahem E = mc². Kladné Q znamená, že se energie uvolňuje. Rovnice modelu:
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right) c^2$
- Reakce: $^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Součet hmotností:
  $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Dosadíme: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Bezprostředně se uvolní tato energie; s rozpady štěpných produktů je to asi 200 MeV na štěpení.

Kolik uhlí nahradí 1 g uranu-235.

Zadání: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg];`

`mode=fuel)`

Výsledek

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

Postup

- Hledáme m_c; zadáno
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- Z hmotnosti paliva plyne počet jader a z energie jednoho štěpení celková energie, kterou lze porovnat se spalováním uhlí. Rovnice modelu: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Počet jader: $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Dosadíme
  $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- Dosadíme
  $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Ideální výpočet: skutečný reaktor využije jen několik procent paliva a na elektřinu převede asi třetinu tepla.

Počet neutronů po 10 pokoleních při k = 1,05.

Zadání: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

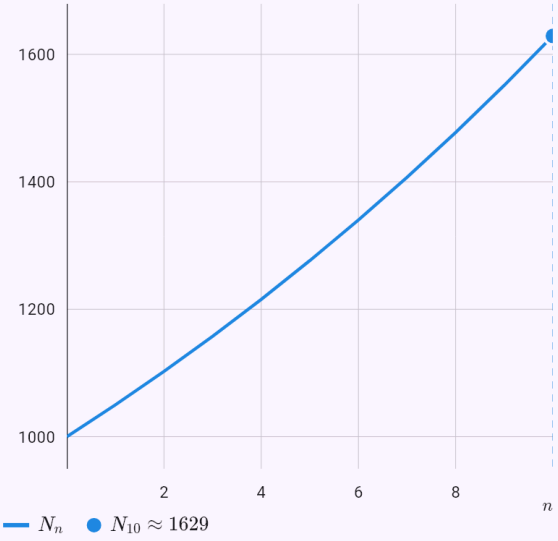
Výsledek

$$N_n \approx 1629$$

Postup

- Hledáme N_n; zadáno:
  $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- Multiplikační faktor k říká, kolik neutronů dalšího pokolení vyvolá jeden neutron. Počet neutronů tvoří geometrickou posloupnost $N_0 k^n$: při k < 1 reakce dohasíná, při k = 1 běží ustáleně a při k > 1 roste. Rovnice modelu: $N_n = N_0 k^n$
- Stav nadkritický: k > 1, výkon roste. Reaktor do tohoto stavu přechází jen krátce a nepatrně, když se má výkon zvýšit.
- Dosadíme: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Součet všech pokolení v podkritickém stavu.

Zadání: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

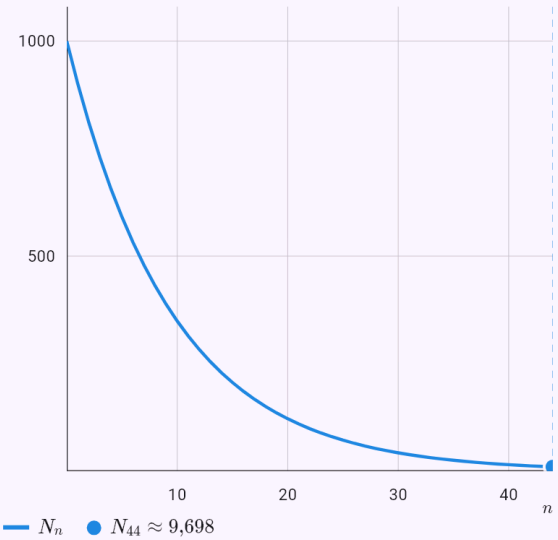
Výsledek

$$S \approx 10\,000$$

Postup

- Hledáme S; zadáno: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- Multiplikační faktor k říká, kolik neutronů dalšího pokolení vyvolá jeden neutron. Počet neutronů tvoří geometrickou posloupnost $N_0 k^n$: při k < 1 reakce dohasíná, při k = 1 běží ustáleně a při k > 1 roste. Rovnice modelu: $N_n = N_0 k^n$
- Stav podkritický: k < 1, reakce dohasíná.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$
- Dosadíme: $S = \frac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Perioda reaktoru se zpožděnými neutrony.

Zadání: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s]; mode=kinetics)`

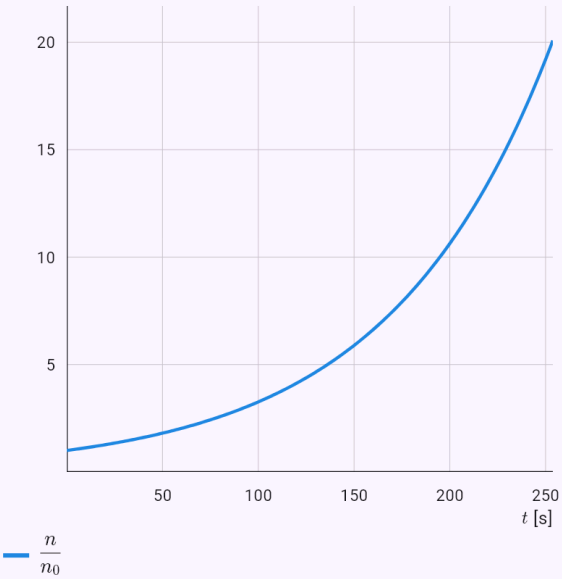
Výsledek

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

Postup

- Hledáme T; zadáno
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- Výkon reaktoru se mění exponenciálně s periodou T = ℓ/(k − 1). Zpožděné neutrony prodlouží střední dobu generace asi tisíckrát, a proto lze reaktor řídit. Rovnice modelu: $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \frac{\ell}{k-1}$
- Reaktivita: $\rho = \frac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Dosadíme: $T_p = \frac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Střední doba generace se zpožděnými neutrony: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Dosadíme: $T = \frac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Bez zpožděných neutronů by perioda byla zlomek sekundy. Díky nim stačí regulační tyče na změny výkonu reagovat.
- Výkon s touto periodou roste.

Graf



Jak se veličiny mění v čase.

Poloměr grafitové aktivní zóny tvaru koule.

Zadání: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite; shape=sphere)`

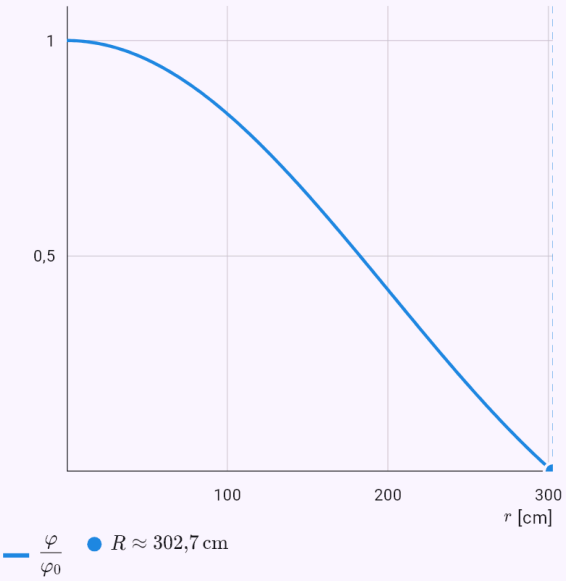
Výsledek

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme R; zadáno: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- V jednogrupovém difuzním modelu musí tvar neutronového toku splňovat ∇²φ + B²φ = 0. Velikost aktivní zóny reaktoru plyne z podmínky, že tok na okraji klesne na nulu. Jde o úlohu na vlastní hodnotu, určenou pro moderované mříže energetických reaktorů. Rovnice modelu: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Geometrický parametr: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Rovnice s kulovou souměrností: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Substituce: $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Okrajová podmínka: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Dosadíme: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Jednogrupový difuzní model bez reflektoru: skutečné reaktory mají reflektor, a jsou proto menší. Obecný tvar vede na parciální diferenciální rovnici.
- Převedeme jednotky: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Hrana grafitové aktivní zóny tvaru krychle.

Zadání: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=cube)`

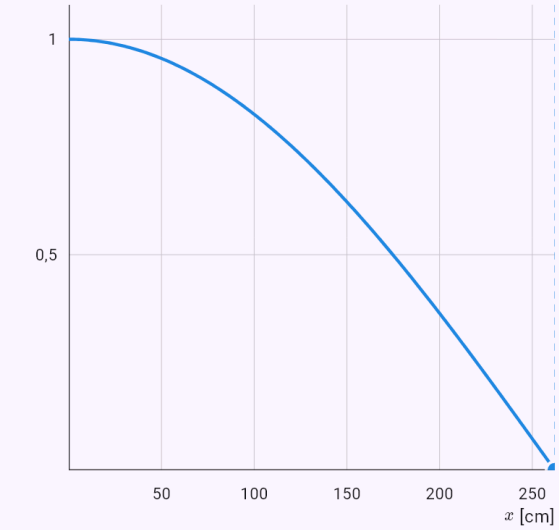
Výsledek

$$a \approx 524{,}3\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hledáme a; zadáno: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- V jednogrupovém difuzním modelu musí tvar neutronového toku splňovat ∇²φ + B²φ = 0. Velikost aktivní zóny reaktoru plyne z podmínky, že tok na okraji klesne na nulu. Jde o úlohu na vlastní hodnotu, určenou pro moderované mříže energetických reaktorů. Rovnice modelu: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Geometrický parametr: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Separace proměnných v x, y, z $\varphi = \cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos\dfrac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$
- Dosadíme $a = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\mathrm{cm}$
- Jednogrupový difuzní model bez reflektoru: skutečné reaktory mají reflektor, a jsou proto menší. Obecný tvar vede na parciální diferenciální rovnici.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Měděná tyč 100 °C s konci na 20 °C – teplota uprostřed po 10 minutách.

Zadání: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC]; Te=20[degC];`

x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)

Výsledek

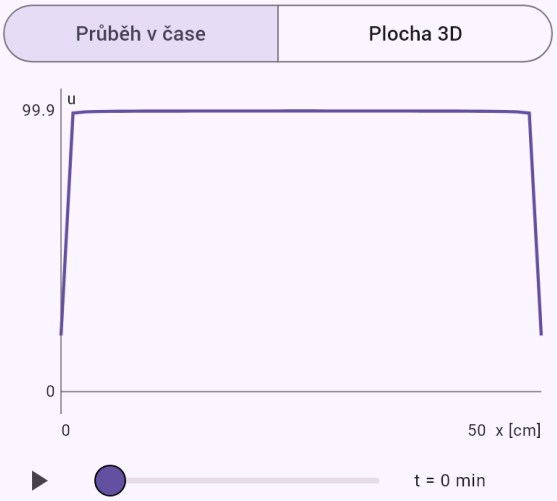
$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

Postup

- Hledáme T; zadáno
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e =$
- Převedeme jednotky
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- Rozložení teploty v tyči popisuje rovnice vedení tepla T_t = α·T_xx; teplotní vodivost α = λ/(ρc) říká, jak rychle se teplota vyrovnává. Tyč má na začátku všude teplotu T_0 a od okamžiku t = 0 se konce drží na teplotě T_e (nebo je jeden konec izolovaný). Řešení separací proměnných je Fourierova řada; každý člen klesá exponenciálně, nejpomaleji první s časovou konstantou τ. Oba konce se drží na teplotě T_e, nejdéle si teplotu drží střed tyče. Rovnice modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Řešení separací proměnných (Fourierova řada)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Časová konstanta nejpomalejšího členu
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e) S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$

- Součet řady v bodě: $S \approx 0{,}07967$
- Dosadíme: $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Graf



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Ocelová tyč s jedním izolovaným koncem – za jak dlouho zbude 5 % rozdílu teplot.

Zadání: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC];`

`Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)`

Výsledek

$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

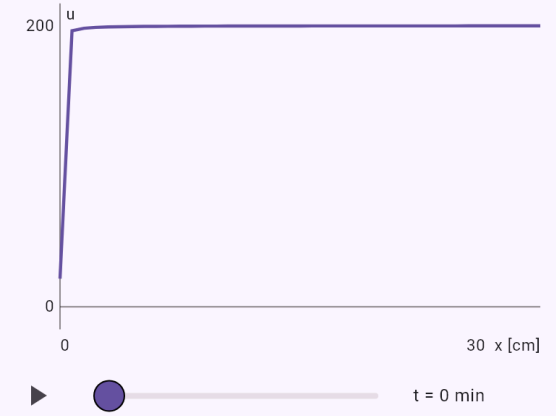
Postup

- Hledáme t; zadáno
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Převedeme jednotky
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- Rozložení teploty v tyči popisuje rovnice vedení tepla T_t = α·T_xx; teplotní vodivost α = λ/(ρc) říká, jak rychle se teplota vyrovnává. Tyč má na začátku všude teplotu T_0 a od okamžiku t = 0 se konce drží na teplotě T_e (nebo je jeden konec izolovaný). Řešení separací proměnných je Fourierova řada; každý člen klesá exponenciálně, nejpomaleji první s časovou konstantou τ. Konec x = 0 se drží na teplotě T_e a konec x = L je izolovaný (teplo jím neprochází) – tyč se chová jako polovina dvakrát delší tyče, nejdéle si teplotu drží izolovaný konec.
  Rovnice modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Řešení separací proměnných (Fourierova řada)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k -$
- Časová konstanta nejpomalejšího členu
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$

- Dosadíme: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- Nejteplejší je izolovaný konec. Po chvíli převládne první člen řady, proto stačí jeho útlum; přesný čas vyjde z celé řady.
- Převedeme jednotky: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Měděná deska 30 × 20 cm ze 100 °C s okraji na 20 °C – teplota uprostřed po 2 minutách.

Zadání: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Výsledek

$$T \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$$

Postup

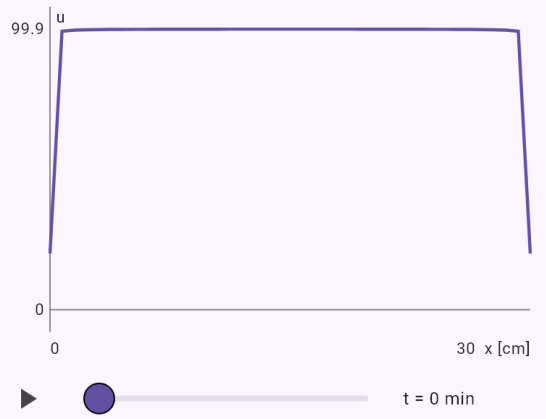
- Hledáme T; zadáno
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Převedeme jednotky
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- Teplotu v obdélníkové desce a × b popisuje rovnice vedení tepla T_t = α(T_xx + T_yy). Deska má na začátku všude teplotu T_0 a od t = 0 se okraje drží na teplotě T_e. Úloha se separuje na dvě tyče: podíl zbývajícího rozdílu teplot je součinem řad pro tyč délky a a tyč délky b – proto deska chladne rychleji než každá z obou tyčí. Nejdéle si teplotu drží střed desky. Rovnice modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separace na dvě tyče – součin dvou Fourierových řad
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- Časová konstanta nejpomalejšího členu
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Součty obou řad v bodě: $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- Dosadíme

$$T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$$

- Graf ukazuje teplotu podél přímky: $y = 10\,\mathrm{cm}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Betonová deska s jedním izolovaným okrajem – za kolik hodin zbude 5 % rozdílu teplot.

Zadání: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Výsledek

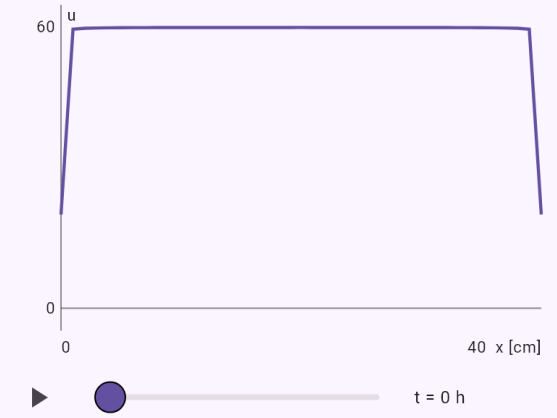
$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

Postup

- Hledáme t; zadáno
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- Převedeme jednotky
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- Teplotu v obdélníkové desce a × b popisuje rovnice vedení tepla T_t = α(T_xx + T_yy). Deska má na začátku všude teplotu T_0 a od t = 0 se tři okraje drží na teplotě T_e, okraj y = b je izolovaný (teplo jím neprochází). Úloha se separuje na dvě tyče; izolovaný okraj se chová jako osa souměrnosti dvakrát vyšší desky. Nejdéle si teplotu drží střed izolovaného okraje. Rovnice modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separace na dvě tyče – součin dvou Fourierových řad
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)}$
- Časová konstanta nejpomalejšího členu
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)}$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Dosadíme: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$
- Nejteplejší je střed izolovaného okraje. Po chvíli převládne součin prvních členů obou řad (16/π²)·e^(−t/τ), proto stačí jeho útlum; přesný čas vyjde z celých řad.
- Graf ukazuje teplotu podél přímky: $y = 20\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky: $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Struna e¹ kytary – základní frekvence.

Zadání: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

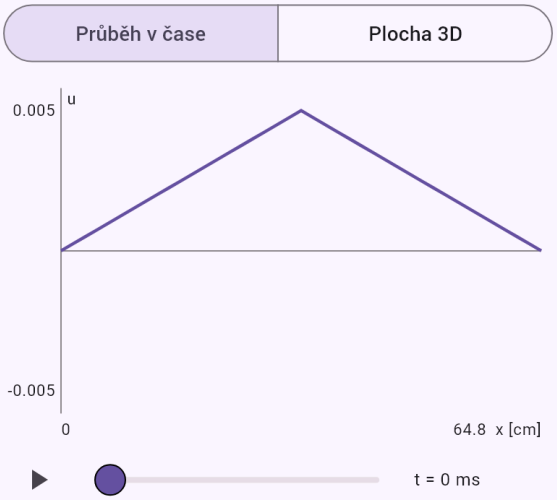
Výsledek

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

Postup

- Hledáme f_1; zadáno:
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- Převedeme jednotky
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Napnutá struna s upevněnými konci se řídí vlnovou rovnicí u_tt = c²·u_xx; rychlost vlny c = √(F/μ) dává tahová síla F a délková hustota μ. Separací proměnných vyjdou stojaté vlny sin(nπx/L) s frekvencemi f_n = n·c/(2L). Drnknutá struna má tvar trojúhelníku – rozloží se do Fourierovy řady a každá harmonická kmitá svou frekvencí. Rovnice modelu
  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$
- Rychlost vlny: $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Vlastní kmity struny (stojaté vlny)
  $X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$
- Dosadíme: $f_1 = \frac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- Vyšší frekvence jsou celistvými násobky základní (harmonické) – proto má struna jasnou výšku tónu.

Graf



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Drnknutá struna – výchylka uprostřed po 1 ms.

Zadání: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

x=32.4[cm]; t=1[ms])

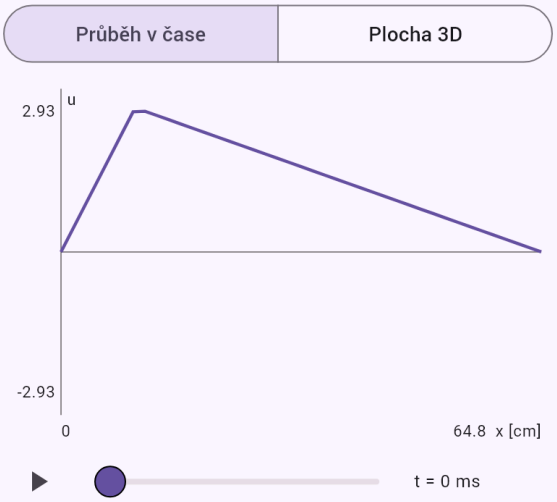
Výsledek

$$u \approx -1{,}774\,\mathrm{mm}$$

Postup

- Hledáme u; zadáno
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}, \quad p = 10\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/r}$
- Napnutá struna s upevněnými konci se řídí vlnovou rovnicí u_tt = c²·u_xx; rychlost vlny c = √(F/μ) dává tahová síla F a délková hustota μ. Separací proměnných vyjdou stojaté vlny sin(nπx/L) s frekvencemi f_n = n·c/(2L). Drnknutá struna má tvar trojúhelníku – rozloží se do Fourierovy řady a každá harmonická kmitá svou frekvencí. Rovnice modelu
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Rychlost vlny: $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Vlastní kmity struny (stojaté vlny)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Drnknutá struna – Fourierova řada
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Dosadíme: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\mathrm{m}$
- Za periodu se tvar struny vrátí: $T = \dfrac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\mathrm{s}$
- Převedeme jednotky: $u \approx -0{,}001774\,\mathrm{m} = -1{,}774\,\mathrm{mm}$

Graf



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Buben – frekvence módu (1, 1) s jedním uzlovým průměrem.

Zadání: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2]; m=1[one];`

```
n=1[one])
```

Výsledek

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Postup

- Hledáme f_{mn}; zadáno $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- Převedeme jednotky: $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Kruhová membrána upevněná na okraji (blána bubnu) se řídí vlnovou rovnicí u_tt = c²·Δu s rychlostí c = √(T/σ). V polárních souřadnicích se proměnné oddělí: úhlová část je cos(mφ), radiální Besselova funkce J_m(kr). Podmínka na okraji J_m(ka) = 0 dává k = j_mn/a, kde j_mn je n-tý kořen J_m, a frekvence f_mn = j_mn·c/(2πa). Mód (m, n) má m uzlových průměrů a n − 1 uzlových kružnic. Rovnice modelu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a,\varphi,t) = 0$$

- Rychlost vlny v membráně:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$$

- Separace v polárních souřadnicích – Besselova rovnice

$$u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$$

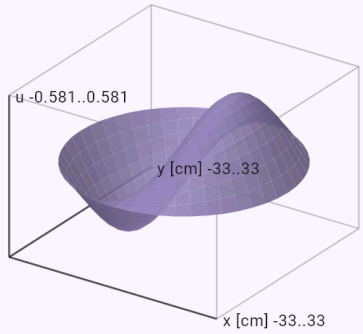
- Okraj membrány je upevněný:

$$J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$$

- Dosadíme: $f_{11} = \dfrac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- Vyšší módy nejsou celistvými násobky základního. Proto buben nezní tak jasnou výškou tónu jako struna.

$$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Dostřel šikmého vrhu ve vakuu.

Zadání: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Výsledek

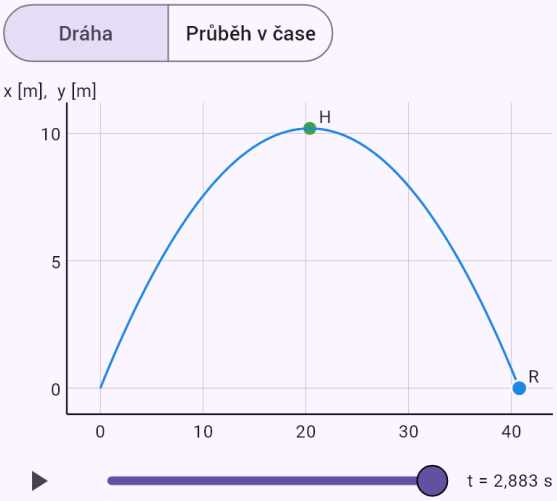
$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme R; zadáno: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Bez odporu vzduchu se pohyb rozkládá na dva nezávislé: vodorovný je rovnoměrný a svislý je rovnoměrně zrychlený. Dráhou je parabola a všechny hodnoty lze vyjádřit přesnými vzorci. Rovnice modelu:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 20 \cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
- Doba letu
  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81 (0 - 0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $R = v_{0x} T$
- Dosadíme: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Při stejné výšce startu a dopadu platí školní vzorce
  $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
  $$H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$
  $$T = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

- Největší dostřel je při úhlu 45°; úhly α a 90° − α dávají stejný dostřel.

Graf



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Dopadová rychlost při vrhu z výšky.

Zadání: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

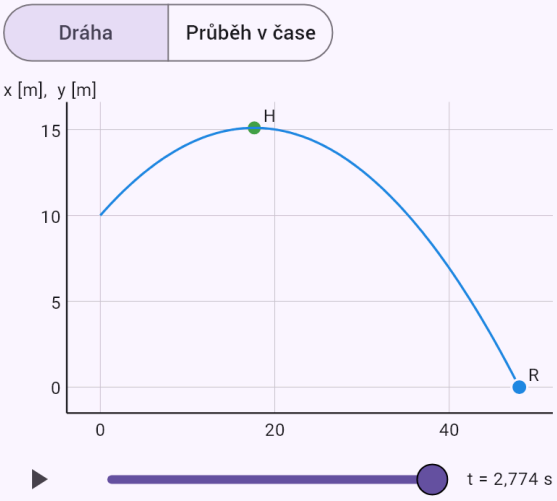
Výsledek

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hledáme v_k; zadáno:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Bez odporu vzduchu se pohyb rozkládá na dva nezávislé: vodorovný je rovnoměrný a svislý je rovnoměrně zrychlený. Dráhou je parabola a všechny hodnoty lze vyjádřit přesnými vzorci. Rovnice modelu:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 20 \cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Dosadíme
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Plyne to ze zákona zachování mechanické energie, nezávisí na úhlu.

Graf



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Dva elevační úhly pro vzdálenost 200 m.

Zadání: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

Výsledek

$$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$$
$$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$$

Postup

- Hledáme α; zadáno: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- Do rovnice dráhy se dosadí vzdálenost a výška cíle. Po substituci u = tg α vznikne kvadratická rovnice, která má obvykle dva kořeny: plochou a strmou dráhu. Rovnice modelu

$$h_k = h_0 + d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g d^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)$$

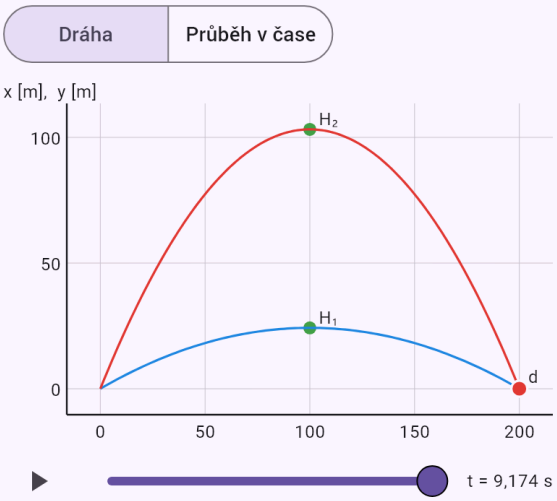
- Kvadratická rovnice pro tg α

$$u = \mathrm{tg}\,\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$$
$$a = \frac{g d^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81 \cdot (200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$$
$$c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$$

- Diskriminant:
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4 \cdot 78{,}48 \cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Kořeny: $u_{1,2} = \frac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Řešení
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Řešení
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$

- Na vodorovné rovině dávají oba úhly součet 90°.

Graf



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Dostřel fotbalového míče s odporem vzduchu a srovnání s vakuem.

Zadání: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Výsledek

$$R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$$

Postup

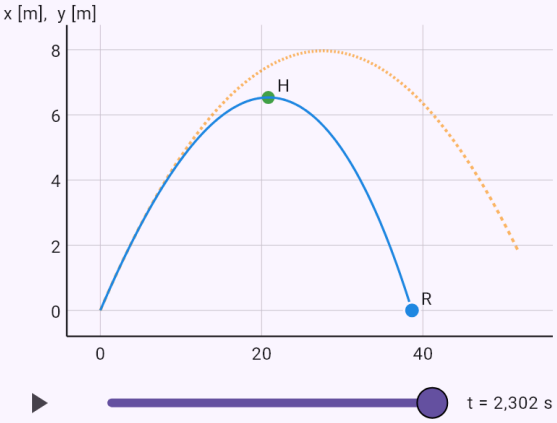
- Hledáme R; zadáno
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ś
- Převedeme jednotky
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Na těleso působí tíha a odpor vzduchu proti rychlosti vůči vzduchu, takže se v rovnicích projeví i vítr. Složky rychlosti jsou provázané a přesné řešení neexistuje, soustava se proto řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Konstanta odporu vzduchu (součinitel odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Mezní rychlost volného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu vůči tíze při startu: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Soustava šesti rovnic pro x, y, z a složky rychlosti byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků: $N = 1807$
- Průběh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Klíčové hodnoty
  $H \approx 6{,}534\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$
- Stejný vrh ve vakuu
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$
- Podíl dostřelu ve vzduchu a ve vakuu: $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Graf

Dráha | Průběh v čase



Plná čára je dráha ve vzduchu, čárkovaná dráha ve vakuu. Osy nemají stejné měřítko.

Boční odchylka míče ve větru, s bokorysem a půdorysem.

Zadání: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Výsledek

$$z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$$

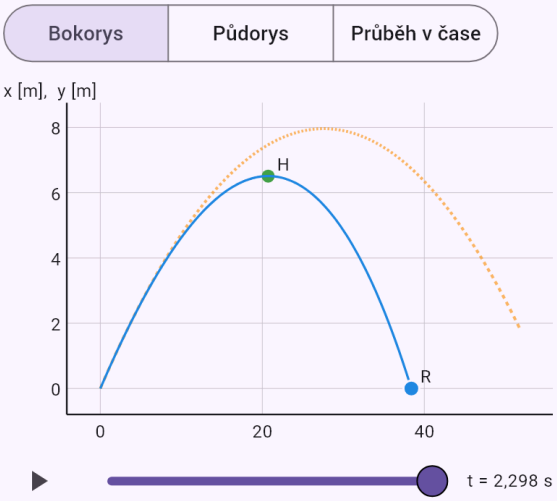
Postup

- Hledáme z; zadáno
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ś
- Převedeme jednotky
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Na těleso působí tíha a odpor vzduchu proti rychlosti vůči vzduchu, takže se v rovnicích projeví i vítr. Složky rychlosti jsou provázané a přesné řešení neexistuje, soustava se proto řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Konstanta odporu vzduchu (součinitel odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Mezní rychlost volného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu vůči tíze při startu: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- Soustava šesti rovnic pro x, y, z a složky rychlosti byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků: $N = 1804$
- Průběh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

- Klíčové hodnoty
  $H \approx 6{,}51\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}298\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}4\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$
- Stejný vrh ve vakuu
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$
- Podíl dostřelu ve vzduchu a ve vakuu: $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$
- Vliv větru: $\Delta R \approx -0{,}2474\,\mathrm{m}, \quad z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$

Graf



Plná čára je dráha ve vzduchu, čárkovaná dráha ve vakuu. Osy nemají stejné měřítko.

Sportovní malorážka: rychlost na konci letu, křivka G1.

Zadání: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Výsledek

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Postup

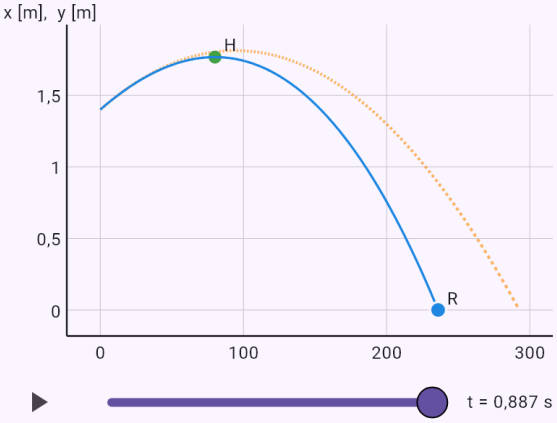
- Hledáme v_k; zadáno
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Převedeme jednotky
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Na těleso působí tíha a odpor vzduchu proti rychlosti vůči vzduchu, takže se v rovnicích projeví i vítr. Složky rychlosti jsou provázané a přesné řešení neexistuje, soustava se proto řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Machovo číslo a součinitel odporu při startu:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Konstanta odporu vzduchu (součinitel odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Mezní rychlost volného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu vůči tíze při startu: $\frac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- Soustava šesti rovnic pro x, y, z a složky rychlosti byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků:
  $N = 73$
- Průběh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

- Klíčové hodnoty
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- Stejný vrh ve vakuu
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Podíl dostřelu ve vzduchu a ve vakuu: $\frac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- Součinitel odporu se bere z přibližné křivky podle Machova čísla, u střely křivka G1 násobená tvarovým součinitelem. Tabulky výrobce mají přednost. Stáčení rotující střely se nepočítá.

Graf

Dráha | Průběh v čase



Plná čára je dráha ve vzduchu, čárkovaná dráha ve vakuu. Osy nemají stejné měřítko.

Lovecká kulovnice: dostřel s hustotou vzduchu podle výšky.

Zadání: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

`cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)`

Výsledek

$$R \approx 2365\,\mathrm{m}$$

Postup

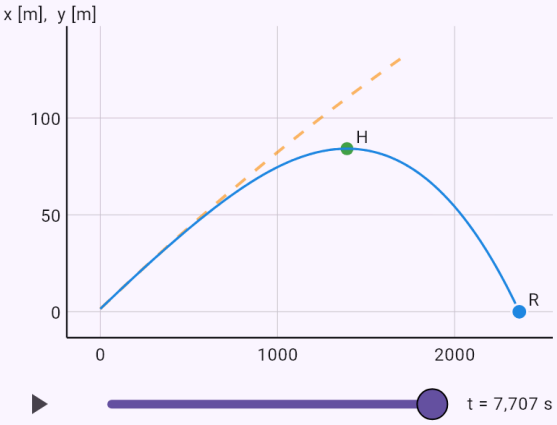
- Hledáme R; zadáno
  $v_0 = 860\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad m = 9{,}72\,\mathrm{g},$
- Převedeme jednotky
  $m = 9{,}72\,\mathrm{g} = 0{,}00972\,\mathrm{kg}, \quad S = 48{,}1\,\mathrm{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Na těleso působí tíha a odpor vzduchu proti rychlosti vůči vzduchu, takže se v rovnicích projeví i vítr. Složky rychlosti jsou provázané a přesné řešení neexistuje, soustava se proto řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 860 \cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 860 \sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Hustota vzduchu podle standardní atmosféry:
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\mathrm{kg/m^3}$
- Machovo číslo a součinitel odporu při startu:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Konstanta odporu vzduchu (součinitel odporu):
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Mezní rychlost volného pádu: $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu vůči tíze při startu: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- Soustava šesti rovnic pro x, y, z a složky rychlosti byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků:
  $N = 335$
- Průběh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Klíčové hodnoty
  $H \approx 84{,}15\,\mathrm{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2365\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- Stejný vrh ve vakuu
  $R_v \approx 13\,110\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\mathrm{s}$
- Podíl dostřelu ve vzduchu a ve vakuu: $\dfrac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- Součinitel odporu se bere z přibližné křivky podle Machova čísla, u střely křivka G1 násobená tvarovým součinitelem. Tabulky výrobce mají přednost. Stáčení rotující střely se nepočítá.
- Během letu rychlost klesla pod rychlost zvuku; v této oblasti se součinitel odporu mění nejvíc.

Graf

Dráha | Průběh v čase



Plná čára je dráha ve vzduchu, čárkovaná dráha ve vakuu. Osy nemají stejné měřítko.

Dělová koule ze školní fyziky: odchylka vlivem Coriolisovy síly.

Zadání: `model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;`

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

Výsledek

$$z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$$

Postup

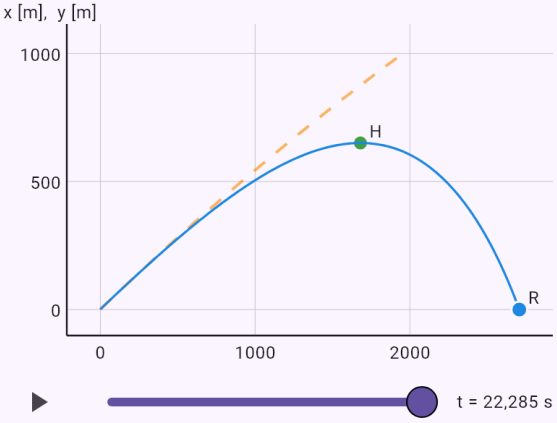
- Hledáme z; zadáno
  $v_0 = 439\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\mathrm{m}, \quad m = 5580\,\mathrm{g},$
- Převedeme jednotky
  $m = 5580\,\mathrm{g} = 5{,}58\,\mathrm{kg}, \quad S = 10\,200\,\mathrm{mm^2} = 0{,}0102\,\mathrm{m^2}$
- Na těleso působí tíha a odpor vzduchu proti rychlosti vůči vzduchu, takže se v rovnicích projeví i vítr. Složky rychlosti jsou provázané a přesné řešení neexistuje, soustava se proto řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Složky počáteční rychlosti
  $v_{0x} = 439 \cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 439 \sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Machovo číslo a součinitel odporu při startu:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Konstanta odporu vzduchu (součinitel odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\mathrm{kg/m}$
- Mezní rychlost volného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu vůči tíze při startu: $\frac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Úhlová rychlost Země (Coriolisova síla):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$
- Soustava šesti rovnic pro x, y, z a složky rychlosti byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků:
  $N = 1023$
- Průběh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Klíčové hodnoty
  $H \approx 650{,}1\,\mathrm{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2706\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Stejný vrh ve vakuu
  $R_v \approx 17\,020\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 2457\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\mathrm{s}$
- Podíl dostřelu ve vzduchu a ve vakuu: $\frac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Vliv Coriolisovy síly
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Součinitel odporu se bere z přibližné křivky podle Machova čísla, u střely křivka G1 násobená tvarovým součinitelem. Tabulky výrobce mají přednost. Stáčení rotující střely se nepočítá.
- Během letu rychlost klesla pod rychlost zvuku; v této oblasti se součinitel odporu mění nejvíc.

Graf

Bokorys | Půdorys | Průběh v čase



Plná čára je dráha ve vzduchu, čárkovaná dráha ve vakuu. Osy nemají stejné měřítko.

Plochý a strmý úhel pro míč s odporem vzduchu.

Zadání: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic; projectile=ball;`

`cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Výsledek

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

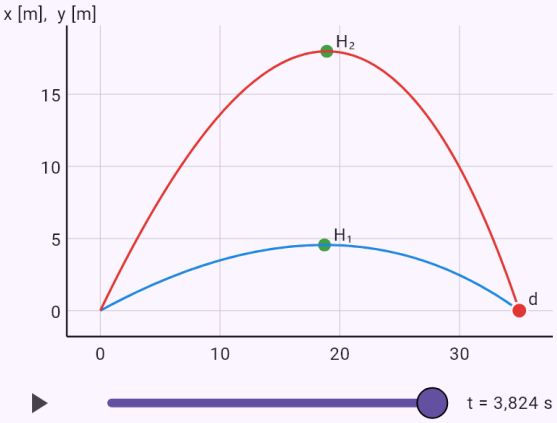
Postup

- Hledáme α; zadáno
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Převedeme jednotky
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- S odporem vzduchu vzorec neexistuje. Výpočet proto zkouší různé úhly a sleduje, jak vysoko těleso ve vzdálenosti cíle letí. Úhly, kdy prochází přesně cílem, se najdou půlením intervalu. Rovnice modelu:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Konstanta odporu vzduchu (součinitel odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Mezní rychlost volného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu vůči tíze při startu: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Úhly byly nalezeny metodou střelby: půlením intervalu podle výšky ve vzdálenosti d, tedy hledáním kořene rovnice $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Řešení
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Řešení

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Graf

Dráha | Průběh v čase



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Pádová rychlost malého letadla.

Zadání: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

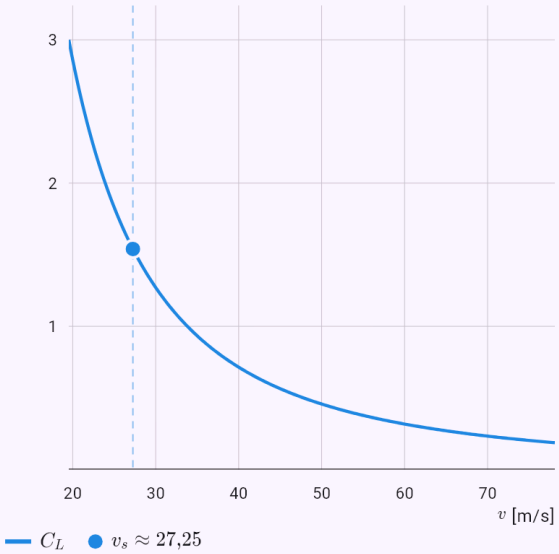
Výsledek

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

Postup

- Hledáme v_s; zadáno
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- Ve vodorovném letu se vztlak rovná tíze a tah odporu. Odpor má dvě části: škodlivý roste s druhou mocninou rychlosti, indukovaný s ní klesá, takže existuje rychlost nejmenšího odporu. Rovnice modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Tíha letadla: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Dosadíme
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- Převedeme jednotky: $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Odpor v ustáleném letu a graf škodlivého a indukovaného odporu.

Zadání: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

Výsledek

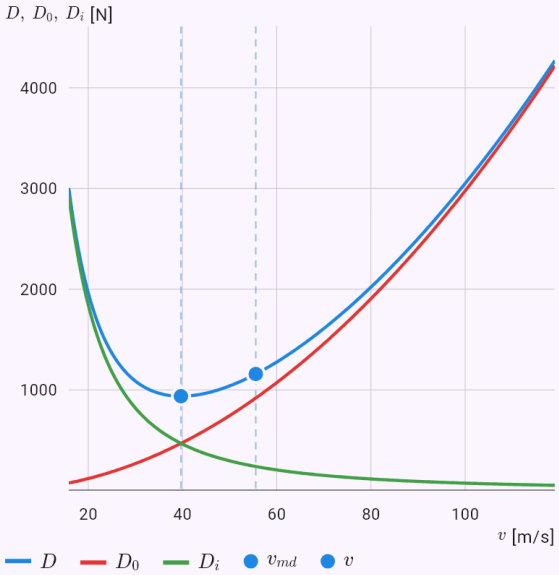
$$D \approx 1{,}158\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hledáme D; zadáno
  $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 1$
- Převedeme jednotky: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- Ve vodorovném letu se vztlak rovná tíze a tah odporu. Odpor má dvě části: škodlivý roste s druhou mocninou rychlosti, indukovaný s ní klesá, takže existuje rychlost nejmenšího odporu. Rovnice modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Tíha letadla: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Štíhlost křídla: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Součinitel indukovaného odporu (Oswaldův součinitel e, polára): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Dynamický tlak
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\mathrm{Pa}$
- Potřebný součinitel vztlaku:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Škodlivý a indukovaný odpor:
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\mathrm{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\mathrm{N}$
- Klouzavost při této rychlosti: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $D = D_0 + D_i$

- Dosadíme: $D \approx 1158\,\mathrm{N}$
- Převedeme jednotky: $D \approx 1158\,\mathrm{N} = 1{,}158\,\mathrm{kN}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Ekranoplán KM: kolik odporu ušetří přízemní efekt.

Zadání: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

`aircraft=km; air=constant; ground=on)`

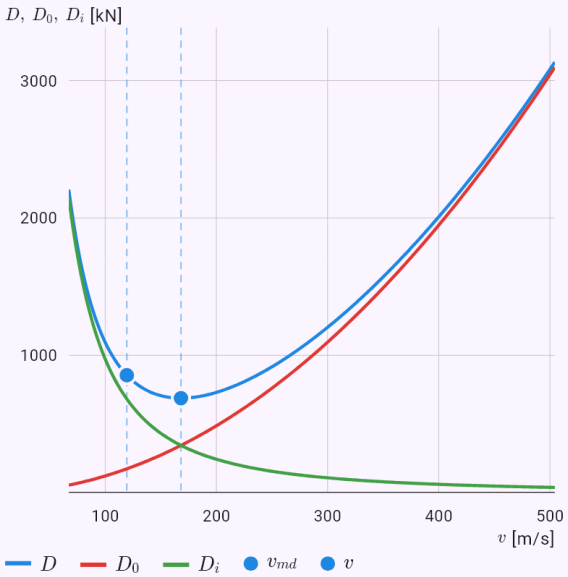
Výsledek

$$D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hledáme D; zadáno
  $v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad S = 662{,}5\,\mathrm{m^2}, \quad b$
- Převedeme jednotky: $v = 430\,\mathrm{km/h} = 119{,}4\,\mathrm{m/s}$
- Ve vodorovném letu se vztlak rovná tíze a tah odporu. Odpor má dvě části: škodlivý roste s druhou mocninou rychlosti, indukovaný s ní klesá, takže existuje rychlost nejmenšího odporu. Rovnice modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Tíha letadla: $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\mathrm{kN}$
- Štíhlost křídla: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Součinitel indukovaného odporu (Oswaldův součinitel e, polára): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- Přízemní efekt zmenší indukovaný odpor
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Přírůstek vztlaku při stejném úhlu náběhu (odhad z teorie nosné čáry)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Empirický vzorec McCormicka pro běžná křídla. U křídla s malou štíhlostí a koncovými deskami, jako má ekranoplán, je skutečný efekt silnější.
- Dynamický tlak
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\mathrm{Pa}$
- Potřebný součinitel vztlaku:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Škodlivý a indukovaný odpor
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\mathrm{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\mathrm{kN}$
- Klouzavost při této rychlosti: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Úspora odporu díky přízemnímu efektu:
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\mathrm{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $D = D_0 + D_i$
- Dosadíme: $D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$
- Převedeme jednotky: $D \approx 855\,600\,\mathrm{N} = 855{,}6\,\mathrm{kN}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Délka rozjezdu malého letadla s grafem rychlosti a dráhy.

Zadání: `model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];`

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Výsledek

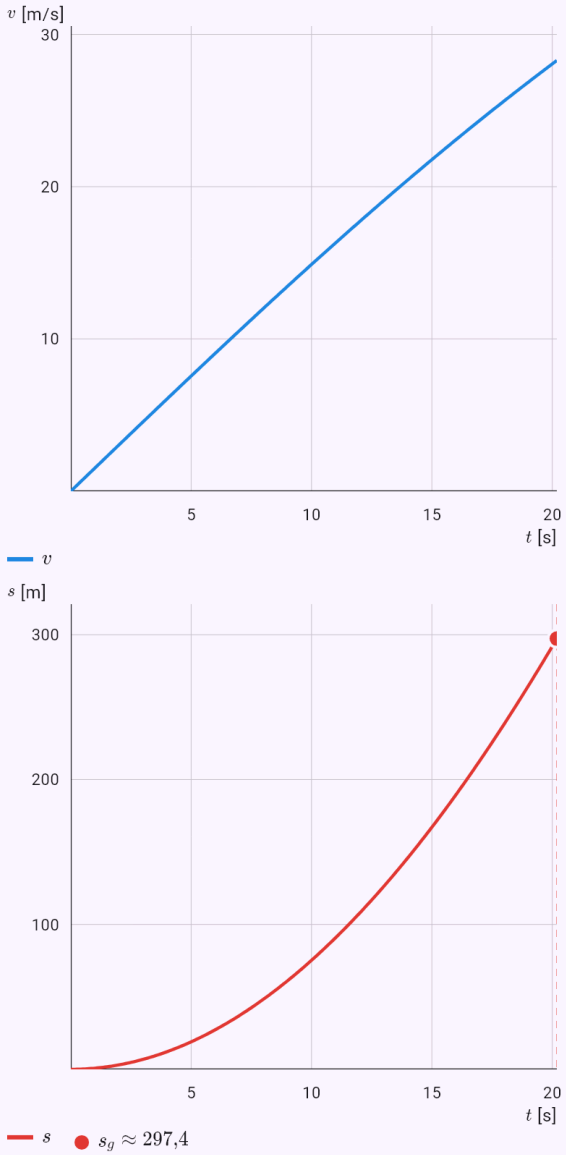
$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme s_g; zadáno
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- Převedeme jednotky: $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$
- Letadlo zrychluje z klidu do rychlosti odlepení. Působí tah, odpor vzduchu a valivé tření, které klesá s rostoucím vztlakem. Rovnice se řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu; tah se bere jako průměrný a stálý. Rovnice modelu
  $m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = v$
- Tíha letadla: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Pádová rychlost
  $v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$
- Rychlost odlepení vůči vzduchu:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$
- Štíhlost křídla: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Součinitel indukovaného odporu (Oswaldův součinitel e, polára): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Součinitel odporu při jízdě po dráze:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Zrychlení na začátku a na konci
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s^2}$
- Rovnice byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků: $N = 2172$
- Průběh na dráze

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Poloměr zatáčky při náklonu 30°.

Zadání: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

Výsledek

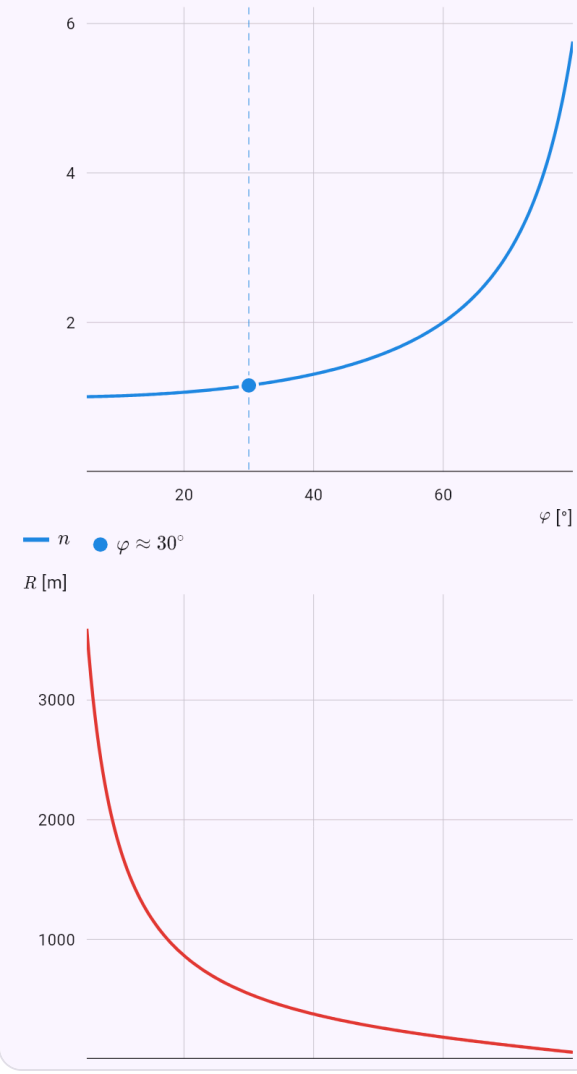
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

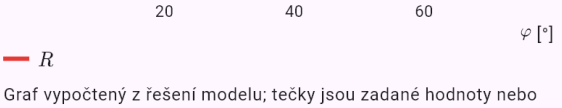
Postup

- Hledáme R; zadáno: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- Převedeme jednotky: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- V koordinované zatáčce drží svislá složka vztlaku tíhu a vodorovná složka zakřivuje dráhu. Násobek zatížení závisí jen na náklonu, poloměr i na rychlosti. Rovnice modelu: $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $R = \dfrac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}$
- Dosadíme

$$R = \frac{(55{,}56)^2}{9{,}81 \cdot \mathrm{tg}\,30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

Graf





Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Dolet větroně z výšky 1000 m.

Zadání: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Výsledek

$$R \approx 33{,}91\,\mathrm{km}$$

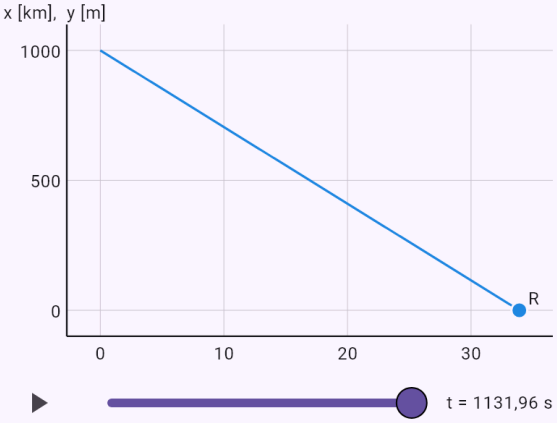
Postup

- Hledáme R; zadáno $h = 1000\,\mathrm{m}, \quad m = 600\,\mathrm{kg}, \quad S = 17{,}95\,\mathrm{m}^2, \quad b = 17\,\mathrm{m}$
- Bez tahu letadlo klesá po přímce, jejíž sklon určuje poměr vztlaku a odporu. Dolet z výšky je výška krát klouzavost a největší je při rychlosti nejlepší klouzavosti. Rovnice modelu: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{D}{L} = \dfrac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \dfrac{v}{E}$
- Tíha letadla: $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\mathrm{N}$
- Štíhlost křídla: $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Součinitel indukovaného odporu (Oswaldův součinitel e, polára): $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Součinitel vztlaku při nejlepší klouzavosti: $C_L^* = \sqrt{\dfrac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\dfrac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Rychlost nejlepší klouzavosti $v = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Největší klouzavost a nejmenší odpor $E_{max} = \dfrac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Úhel klouzání: $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- Počítá se s malým úhlem klouzání, kdy se vztlak prakticky rovná tíze, a se stálou hustotou vzduchu.

- Vyjádříme hledanou veličinu: $R = hE$
- Dosadíme: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\mathrm{m}$
- Převedeme jednotky: $R \approx 33\,910\,\mathrm{m} = 33{,}91\,\mathrm{km}$

Graf

Dráha | Průběh v čase



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Apollo 13: přetížení při vstupu pod úhlem −6,20°.

Zadání: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn]; gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])`

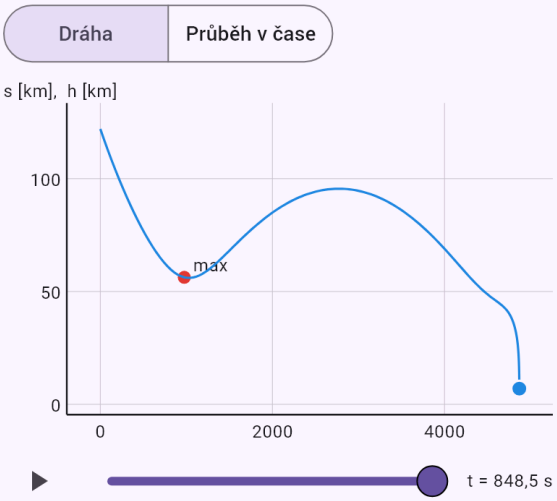
Výsledek

$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$

Postup

- Hledáme a_{max}; zadáno
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Jeden průlet atmosférou ze vstupní výšky h_0 (standardně 122 km) se zadaným úhlem dráhy γ_0 a stálým natočením vztlaku σ až do výšky h_k (otevření padáků, u raketoplánu přechod do klouzavého letu). Největší přetížení porovnáme se vzorcem Allena a Eggerse pro balistický vstup. Tepelný tok ve stagnačním bodě dává Suttonův–Gravesův vzorec q = k·√(ρ/R_n)·v³ a teplotu povrchu štítu radiační rovnováha εσT⁴ = q. Rovnice modelu
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Čelní plocha a balistický koeficient
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Hustota vzduchu podle standardní atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Svislá složka vztlaku při natočení σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Zachycení: loď sestoupila do výšky h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Největší přetížení (numericky)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Balistický vstup bez vztlaku by podle Allena a Eggerse dal mnohem víc – vztlak přetížení snižuje
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$
- Největší tepelný tok ve stagnačním bodě (Sutton–Graves) a celkové teplo na m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Teplota povrchu štítu z radiační rovnováhy (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$
- Zjednodušení: Země je kulatá a neotáčí se, C_D a L/D jsou stálé a natočení σ je po celý let stejné (skutečné řízení ho mění). Tepelný tok je jen konvektivní; při návratu od Měsíce přidává ještě záření žhavé rázové vrstvy. Ablativní štít část tepla odnáší odpařováním, radiační rovnovážná teplota je proto horní odhad.

Graf



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Vstupní koridor kabiny Apolla při návratu od Měsíce.

Zadání: `model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn])`

Výsledek

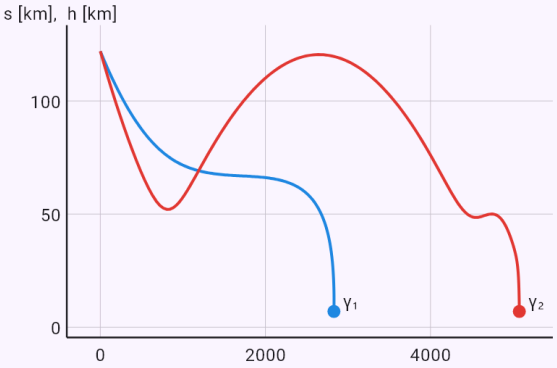
$$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$$
$$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$$
$$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$$

Postup

- Hledáme $\Delta\gamma$; zadáno
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Meze vstupního úhlu najdeme půlením intervalu. Mělká mez je nejplošší vstup, který se se vztlakem natočeným dolů (σ = 180°) ještě nevynoří nad vstupní výšku; strmá mez je nejstrmější vstup, který se vztlakem nahoru (σ = 0°) nepřekročí zadané přetížení (a tepelný tok, je-li zadán). Pro návrat od Měsíce vychází koridor široký jen asi 2°. Apollo 13 (duben 1970) se po výbuchu kyslíkové nádrže vracelo s vypnutou velitelskou lodí a šetřilo energií. Dráhu posádka opravovala ručním zážehem motoru lunárního modulu, zaměřeným podle Země v zaměřovači v okně, a poslední korekce mířila do středu koridoru. Plánovaný vstupní úhel byl −6,20°; počítač velitelské lodi znovu zapnuli až před vstupem. Rovnice modelu
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Čelní plocha a balistický koeficient
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Hustota vzduchu podle standardní atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Mělká mez koridoru (vztlak dolů):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Strmá mez koridoru (vztlak nahoru):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Šířka vstupního koridoru: $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Zjednodušení: Země je kulatá a neotáčí se, C_D a L/D jsou stálé a natočení σ je po celý let stejné (skutečné řízení ho mění). Tepelný tok je jen konvektivní; při návratu od Měsíce přidává ještě záření žhavé rázové vrstvy. Ablativní štít část tepla odnáší odpařováním, radiační rovnovážná teplota je proto horní odhad.

Graf

Dráha | Průběh v čase



Osy nemají stejné měřítko.

Vostok: balistický sestup bez vztlaku a 8–9 g.

Zadání: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg];`

`sigma=0[deg]; hk=7[km]; nlim=10[gn])`

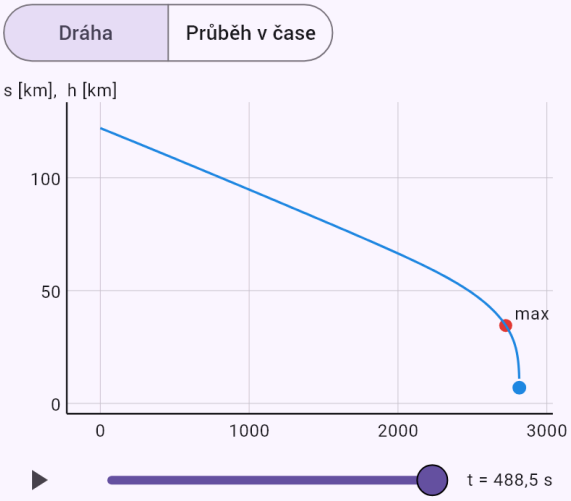
Výsledek

$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$

Postup

- Hledáme a_{max}; zadáno
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Jeden průlet atmosférou ze vstupní výšky h_0 (standardně 122 km) se zadaným úhlem dráhy γ_0 a stálým natočením vztlaku σ až do výšky h_k (otevření padáků, u raketoplánu přechod do klouzavého letu). Největší přetížení porovnáme se vzorcem Allena a Eggerse pro balistický vstup. Tepelný tok ve stagnačním bodě dává Suttonův–Gravesův vzorec q = k·√(ρ/R_n)·v³ a teplotu povrchu štítu radiační rovnováha εσT⁴ = q. Rovnice modelu
  $\dot{v} = -\dfrac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \dfrac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\dfrac{g}{v} - \dfrac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Čelní plocha a balistický koeficient
  $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \dfrac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Hustota vzduchu podle standardní atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Zachycení: loď sestoupila do výšky h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Největší přetížení (numericky)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Kontrola vzorcem Allena a Eggerse pro balistický vstup (bez gravitace, exponenciální atmosféra s výškou H)
  $a_{max} \approx \dfrac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \dfrac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$
- Největší tepelný tok ve stagnačním bodě (Sutton–Graves) a celkové teplo na m²
  $q_{max} = k\sqrt{\dfrac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Teplota povrchu štítu z radiační rovnováhy (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\dfrac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$
- Zjednodušení: Země je kulatá a neotáčí se, C_D a L/D jsou stálé a natočení σ je po celý let stejné (skutečné řízení ho mění). Tepelný tok je jen konvektivní; při návratu od Měsíce přidává ještě záření žhavé rázové vrstvy. Ablativní štít část tepla odnáší odpařováním, radiační rovnovážná teplota je proto horní odhad.

Graf



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Raketoplán: teplota štítu z radiační rovnováhy.

Zadání: `model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];`

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

Výsledek

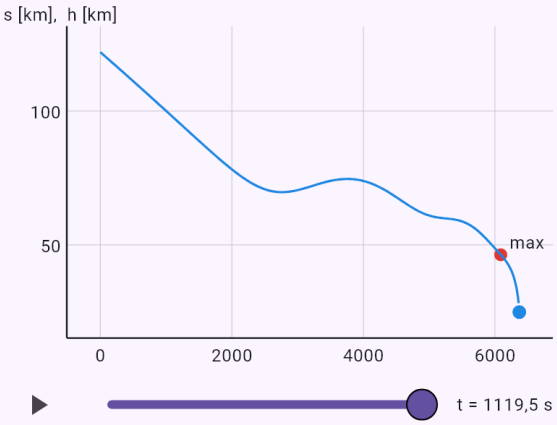
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Postup

- Hledáme T_{max}; zadáno
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Jeden průlet atmosférou ze vstupní výšky h_0 (standardně 122 km) se zadaným úhlem dráhy γ_0 a stálým natočením vztlaku σ až do výšky h_k (otevření padáků, u raketoplánu přechod do klouzavého letu). Největší přetížení porovnáme se vzorcem Allena a Eggerse pro balistický vstup. Tepelný tok ve stagnačním bodě dává Suttonův–Gravesův vzorec q = k·√(ρ/R_n)·v³ a teplotu povrchu štítu radiační rovnováha εσT⁴ = q. Rovnice modelu
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Raketoplán vstupoval s úhlem náběhu kolem 40° a přebytečný vztlak mařil náklonem kolem podélné osy (až asi 70°); přistával jako kluzák bez motoru. Hodnoty předvolby jsou přibližné. Jak extrémně je tepelná ochrana namáhána, ukázala nehoda Columbie (mise STS-107). Při startu 16. 1. 2003 kus izolační pěny z vnější nádrže prorazil panel z uhlíkového kompozitu RCC na náběžné hraně levého křídla. Náběžné hrany se při návratu ohřívají asi na 1 650 °C (kolem 3 000 °F). Při návratu 1. 2. 2003 vniklo průrazem do křídla horké plazma, konstrukce se roztavila a raketoplán se nad Texasem rozpadl; zahynulo všech sedm členů posádky.
- Čelní plocha a balistický koeficient
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Hustota vzduchu podle standardní atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Svislá složka vztlaku při natočení σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Zachycení: loď sestoupila do výšky h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Největší přetížení (numericky)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Balistický vstup bez vztlaku by podle Allena a Eggerse dal mnohem víc – vztlak přetížení snižuje
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Největší tepelný tok ve stagnačním bodě (Sutton–Graves) a celkové teplo na m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Teplota povrchu štítu z radiační rovnováhy (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Zjednodušení: Země je kulatá a neotáčí se, C_D a L/D jsou stálé a natočení σ je po celý let stejné (skutečné řízení ho mění). Tepelný tok je jen konvektivní; při návratu od Měsíce přidává ještě záření žhavé rázové vrstvy. Ablativní štít část tepla odnáší odpařováním, radiační rovnovážná teplota je proto horní odhad.

Graf

Dráha | Průběh v čase



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Kolik z ledovce je pod hladinou.

Zadání: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float;`

`fluid=sea; body=ice)`

Výsledek

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Postup

- Hledáme φ; zadáno:
  $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Na těleso v tekutině působí vztlaková síla rovná tíze vytlačené tekutiny. Plovoucí těleso je ponořené z takové části, jaký je poměr hustot. Stejný zákon nese i balón ve vzduchu. Rovnice modelu: $F_b = \rho_f V g$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Dosadíme: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Převedeme jednotky: $\varphi \approx 0{,}8946 \;= 89{,}46\,\%$

Co unese horkovzdušný balón.

Zadání: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Výsledek

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Postup

- Hledáme m_p; zadáno
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Na těleso v tekutině působí vztlaková síla rovná tíze vytlačené tekutiny. Plovoucí těleso je ponořené z takové části, jaký je poměr hustot. Stejný zákon nese i balón ve vzduchu. Rovnice modelu: $F_b = \rho_f V g$
- Hmotnost, kterou plyn unese
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $m_p = m_v - m_0$
- Dosadíme: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

Tlak na dně Marianského příkopu.

Zadání: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure; water=sea)`

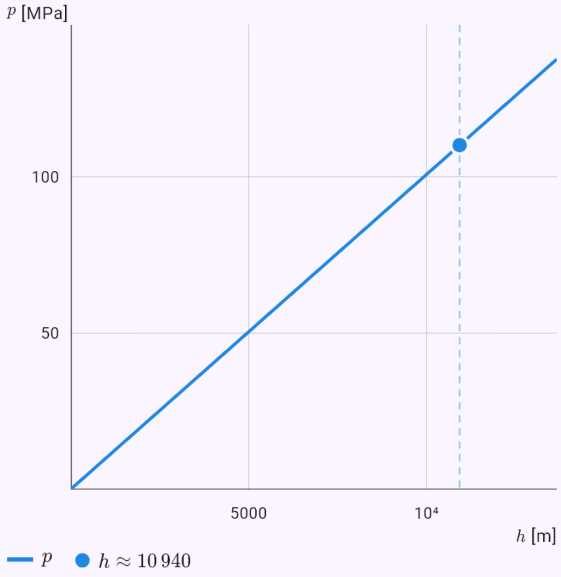
Výsledek

$$p \approx 1101\ \text{bar}$$

Postup

- Hledáme p; zadáno: $h = 10\,940\ \text{m}, \quad \rho_f = 1025\ \text{kg/m}^3$
- Tlak roste s hloubkou lineárně, o hustotu krát g krát hloubku. Na hladině k němu přispívá tlak vzduchu. Voda se bere jako nestlačitelná. Rovnice modelu: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Ve velké hloubce se voda mírně stlačuje a mění se i hustota s teplotou a slaností; výsledek se může lišit asi o 2 %.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Dosadíme: $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\ \text{MPa}$
- Kolikrát větší je tlak než atmosférický: $\dfrac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Převedeme jednotky: $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\ \text{Pa} = 1101\ \text{bar}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Tlak v zúžení potrubí.

Zadání: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa]; rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Výsledek

$$p_2 \approx 170{,}1\ \text{kPa}$$

Postup

- Hledáme p_2; zadáno $A_1 = 20\ \text{cm}^2, \quad A_2 = 5\ \text{cm}^2, \quad v_1 = 2\ \text{m/s}, \quad p_1 = 200$
- Převedeme jednotky $A_1 = 20\ \text{cm}^2 = 0{,}002\ \text{m}^2, \quad A_2 = 5\ \text{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2,$
- Podél proudnice ideální kapaliny se zachovává součet tlaku, kinetické a polohové energie objemu. V zúžení roste rychlost a klesá tlak, klesne-li až k tlaku par, nastává kavitace. Rovnice modelu: $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \text{const}$
- Rovnice kontinuity: $v_2 = v_1 \dfrac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \dfrac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\ \text{m/s}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Dosadíme $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - (\ldots$
- Převedeme jednotky: $p_2 \approx 170\,100\ \text{Pa} = 170{,}1\ \text{kPa}$

Mezní rychlost kamene ve vodě a graf rozjezdu.

Zadání: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3]; nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)`

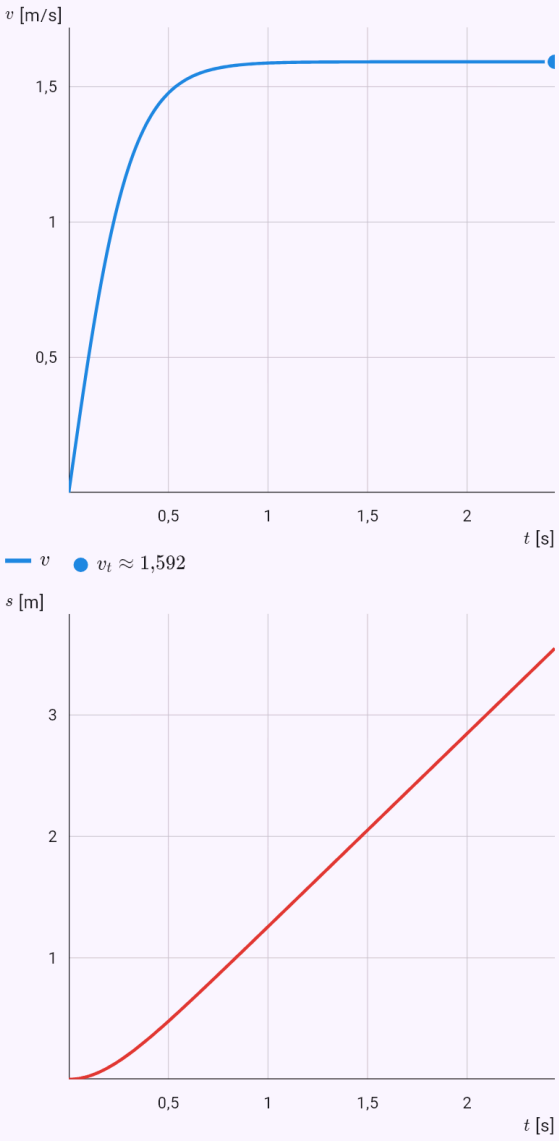
Výsledek

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hledáme v_t; zadáno
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Převedeme jednotky: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Těleso klesá nebo stoupá, dokud se odpor nevyrovná rozdílu tíhy a vztlaku. Tak dosáhne mezní rychlosti. Při rozjezdu musí rozpohybovat i okolní vodu, to popisuje přidaná hmotnost. Rovnice se řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Objem, průřez a hmotnost koule
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- Výsledná síla míří dolů, těleso klesá:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Hmotnost včetně přidané hmotnosti:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Reynoldsovo číslo a součinitel odporu při mezní rychlosti: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Mezní rychlost: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Časová konstanta rozjezdu s přidanou hmotností a bez ní
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- Přidaná hmotnost mění jen rozjezd. Mezní rychlost na ní nezávisí, protože v ustáleném pohybu se už nic nezrychluje.
- Dosadíme: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Jak dlouho stoupá bublina z hloubky 10 m.

Zadání: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

```
nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)
```

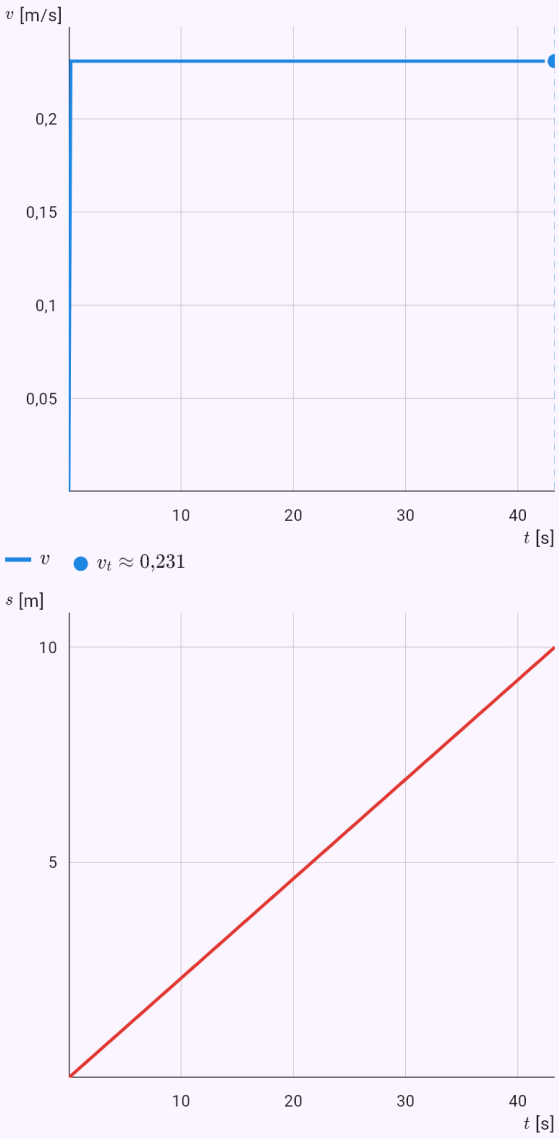
Výsledek

$t \approx 43{,}3\,\mathrm{s}$

Postup

- Hledáme t; zadáno
  $H = 10\,\mathrm{m}, \quad d = 5\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998$
- Převedeme jednotky: $d = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}005\,\mathrm{m}$
- Těleso klesá nebo stoupá, dokud se odpor nevyrovná rozdílu tíhy a vztlaku. Tak dosáhne mezní rychlosti. Při rozjezdu musí rozpohybovat i okolní vodu, to popisuje přidaná hmotnost. Rovnice se řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu. Rovnice modelu:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Objem, průřez a hmotnost koule
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- Výsledná síla míří nahoru, těleso stoupá:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$
- Hmotnost včetně přidané hmotnosti:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Eötvösovo číslo určuje, jak se bublina deformuje:
  $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Reynoldsovo číslo a součinitel odporu při mezní rychlosti: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Mezní rychlost: $v_t \approx 0{,}231\,\mathrm{m/s}$
- Časová konstanta rozjezdu s přidanou hmotností a bez ní
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$
- Přidaná hmotnost mění jen rozjezd. Mezní rychlost na ní nezávisí, protože v ustáleném pohybu se už nic nezrychluje.
- Korelace Tomiyamy platí pro běžnou, mírně znečištěnou vodu. V čisté vodě stoupají malé bubliny rychleji, velké bubliny se rozpadají nebo kolísají.
- Rovnice byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků: $N = 3363$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Pokles dříku harpuny na vzdálenost 5 m.

Zadání: `model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];`

```
rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)
```

Výsledek

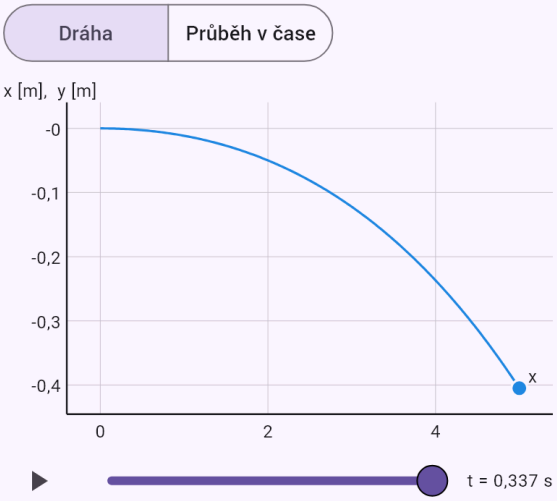
$$\Delta y \approx 40{,}5\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hledáme Δy; zadáno
  $x = 5\,\mathrm{m}, \quad v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\mathrm{kg}, \quad d = 7\,\mathrm{mm},$
- Převedeme jednotky: $d = 7\,\mathrm{mm} = 0{,}007\,\mathrm{m}$
- Harpuna pro sportovní rybolov: štíhlý dřík brzdí hlavně tření podél povrchu, proto ztrácí rychlost po několika metrech. Pokles určuje tíha zmenšená o vztlak. Rovnice se řeší numericky. Rovnice modelu
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Třecí součinitel podle křivky ITTC-57
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Součinitel odporu dříku: špička a tření po délce:
  $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Délka, na které rychlost klesne asi na 37 %, a zrychlení dolů ve vodě
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\mathrm{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\mathrm{m/}$
- Rovnice byla vyřešena metodou Runge-Kutta 4. řádu, počet kroků: $N = 1538$
- Model nepočítá odpor šňůry, ten skutečný dosah dále zkracuje. Přidaná hmotnost dříku v podélném směru je zanedbatelná.

- Převedeme jednotky: $\Delta y \approx 0{,}405\,\mathrm{m} = 40{,}5\,\mathrm{cm}$

Graf



Osy nemají stejné měřítko. Posuvníkem nebo tlačítkem přehrát sledujte let v čase.

Dosah podvodního dronu na baterii.

Zadání: `model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];`

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

Výsledek

$$R \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$$

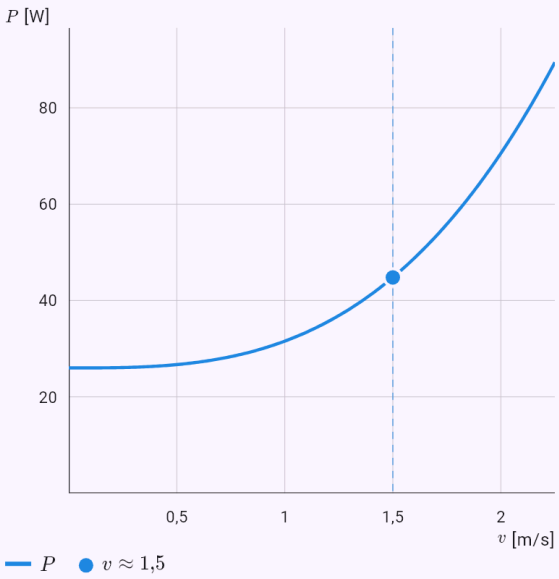
Postup

- Hledáme R; zadáno $v = 1{,}5\,\mathrm{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\mathrm{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Převedeme jednotky: $E = 1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$
- V ustálené plavbě se tah rovná odporu. Odpor roste s druhou mocninou rychlosti, výkon s třetí. U baterie navíc hraje roli stálá spotřeba přístrojů, proto existuje rychlost největšího dosahu. Rovnice modelu: $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Součinitel K v odporu D = Kv²

$$K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\mathrm{kg/m}$$

- Potřebný výkon: $P = \frac{K v^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\mathrm{W}$
- Rychlost největšího dosahu: $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\mathrm{m/s}$
- Výdrž baterie: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\mathrm{h}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $R = v t_E$
- Dosadíme: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$
- Převedeme jednotky: $R \approx 120\,500\,\mathrm{m} = 120{,}5\,\mathrm{km}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Historická ponorka: výkon roste s třetí mocninou rychlosti.

Zadání: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

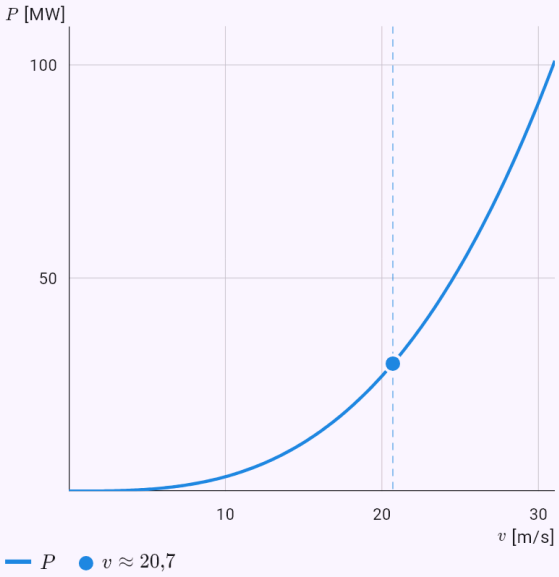
Výsledek

$$P \approx 29\,930\,\mathrm{kW}$$

Postup

- Hledáme P; zadáno
  $v = 20{,}7\,\mathrm{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- V ustálené plavbě se tah rovná odporu. Odpor roste s druhou mocninou rychlosti, výkon s třetí. U baterie navíc hraje roli stálá spotřeba přístrojů, proto existuje rychlost největšího dosahu. Rovnice modelu:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Součinitel K v odporu D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\mathrm{kg/m}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $P = \frac{K v^3}{\eta} + P_h$
- Dosadíme: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\mathrm{MW}$
- Výkon roste s třetí mocninou rychlosti: dvojnásobná rychlost znamená osminásobný výkon:
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Převedeme jednotky: $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,930\,\mathrm{kW}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Kolik vody musí přijmout ponorka, aby se vznášela.

Zadání: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Výsledek

$$m_b \approx 849{,}8\,\mathrm{t}$$

Postup

- Hledáme m_b; zadáno
  $V = 3073\,\mathrm{m^3}, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\mathrm{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m}$
- Ponořené plavidlo se vznáší, když se jeho hmotnost i s balastem rovná hmotnosti vytlačené vody. Vypuštěním nebo přijetím vody stoupá nebo klesá. Vyfouknutí nádrže v hloubce stojí víc vzduchu, protože musí přetlačit okolní tlak. Rovnice modelu: $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Dosadíme: $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\mathrm{kg}$
- Objem balastní vody: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\mathrm{m^3}$
- Převedeme jednotky: $m_b \approx 849\,800\,\mathrm{kg} = 849{,}8\,\mathrm{t}$

Výkon kontejnerové lodi s rozkladem odporu.

Zadání: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

Výsledek

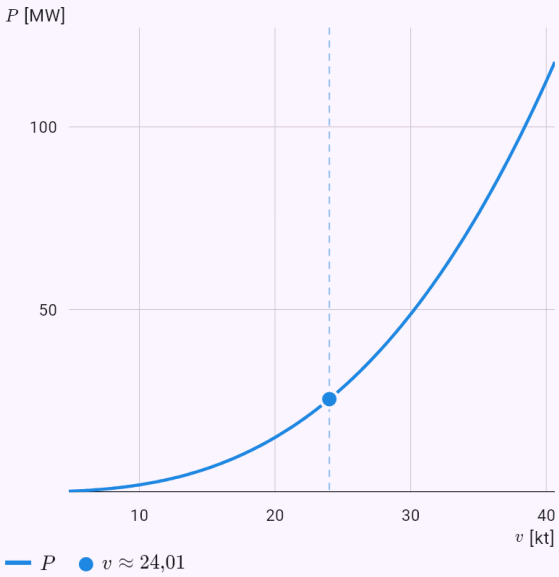
$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Postup

- Hledáme P; zadáno
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- Ponor plyne z výtlaku, příčná stabilita z metacentra. Odpor má třecí část podle křivky ITTC-57 a zbytkovou část ze zadaného součinitele. Froudeho číslo a trupová rychlost ukazují, kdy vlny na trupu začnou odpor prudce zvyšovat. Rovnice modelu
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Froudeho a Reynoldsovo číslo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Třecí součinitel podle křivky ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Třecí a zbytkový odpor
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- Zbytkový součinitel se bere jako stálý. Ve skutečnosti se s rychlostí mění a získává se z modelových zkoušek.
- Celkový odpor: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Dosadíme: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$

- Převedeme jednotky: $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Metacentrická výška: stabilita lodi.

Zadání: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Výsledek

$$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme GM; zadáno
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- Ponor plyne z výtlaku, příčná stabilita z metacentra. Odpor má třecí část podle křivky ITTC-57 a zbytkovou část ze zadaného součinitele. Froudeho číslo a trupová rychlost ukazují, kdy vlny na trupu začnou odpor prudce zvyšovat. Rovnice modelu
  $Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Objem výtlaku a plocha vodorysky (blokový součinitel)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Výška středu vztlaku nad kýlem (Morrishův vzorec)
  $KB = T - \frac{1}{3}\left(\frac{T}{2} + \frac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Výška metacentra nad středem vztlaku:
  $BM = \frac{I}{\nabla} = \frac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $GM = KB + BM - KG$
- Dosadíme: $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- Metacentrum leží nad těžištěm, loď je příčně stabilní.
- Platí pro malé náklony. Moment vodorysky je odhad z jejího součinitele, přesný je pro obdélník; u skutečné lodi je výsledek jen prvním odhadem.

Plavba lodi 544 t a let ekranoplánu KM těsně nad hladinou.

Zadání: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

```
nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)
```

Výsledek

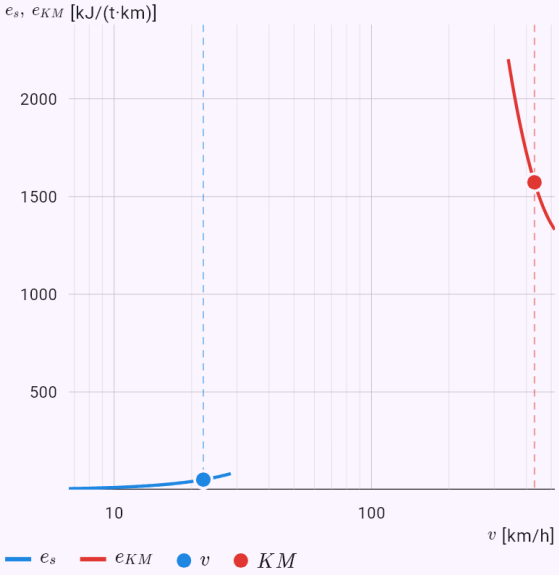
$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

Postup

- Hledáme P; zadáno
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- Ponor plyne z výtlaku, příčná stabilita z metacentra. Odpor má třecí část podle křivky ITTC-57 a zbytkovou část ze zadaného součinitele. Froudeho číslo a trupová rychlost ukazují, kdy vlny na trupu začnou odpor prudce zvyšovat. Rovnice modelu
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Froudeho a Reynoldsovo číslo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Třecí součinitel podle křivky ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Třecí a zbytkový odpor
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- Zbytkový součinitel se bere jako stálý. Ve skutečnosti se s rychlostí mění a získává se z modelových zkoušek.
- Ekranoplán KM v cestovní rychlosti (stejný výpočet jako ve formuláři Letadlo)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Práce proti odporu na tunu a kilometr: loď a KM
  $e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$
- Kolikrát víc energie KM potřebuje a kolikrát je rychlejší:
  $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- KM se počítá v přízemním efektu se součinitelem McCormicka. Srovnání je práce proti odporu, nezahrnuje účinnost motorů, vlny ani počasí.

- Celkový odpor: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Dosadíme: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Převedeme jednotky: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Graf



Vodorovná osa je logaritmická, protože se rychlosti liší mnohonásobně. Tečky jsou zadaná rychlost lodi a cestovní rychlost ekranoplánu.

Energie neutronu z reakce D-T – rozdělení podle zákona zachování hybnosti.

Zadání: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Výsledek

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Postup

- Energie jedné reakce z atomových hmotností. U dvou produktů se energie rozdělí podle zákona zachování hybnosti: lehčí částice odnese větší díl. Rovnice modelu: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reakce: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Hmotnosti před a po: $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Dosadíme: $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Produkty odlétají s opačnými a stejně velkými hybnostmi, kinetické energie jsou proto v obráceném poměru hmotností.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Dosadíme: $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energie jádra helia: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Kolik uhlí nahradí 1 g paliva D-T.

Zadání: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Výsledek

$$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$$

Postup

- Hledáme m_c; zadáno: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Převedeme jednotky: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Kolik energie dá dané množství paliva. Srovnání se štěpením uranu U-235 (asi 200 MeV na jádro) a se spálením uhlí. Rovnice modelu:
  $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\, m$
- Reakce: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energie jedné reakce: $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Dosadíme
  $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Dosadíme: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Dosadíme: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- Fúze nemá kritické množství. Při poruše plazma vychladne a reakce sama ustane, reaktor nemůže „utéct“ jako štěpný.
- Převedeme jednotky: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

Gamowův vrchol pro řetězec p-p ve středu Slunce.

Zadání: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one];`

`T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

Výsledek

$$E_0 \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

Postup

- Hledáme E_0; zadáno:
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_B T = 1{,}34\,\mathrm{keV}$
- Jádra bariéru ve skutečnosti protunelují. Pravděpodobnost tunelování e^(−√(E_G/E)) s energií prudce roste, zatímco rychlých jader v Maxwellově rozdělení prudce ubývá. Součin obou má ostrý Gamowův vrchol E_0: tam reakce skutečně probíhají. Gamowův faktor bereme jako hotový vzorec, jeho odvození patří do kvantové mechaniky. Rovnice modelu

$$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2(\pi\alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($$

- Redukovaná hmotnost

$$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\mathrm{keV} \approx 465\,700\,\mathrm{keV}$$

- Dosadíme

$$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\mathrm{keV}$$

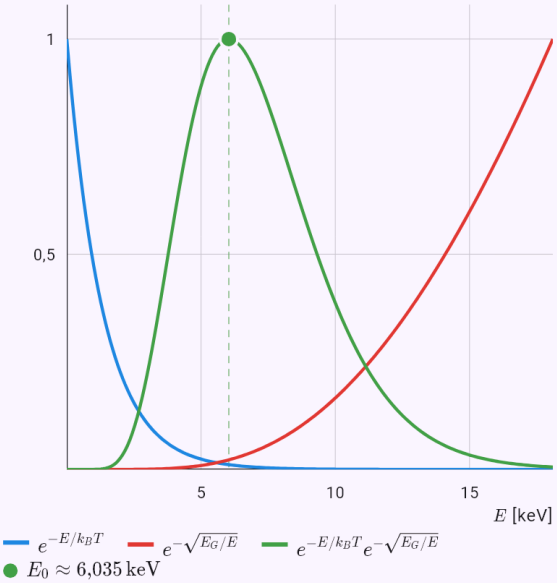
- Dosadíme

$$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4}\right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

- Šířka vrcholu: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\mathrm{keV}$
- Poloha vrcholu v násobcích k_BT: $\frac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$

- Reakce probíhají hlavně v úzkém pásu energií kolem E_0, několikrát nad průměrnou energií k_BT. V grafu jsou obě funkce a jejich součin, každá dělená svým maximem.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Trojný součin podle parametrů ITER a srovnání s podmínkou zapálení.

Zadání: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s];`

mode=lawson)

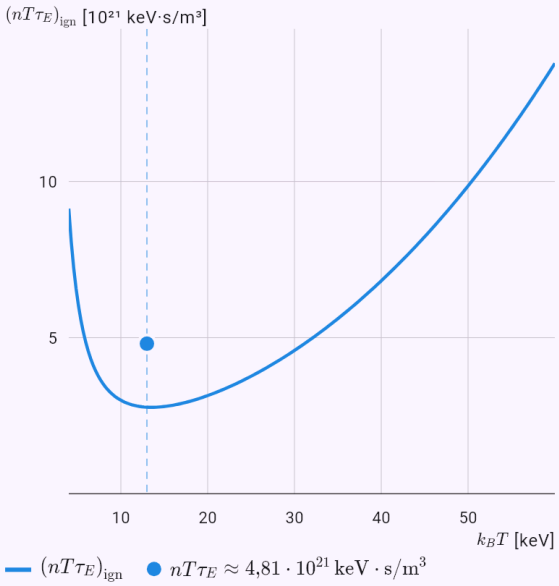
Výsledek

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s/m^3}$$

Postup

- Hledáme $nT\tau_E$; zadáno
  $n = 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\,\mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\,\mathrm{s}$
- Lawsonovo kritérium: plazma se samo udrží horké (zapálení), když ohřev alfa částicemi z reakcí D-T vyrovná tepelné ztráty 3nk_BT/τ_E. Rozhoduje trojný součin hustoty n, teploty T a doby udržení energie τ_E. Jeho minimum, asi 3·10²¹ keV·s/m³, leží kolem 14 keV.
  Rovnice modelu
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Rychlost reakce D-T (parametrizace)
  $\langle\sigma v\rangle(13\,\mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$
- Dosadíme
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12\cdot(13)^2}{3520\cdot 2{,}073\cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779\cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s}$$
- Dosadíme
  $nT\tau_E = 10^{20}\cdot 13\cdot 3{,}7 \approx 4{,}81\cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s/m^3}$
- Trojný součin stačí na zapálení: ohřev alfa částicemi pokryje ztráty – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- Nejnižší potřebný trojný součin, asi 3·10²¹ keV·s/m³, je kolem 14 keV. Ztráty brzdným zářením tu zanedbáváme.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Rychlost reakce D-T při 10 keV integrálem Simpsonovou metodou.

Zadání: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Výsledek

$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m^3/s}$$

Postup

- Hledáme $\langle \sigma v \rangle$; zadáno: $k_B T = 10\ \mathrm{keV}$
- Rychlost reakce ⟨σv⟩ je účinný průřez σ(E) zprůměrovaný přes Maxwellovo rozdělení rychlostí. Počítáme ji integrálem Simpsonovou metodou a srovnáváme s publikovanou parametrizací. Účinné průřezy jsou podle Bosche a Halea (Nuclear Fusion 1992). Rovnice modelu

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$

- Reakce: $^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n$
- Účinný průřez (Bosch-Hale):

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\ \sqrt{\mathrm{keV}}$$

- Simpsonova metoda: $n = 100, \quad h = \frac{40 k_B T}{n} = 4\ \mathrm{keV}$
- Integrál

$$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$

- Hodnoty v SI

$$\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{J}, \quad I \approx 2.$$

- Dosadíme

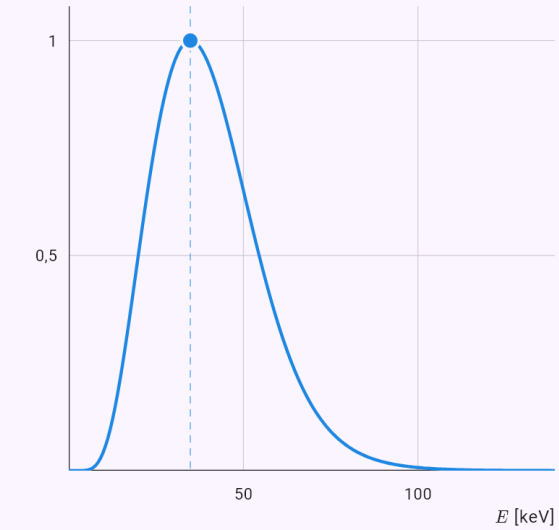
$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$

- Srovnání s parametrizací

$$\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\ \%$$

- Integrand je nenulový hlavně v okolí Gamowova vrcholu, proto stačí integrovat do 40 k_BT. Rozdíl od parametrizace je v řádu procent.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Larmorův poloměr alfa částice z fúze v poli 5 T.

Zadání: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T];`

`mode=larmor; particle=alpha)`

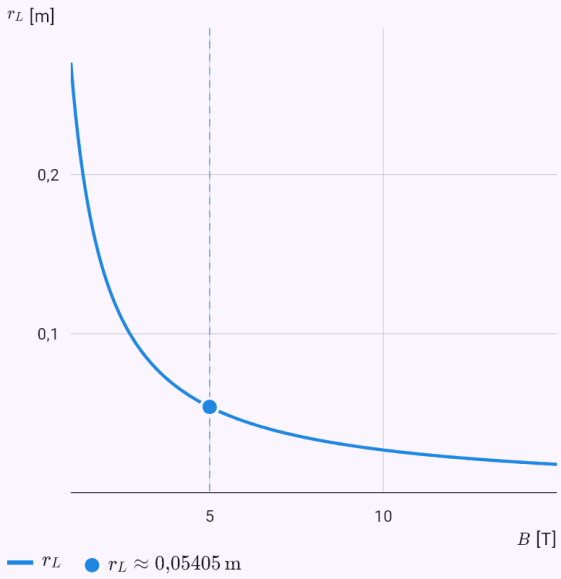
Výsledek

$$r_L \approx 5{,}405\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hledáme r_L; zadáno:
  $m = 4{,}002\,\mathrm{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\mathrm{keV}, \quad B = 5\,\mathrm{T}$
- Nabitá částice v magnetickém poli obíhá po kružnici kolem siločáry (Larmorův poloměr), a proto magnetické pole drží horké plazma dál od stěn. Počítá se relativisticky, u pomalých iontů je γ ≈ 1. Rovnice modelu:
  $r_L = \frac{p}{|Z|eB} = \frac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \frac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Hmotnost: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Lorentzův faktor a rychlost
  $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}04$
- Hybnost
  $p = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$
- Dosadíme
  $r_L = \frac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\mathrm{m}$
- Ionty v tokamaku obíhají po kružnicích o poloměru milimetrů až centimetrů, a proto je magnetické pole drží dál od stěn.
- Převedeme jednotky: $r_L \approx 0{,}05405\,\mathrm{m} = 5{,}405\,\mathrm{cm}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Lorentzův faktor protonu v LHC.

Zadání: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV]; mode=lorentz;`

`given=kinetic; particle=proton)`

Výsledek

$$\gamma \approx 7248{,}37$$

Postup

- Hledáme γ; zadáno:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Převedeme jednotky:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Ze zadané rychlosti (jako zlomku c) nebo z kinetické energie spočítá γ, rychlost, celkovou energii a hybnost. Proton v LHC (6,8 TeV) je pomalejší než světlo jen o několik metrů za sekundu. Rovnice modelu
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Klidová energie: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Dosadíme: $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Rychlost: $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- O kolik je pomalejší než světlo:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Ultrarelativistická částice: energie je téměř celá kinetická a rychlost se liší od c jen nepatrně.

Kolik mionů z výšky 15 km doletí k zemi díky dilataci času.

Zadání: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

Výsledek

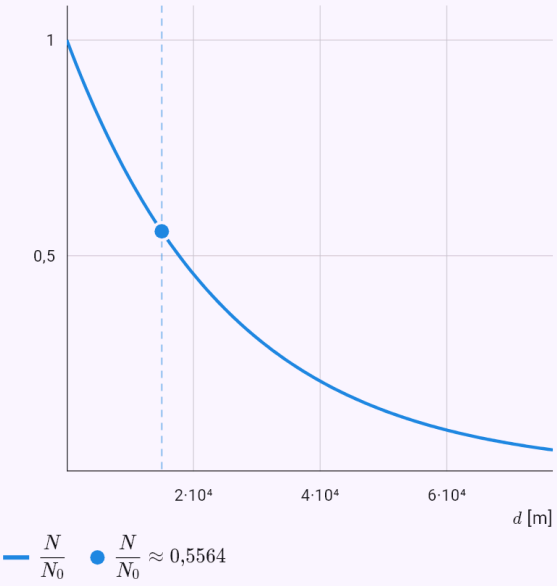
$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Postup

- Hledáme $\frac{N}{N_0}$; zadáno
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Převedeme jednotky
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Nestabilní částice se rozpadá s vlastní střední dobou života τ_0. V laboratoři se jí čas zpomalí γkrát, takže doletí γkrát dál. Miony vzniklé 15 km vysoko v atmosféře by bez dilatace času k zemi téměř nedoletěly. Rovnice modelu: $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Dosadíme: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Rychlost: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Dosadíme
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,1$
- Dosadíme: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Bez dilatace času by doletěl podíl:
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- Z pohledu částice se čas nezpomalí, zkrátí se ale vzdálenost (kontrakce délek). Oba pohledy dávají stejný počet rozpadů.

- Převedeme jednotky: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 \; = 55{,}64\,\%$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Energie srážky svazku LHC na pevném terči.

Zadání: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2];`

`mode=collision; machine=lhc)`

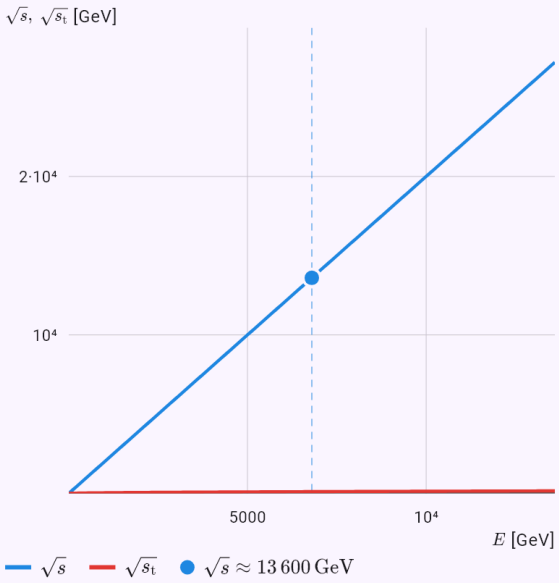
Výsledek

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Postup

- Hledáme $\sqrt{s_t}$; zadáno:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Ve vstřícných svazcích se celá energie obou částic přemění na energii srážky: √s = 2E. Svazek namířený na pevný terč většinu energie spotřebuje na pohyb těžiště, √s roste jen s odmocninou z E. Proto se staví srážeče. Rovnice modelu:
  $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2(mc^2)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s je invariantní hmotnost soustavy: energie, která je k dispozici pro vznik nových částic.
- Dosadíme
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Vstřícné svazky: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Ztráta energie elektronu za jeden oběh v LEP.

Zadání: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

`mode=synchrotron; machine=lep)`

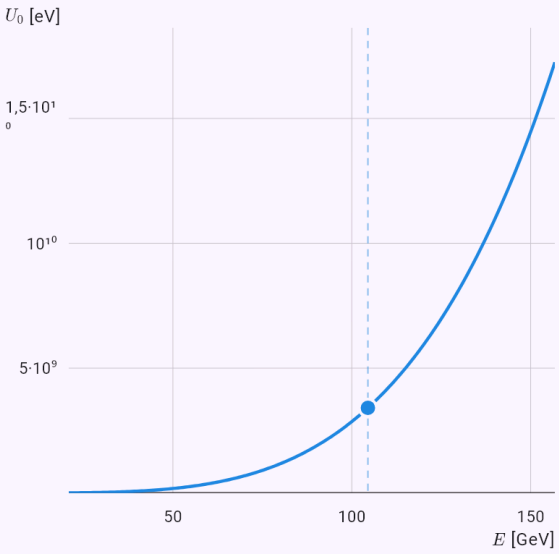
Výsledek

$$U_0 \approx 3{,}407\,\mathrm{GeV}$$

Postup

- Hledáme U_0; zadáno
  $E = 104{,}5\,\mathrm{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Převedeme jednotky: $R = 3{,}096\,\mathrm{km} = 3096\,\mathrm{m}$
- Nabitá částice na zakřivené dráze vyzařuje (synchrotronové záření). Ztráta za oběh roste s γ⁴, tedy při stejné energii s 1/m⁴. Elektron ztratí 10¹³krát víc než proton, proto LEP skončil u 104 GeV a LHC urychluje protony. Rovnice modelu: $U_0 = \dfrac{e^2 \beta^3 \gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Lorentzův faktor: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Dosadíme
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- V elektronvoltech: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^{9}\,\mathrm{eV}$
- Elektrony vyzařují 10¹³krát víc než protony stejné energie:
  $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- Druhý druh částice při stejné energii a dráze:
  $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$
- Převedeme jednotky: $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}407\,\mathrm{GeV}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

44. Statika a pružnost

Formulář Statika (Aplikace, obor Technika) má tři režimy. Nosník leží na ose x od 0 do L a podepírá ho kloub, posuvný kloub nebo vetknutí; zatížit ho můžete svislými i šikmými silami, momenty a spojitým zatížením – rovnoměrným, trojúhelníkovým nebo lichoběžníkovým. Více sil zapíšete do jednoho pole oddělených mezerou, jejich polohy a úhly ve stejném pořadí. Vnitřní klouby udělají z nosníku [[gerberBeam|Gerberův nosník]].

Postup začne [[freeBody|uvolněním]]: podpory nahradí reakce a hodnost soustavy rovnic rovnováhy ukáže [[staticDeterminacy|statickou určitost]]. Je-li nosník staticky neurčitý nebo uložení výjimkové, appka to řekne i se stupněm neurčitosti. Rovnice se řeší postupně – vždy ta, ve které zbyla jediná neznámá (moment k podpoře, u Gerberova nosníku nejdřív část za kloubem), nevyužitá rovnice poslouží jako kontrola.

Vnitřní síly N, T a M appka vypíše po úsecích mezi význačnými body a najde největší ohybový moment podle [[schwedlerTheorem|Schwedlerovy věty]]: tam, kde je posouvající síla nulová, nebo v místě jejího skoku. Pod náčrtem nosníku se zatížením a reakcemi jsou grafy N, T a M ve stejném měřítku délky.

Režim Těleso v rovině počítá reakce tělesa zadaného body podpor a působišti sil – například žebříku opřeného o stěnu. U posuvné podpory zvolíte směr reakce úhlem β.

Průřezové charakteristiky spočítají plochu, [[centroid|těžiště]], kvadratické momenty podle [[parallelAxisTheorem|Steinerovy věty]], [[sectionModulus|průřezové moduly]] a u nesouměrných průřezů i [[principalAxes|hlavní osy]] – pro obdélník, trubku, profily T, I, U, L i průřez složený z obdélníků a kruhů s otvory. Obrázek ukáže průřez ve skutečném měřítku s těžištěm a osami. Zaoblení válcovaných profilů zanedbáváme.

Formulář Cisterna s kapalinou počítá částečně naplněnou cisternu při brzdění, rozjezdu a v oblouku. Hladina se nakloní kolmo na výslednici tíhy a setrvačné síly (tan θ = a/g), těžiště kapaliny se posune a s ním těžiště celku. Zatížení náprav jsou reakce nosníku na dvou podporách, v oblouku appka spočítá [[loadTransferRatio|přenos zatížení]] na vnější kola a kritickou rychlost, při které se cisterna převrhne – i se srovnáním s pevným nákladem a s vlastní frekvencí [[sloshing|šplouchání]]. Interaktivní ukázka je na mathtrace.app ve „Vyzkoušej si“.

Formulář Návrh nosníku porovná tři varianty nosníku namáhaného ohybem: nejlehčí normalizovaný profil z tabulek (IPE, HEB, kruhové a obdélníkové trubky), optimální konstantní průřez zvoleného tvaru (obdélník, kruh, trubka s omezenou štíhlostí stěny) a [[uniformStrengthBeam|nosník stálé pevnosti]]. Hlídá pevnost, povolený průhyb L/n a u volného konce smyk; postup ukáže, která podmínka je [[activeConstraint|aktivní]], a graf průběh průřezu, momentu a průhybu po délce. Inspirací byla diplomová práce z optimalizace: vetknuté rameno navržené optimalizací vyšlo podstatně lehčí než podle tabulek.

Ukázky

Prostý nosník se silou a spojitým zatížením na části délky: reakce, úseky a největší moment.

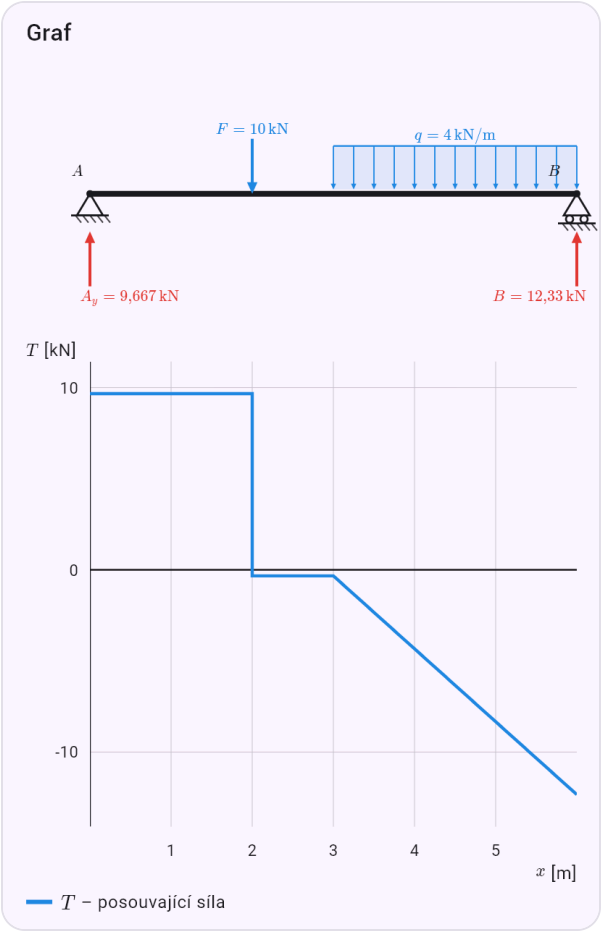
Zadání: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

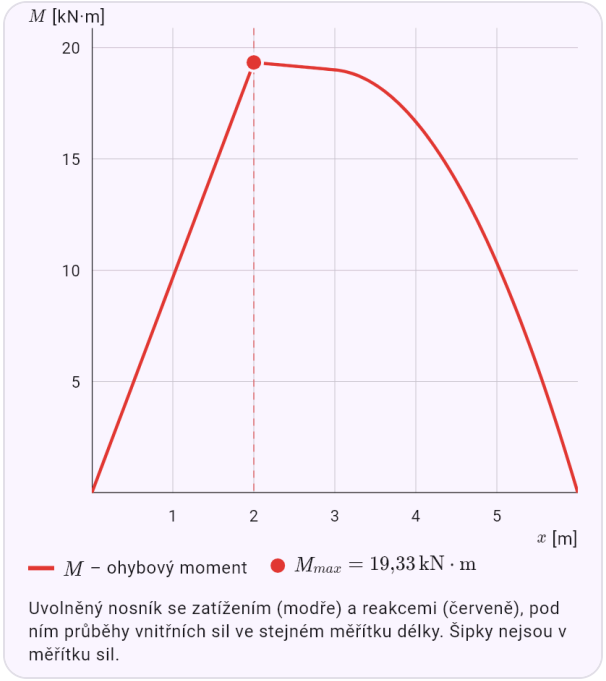
Výsledek

$$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 2\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme M_{max}; zadáno
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- Nosník leží na ose x od 0 do L. Kloub přenese vodorovnou i svislou sílu, posuvný kloub jen sílu kolmou k podložce, vetknutí navíc moment. Síla svírá s osou nosníku úhel α (90° = svisle dolů), moment je kladný proti směru hodinových ručiček, spojité zatížení je kladné směrem dolů. Vnitřní klouby z nosníku dělají Gerberův nosník: v kloubu je ohybový moment nulový a to dává rovnici navíc. Průběhy N, T a M vzniknou po úsecích podle Schwedlerovy věty. Rovnice modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Náhradní břemeno spojitého zatížení (v těžišti zatěžovacího obrazce):
  $Q = q\,l = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Neznámé reakce: $A_x,\ A_y,\ B$
- Staticky určité: neznámých je tolik, kolik je nezávislých rovnic (n neznámých, e rovnic, h hodnost):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Součet momentů k podpoře – rovnice s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Součet momentů k podpoře – rovnice s jedinou neznámou
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Součet vodorovných sil:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Kontrola nevyužitou rovnicí:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Schwedlerova věta: derivace ohybového momentu je posouvající síla a derivace posouvající síly je záporně vzaté spojité zatížení. Kde je T nulová, má M extrém.
- Vnitřní síly v úseku (x v m, síly v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 0;\ 2\rangle: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Vnitřní síly v úseku (x v m, síly v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 2;\ 3\rangle: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Vnitřní síly v úseku (x v m, síly v kN, momenty v kN·m)
  $x \in \langle 3;\ 6\rangle: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2$
- Největší ohybový moment je v místě skoku posouvající síly: $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Kladný ohybový moment prohýbá nosník dolů (dolní vlákna jsou tažená), záporný nahoru, typicky nad podporou nebo ve vetknutí.





Uvolněný nosník se zatížením (modře) a reakcemi (červeně), pod ním průběhy vnitřních sil ve stejném měřítku délky. Šipky nejsou v měřítku sil.

Konzola se šikmou silou na konci a rovnoměrným zatížením: vodorovná i svislá reakce a moment ve vetknutí.

Zadání: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

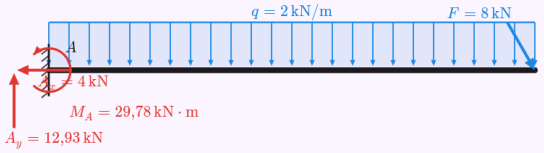
Výsledek

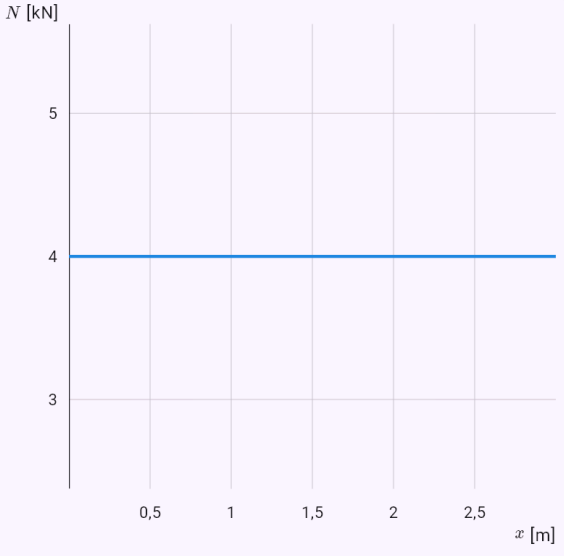
$$A_x = -4\,\mathrm{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\mathrm{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\mathrm{kN\cdot m}$$

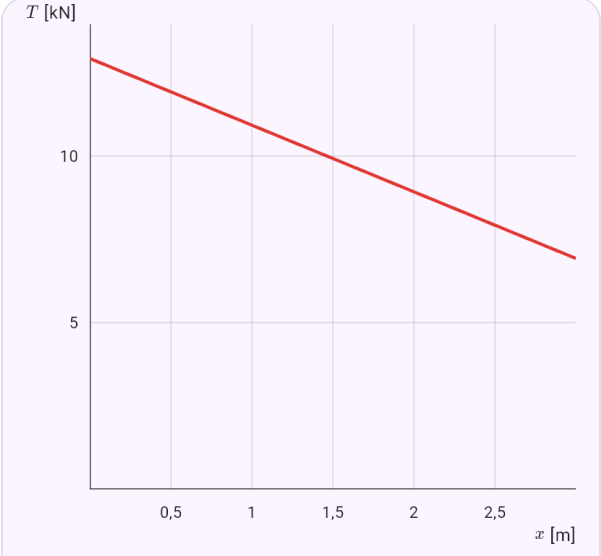
Postup

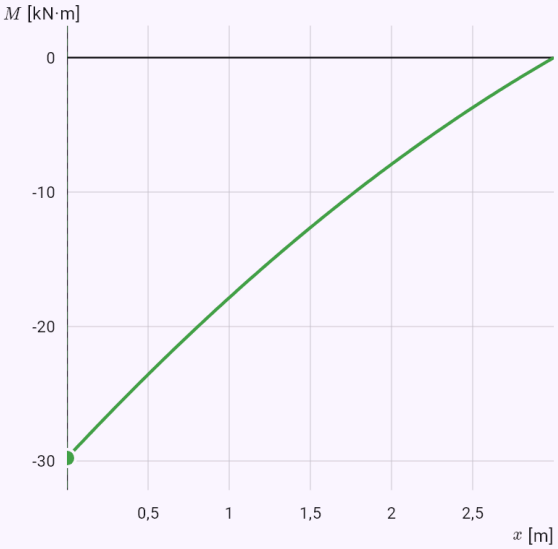
- Hledáme R; zadáno
  $L = 3\,\mathrm{m}, \quad F = 8\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 3\,\mathrm{m}, \quad \alpha = 60\,^\circ, \quad q_a =$
- Nosník leží na ose x od 0 do L. Kloub přenese vodorovnou i svislou sílu, posuvný kloub jen sílu kolmou k podložce, vetknutí navíc moment. Síla svírá s osou nosníku úhel α (90° = svisle dolů), moment je kladný proti směru hodinových ručiček, spojité zatížení je kladné směrem dolů. Vnitřní klouby z nosníku dělají Gerberův nosník: v kloubu je ohybový moment nulový a to dává rovnici navíc. Průběhy N, T a M vzniknou po úsecích podle Schwedlerovy věty. Rovnice modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Náhradní břemeno spojitého zatížení (v těžišti zatěžovacího obrazce):
  $Q = q\,l = 2 \cdot 3 = 6\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \frac{3}{2} = 1{,}5\,\mathrm{m}$
- Rozklad šikmé síly do os:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\mathrm{kN}, \quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\mathrm{kN}$
- Neznámé reakce: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Staticky určité: neznámých je tolik, kolik je nezávislých rovnic (n neznámých, e rovnic, h hodnost):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Součet momentů k podpoře – rovnice s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad M_A - 6{,}928 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M$
- Součet vodorovných sil:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -4\,\mathrm{kN}$
- Součet svislých sil
  $\sum F_y = 0: \quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12{,}93$

Graf









Uvolněný nosník se zatížením (modře) a reakcemi (červeně), pod ním průběhy vnitřních sil ve stejném měřítku délky. Šipky nejsou v měřítku sil.

Gerberův nosník se třemi podporami a kloubem: výpočet začne částí za kloubem.

Zadání: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller; xB=6[m];`

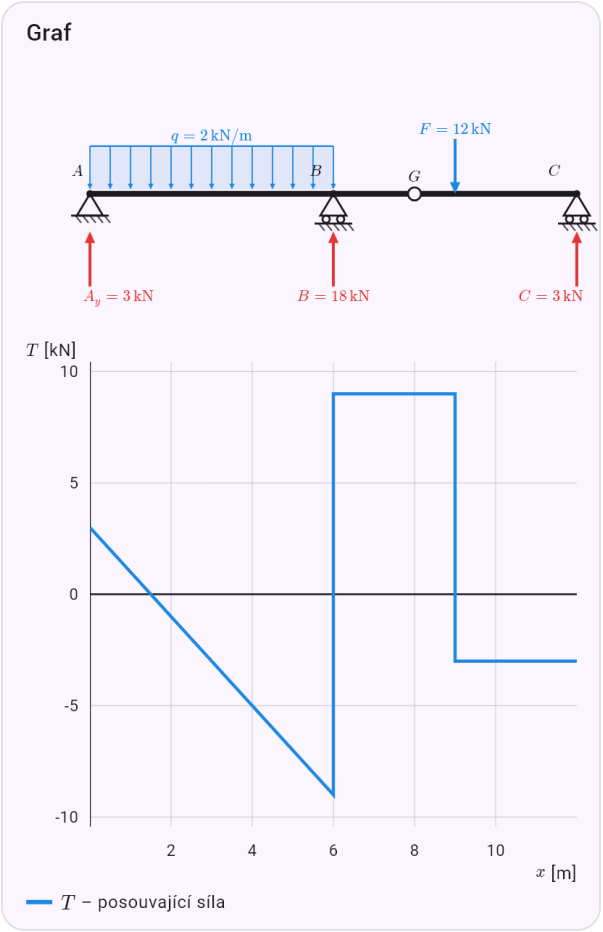
```
xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

Výsledek

$$M_{max} \approx -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 6\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme M_{max}; zadáno
  $L = 12\,\mathrm{m}, \quad x_B = 6\,\mathrm{m}, \quad x_s = 12\,\mathrm{m}, \quad x_G = 8\,\mathrm{m}, \quad F$
- Nosník leží na ose x od 0 do L. Kloub přenese vodorovnou i svislou sílu, posuvný kloub jen sílu kolmou k podložce, vetknutí navíc moment. Síla svírá s osou nosníku úhel α (90° = svisle dolů), moment je kladný proti směru hodinových ručiček, spojité zatížení je kladné směrem dolů. Vnitřní klouby z nosníku dělají Gerberův nosník: v kloubu je ohybový moment nulový a to dává rovnici navíc. Průběhy N, T a M vzniknou po úsecích podle Schwedlerovy věty. Rovnice modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Náhradní břemeno spojitého zatížení (v těžišti zatěžovacího obrazce):
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \frac{6}{2} = 3\,\mathrm{m}$
- Neznámé reakce: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Staticky určité: neznámých je tolik, kolik je nezávislých rovnic (n neznámých, e rovnic, h hodnost):
  $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- Moment části napravo od kloubu ke kloubu je nulový:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\mathrm{kN}$
- Součet momentů k podpoře – rovnice s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- Moment části nalevo od kloubu ke kloubu je nulový
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Součet vodorovných sil:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Kontrola nevyužitou rovnicí:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Schwedlerova věta: derivace ohybového momentu je posouvající síla a derivace posouvající síly je záporně vzaté spojité zatížení. Kde je T nulová, má M extrém.
- Vnitřní síly v úseku (x v m, síly v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 0;\,6\rangle: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Vnitřní síly v úseku (x v m, síly v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 6;\,9\rangle: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Vnitřní síly v úseku (x v m, síly v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 9;\,12\rangle: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- Největší ohybový moment je v místě skoku posouvající síly: $M_{max} = M(6) = -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Kladný ohybový moment prohýbá nosník dolů (dolní vlákna jsou tažená), záporný nahoru, typicky nad podporou nebo ve vetknutí.





Uvolněný nosník se zatížením (modře) a reakcemi (červeně), pod ním průběhy vnitřních sil ve stejném měřítku délky. Šipky nejsou v měřítku sil.

Žebřík opřený o hladkou stěnu s váhou žebříku a člověka: reakce na zemi a na stěně.

Zadání: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

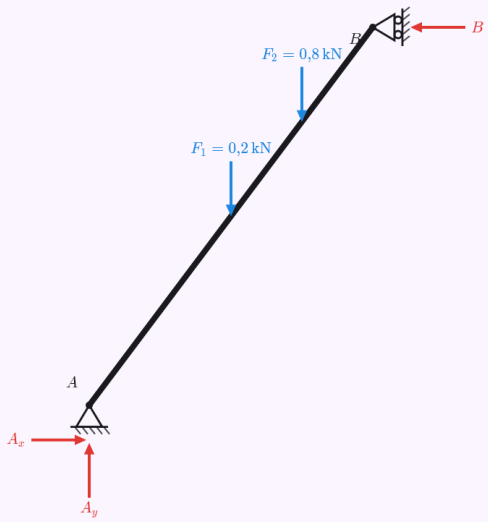
Výsledek

$$A_x = 0{,}525\,\mathrm{kN}$$
$$A_y = 1\,\mathrm{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hledáme R; zadáno
  $x_A = 0\,\mathrm{m}, \quad y_A = 0\,\mathrm{m}, \quad x_B = 3\,\mathrm{m}, \quad y_B = 4\,\mathrm{m}, \quad \beta_B$
- Těleso v rovině zadané body podpor a působišti sil (x doprava, y nahoru). U posuvné podpory úhel β udává směr reakce: 90° zdola nahoru, 0° od stěny vlevo doprava, 180° od stěny vpravo doleva. Příklad: žebřík opřený o hladkou stěnu, pata se o podlahu opírá třením (kloub), horní konec klouže po stěně (posuvný kloub). Rovnice modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Neznámé reakce: $A_x,\ A_y,\ B$
- Staticky určité: neznámých je tolik, kolik je nezávislých rovnic (n neznámých, e rovnic, h hodnost):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Součet momentů k podpoře – rovnice s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Součet vodorovných sil
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\mathrm{kN}$
- Součet momentů k podpoře – rovnice s jedinou neznámou
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Kontrola nevyužitou rovnicí: $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Graf



Uvolněné těleso: zatížení modře, reakce podpor červeně. Šipky nejsou v měřítku sil. Hodnoty reakcí jsou ve výsledku.

Vetknutí s posuvnou podporou je jednou staticky neurčité.

Zadání: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

`xF=2[m])`

Výsledek

$$s = n - h = 1$$

Postup

- Hledáme R; zadáno:
  $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- Nosník leží na ose x od 0 do L. Kloub přenese vodorovnou i svislou sílu, posuvný kloub jen sílu kolmou k podložce, vetknutí navíc moment. Síla svírá s osou nosníku úhel α (90° = svisle dolů), moment je kladný proti směru hodinových ručiček, spojité zatížení je kladné směrem dolů. Vnitřní klouby z nosníku dělají Gerberův nosník: v kloubu je ohybový moment nulový a to dává rovnici navíc. Průběhy N, T a M vzniknou po úsecích podle Schwedlerovy věty. Rovnice modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Neznámé reakce: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Staticky neurčité: neznámých je víc než nezávislých rovnic:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Neznámých reakcí je víc, než kolik dají rovnice rovnováhy. Chybějící rovnice dají až deformační podmínky (např. nulový průhyb nad podporou) – staticky neurčité nosníky appka zatím neřeší. Stupeň neurčitosti s říká, kolik podpor je navíc.

Graf



Uvolněný nosník se zatížením (modře) a reakcemi (červeně), pod ním průběhy vnitřních sil ve stejném měřítku délky. Šipky nejsou v měřítku sil.

Průřez T: těžiště, kvadratický moment a průřezový modul.

Zadání: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm];`

```
tf=20[mm]; tw=20[mm])
```

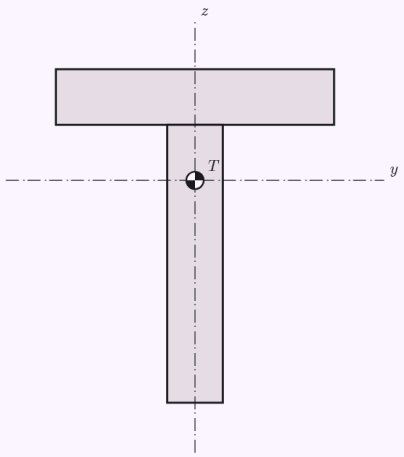
Výsledek

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

Postup

- Hledáme W_y; zadáno
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- Průřez rozdělíme na obdélníky a kruhy, otvory odečteme. Těžiště je vážený průměr těžišť částí, kvadratické momenty k osám procházejícím těžištěm dá Steinerova věta. Osa y je vodorovná, z svislá, takže I_y rozhoduje o ohybu ve svislé rovině. Z momentu a vzdálenosti krajních vláken plyne průřezový modul W, u nesouměrného průřezu (L) i hlavní osy. Zaoblení válcovaných profilů zanedbáváme, proto se hodnoty od tabulek o něco liší. Rovnice modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Část průřezu
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Část průřezu
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- Plocha průřezu: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Těžiště jako vážený průměr těžišť částí
  $$y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$$
- Steinerova věta: vlastní moment části + plocha × druhá mocnina vzdálenosti os
  $$I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$$
- Steinerova věta: vlastní moment části + plocha × druhá mocnina vzdálenosti os
  $$I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$$
- Kvadratické momenty celého průřezu
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- Průřezové moduly (e = vzdálenost krajních vláken od těžiště)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$$
- Poloměry setrvačnosti
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$$

Graf



Průřez ve skutečném měřítku s těžištěm T a osami y, z, které jím procházejí; u nesouměrného průřezu i hlavní osy 1, 2.

Rovnoramenný úhelník L: deviační moment a hlavní osy pod 45°.

Zadání: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm]; t=10[mm])`

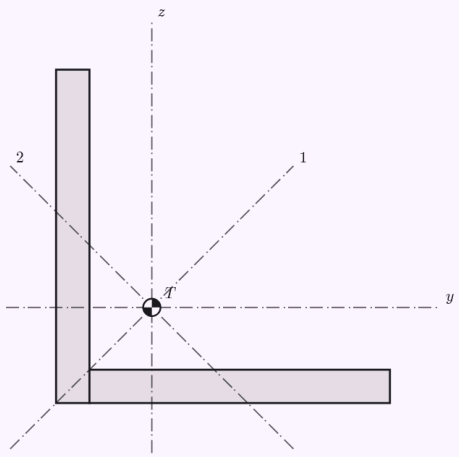
Výsledek

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\mathrm{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\mathrm{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Postup

- Hledáme I_1; zadáno:
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad t = 10\,\mathrm{mm}$
- Průřez rozdělíme na obdélníky a kruhy, otvory odečteme. Těžiště je vážený průměr těžišť částí, kvadratické momenty k osám procházejícím těžištěm dá Steinerova věta. Osa y je vodorovná, z svislá, takže I_y rozhoduje o ohybu ve svislé rovině. Z momentu a vzdálenosti krajních vláken plyne průřezový modul W, u nesouměrného průřezu (L) i hlavní osy. Zaoblení válcovaných profilů zanedbáváme, proto se hodnoty od tabulek o něco liší.
  Rovnice modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Část průřezu
  $$1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$$
- Část průřezu
  $$2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$$
- Plocha průřezu: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\mathrm{mm}^2$
- Těžiště jako vážený průměr těžišť částí
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\mathrm{mm}, \quad z_T =$$
- Steinerova věta: vlastní moment části + plocha × druhá mocnina vzdálenosti os
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\mathrm{mm}^4,$$
- Steinerova věta: vlastní moment části + plocha × druhá mocnina vzdálenosti os
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\mathrm{mm}^4,$$
- Kvadratické momenty celého průřezu
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Deviační moment
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\mathrm{mm}^4$$
- Hlavní kvadratické momenty
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- Natočení hlavní osy 1 od osy y
  $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Průřezové moduly (e = vzdálenost krajních vláken od těžiště)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Poloměry setrvačnosti
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\mathrm{mm}$$

Graf



Průřez ve skutečném měřítku s těžištěm T a osami y, z, které jím procházejí; u nesouměrného průřezu i hlavní osy 1, 2.

Deska s kruhovým otvorem mimo střed: složený průřez a posun těžiště.

Zadání: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm]; rh=100[mm];`

`ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])`

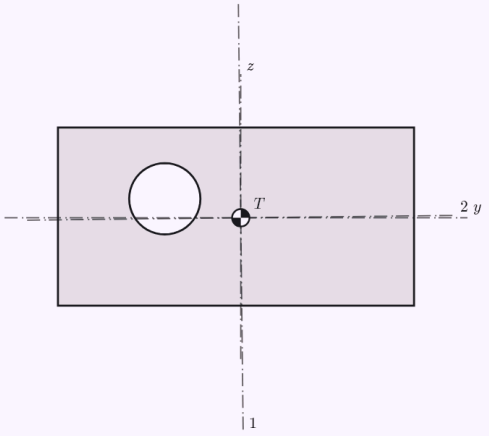
Výsledek

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4$$

Postup

- Hledáme I_y; zadáno
  $b = 200\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad y = 0\,\mathrm{mm}, \quad z = 0\,\mathrm{mm}$
- Průřez rozdělíme na obdélníky a kruhy, otvory odečteme. Těžiště je vážený průměr těžišť částí, kvadratické momenty k osám procházejícím těžištěm dá Steinerova věta. Osa y je vodorovná, z svislá, takže I_y rozhoduje o ohybu ve svislé rovině. Z momentu a vzdálenosti krajních vláken plyne průřezový modul W, u nesouměrného průřezu (L) i hlavní osy. Zaoblení válcovaných profilů zanedbáváme, proto se hodnoty od tabulek o něco liší. Rovnice modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \sum$$
- Část průřezu
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\mathrm{mm},$
- Otvor (odečítá se)
  $$2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\mathrm{mm},$$
- Plocha průřezu: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\mathrm{mm}^2$
- Těžiště jako vážený průměr těžišť částí
  $$y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{20}{}$$
- Steinerova věta: vlastní moment části + plocha × druhá mocnina vzdálenosti os
  $$I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$
- Steinerova věta: vlastní moment části + plocha × druhá mocnina vzdálenosti os
  $$I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\mathrm{mm}^4,$$
- Kvadratické momenty celého průřezu
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Deviační moment
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\mathrm{mm}^4$$
- Hlavní kvadratické momenty
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$$
- Natočení hlavní osy 1 od osy y
  $$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$$
- Průřezové moduly (e = vzdálenost krajních vláken od těžiště)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Poloměry setrvačnosti
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\mathrm{mm}$$

Graf



Průřez ve skutečném měřítku s těžištěm T a osami y, z, které jím procházejí; u nesouměrného průřezu i hlavní osy 1, 2.

Cisterna z poloviny plná vody brzdí 5 m/s²: přední náprava nese o desítky procent víc.

Zadání: `model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];`

xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])

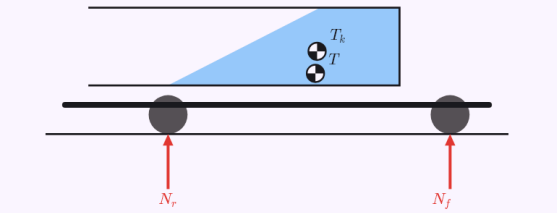
Výsledek

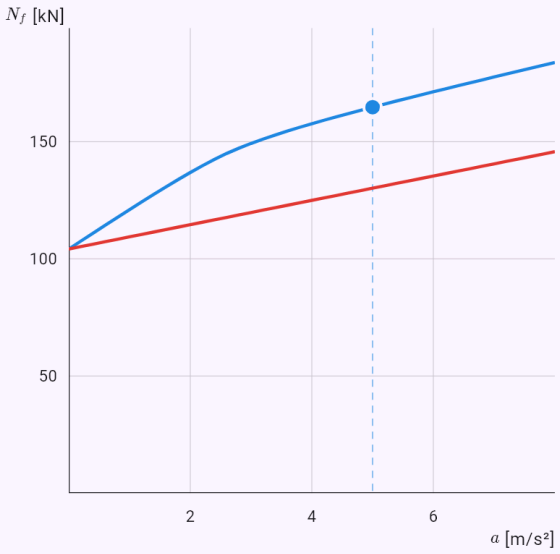
$$N_f \approx 164{,}7\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hledáme N_f; zadáno
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\mathrm{m/s^2}, \quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad L_n = 8$
- Brzdění se zpomalením a: kapalina se nahrne dopředu, hladina se nakloní o úhel θ a těžiště se posune dopředu i nahoru. Zatížení náprav jsou reakce nosníku na dvou podporách se setrvačnou silou m·a v těžišti. Rovnice modelu: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g}$
- Objem nádrže a kapaliny
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Sklon hladiny – kolmé na výslednici tíhy a setrvačné síly
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- Těžiště kapaliny se posune dopředu a nahoru
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\mathrm{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\mathrm{m}, \quad \Delta x_k =$
- Těžiště celého vozidla
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\mathrm{m}$
- Zatížení náprav z momentové rovnováhy k zadní nápravě (setrvačná síla v těžišti)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Přední náprava v klidu a při jízdě; s pevným nákladem
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\mathrm{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\mathrm{rigid}} = 130{,}2$
- Vlastní frekvence první vlny (šplouchání)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\operatorname{tgh}\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}854$
- Kvazistatický model platí pro ustálené brzdění. Po prudkém zabrzdění kapalina kmitá s periodou T a nárazy na čelo nádrže mohou zatížení krátce zvýšit ještě víc; proto mají cisterny přepážky.

Graf





Boční pohled s nakloněnou hladinou, těžištěm kapaliny T_k a celku T a zatížením náprav; graf ukazuje zatížení přední nápravy podle zpomalení pro kapalinu a pevný náklad.

Táž cisterna v oblouku R = 60 m: kritická rychlost s kapalinou a s pevným nákladem.

Zadání: model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m];

`W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

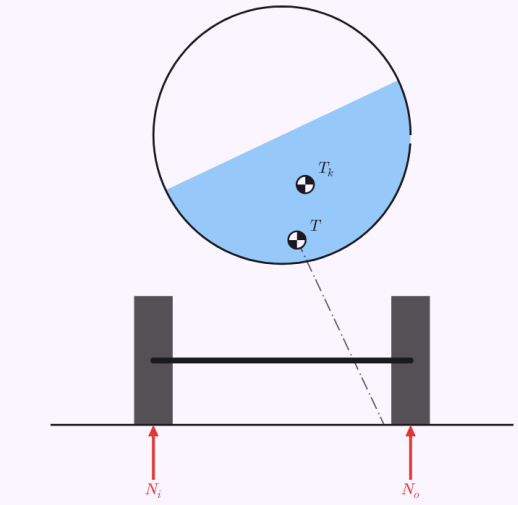
Výsledek

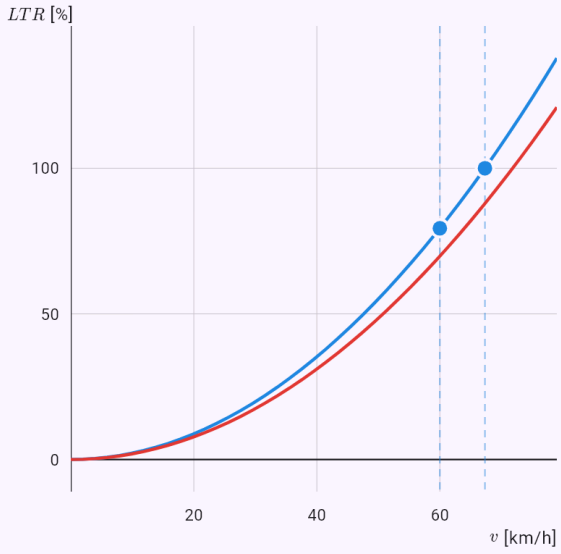
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

Postup

- Hledáme v_{krit}; zadáno
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Oblouk o poloměru R rychlostí v: dostředivé zrychlení a = v²/R, kapalina se přelije ven a s ní těžiště. Vozidlo se převrhne, když výslednice tíhy a odstředivé síly projde vnějšími koly (LTR = 100 %). Náklon karoserie na pružinách (k_r stupňů na každé g) posune těžiště ještě dál ven. Rovnice modelu: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Objem nádrže a kapaliny
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Dostředivé zrychlení v oblouku
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Sklon hladiny – kolmé na výslednici tíhy a setrvačné síly
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Těžiště kapaliny v průřezu (y ven ze zatáčky):
  $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- Náklon karoserie posune těžiště celku ještě dál ven
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Přenos zatížení na vnější kola
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Mez převrácení: výslednice prochází vnějšími koly
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Pevný náklad pro srovnání:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Vlastní frekvence první vlny (šplouchání)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L} \operatorname{tgh} \dfrac{\pi h}{L} : \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}743$
- Skutečné cisterny se převracejí už kolem 0,35–0,45 g: kromě náklonu na pružinách se stlačují pneumatiky a kapalina v oblouku navíc kmitá. Kvazistatická mez je horní odhad.

Graf





Pohled zezadu v oblouku (ven doprava) s nakloněnou hladinou, těžištěm a výslednicí; graf ukazuje přenos zatížení na vnější kola podle rychlosti – při 100 % se vnitřní kola zvednou.

Konzola 2 m se silou 10 kN: IPE 200 z tabulek, optimální trubka a trubka stálé pevnosti.

Zadání: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=250; lambda=50)
```

Výsledek

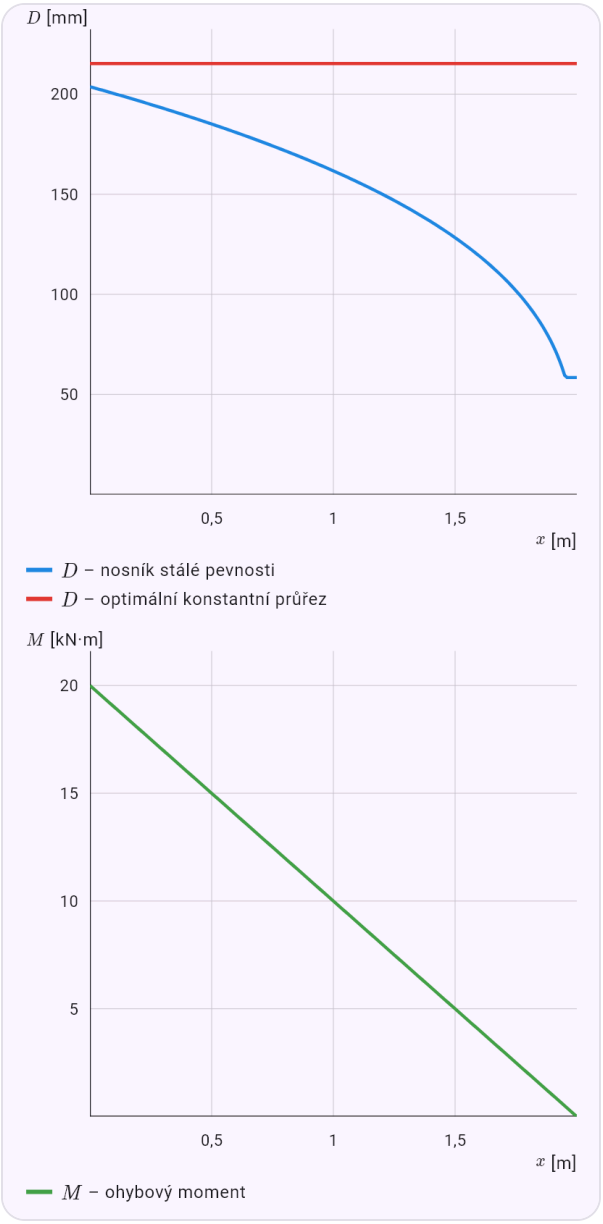
$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$$

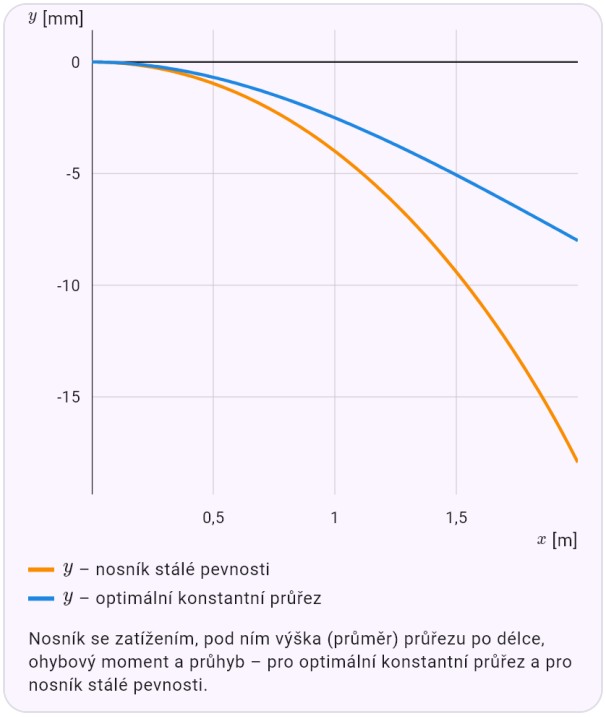
Postup

- Hledáme m; zadáno
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Vetknutý nosník (konzola) délky L se silou F na volném konci nebo se spojitým zatížením q po celé délce. Největší moment je ve vetknutí. Rovnice modelu
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Největší ohybový moment: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Podmínka pevnosti – nejmenší průřezový modul
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Podmínka průhybu (integrací E·I·y'' = −M) – nejmenší kvadratický moment
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$$
- Nejlehčí vyhovující profil v každé řadě
  $\text{IPE}\,200: \ W = 194\,\text{cm}^3,\ I = 1943\,\text{cm}^4,\ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. Podle tabulek – nejlehčí ze všech
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Tenčí stěna dává při stejném W menší plochu, optimum je proto na mezi štíhlosti: $\frac{D}{t} = \lambda = 50$
- 2. Optimální konstantní průřez – nejmenší rozměr, který splní obě podmínky
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$$
- Aktivní je podmínka průhybu (napětí vychází menší, než je dovolené): $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Plocha a hmotnost optimálního průřezu:
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Nosník stálé pevnosti – σ(x) = σ_dov všude, u volného konce nejmenší průřez kvůli smyku
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$$
- Hmotnost a průhyb nosníku stálé pevnosti
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$$
- Nosník stálé pevnosti hlídá jen napětí, proto je poddajnější a povolený průhyb překročí. V praxi se průřez zvětší, nebo se použije jen u nosníků, kde rozhoduje pevnost.
- Hmotnost variant oproti profilu z tabulek:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$$
- Vlastní tíhu nosníku jsme zanedbali; u dlouhých a těžkých nosníků se přičte ke spojitému zatížení.

Graf







Nosník se zatížením, pod ním výška (průměr) průřezu po délce, ohybový moment a průhyb – pro optimální konstantní průřez a pro nosník stálé pevnosti.

Obdélník stálé pevnosti se stálou šířkou: výška po délce jako parabola, o třetinu méně materiálu.

Zadání: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Výsledek

$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$

$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$

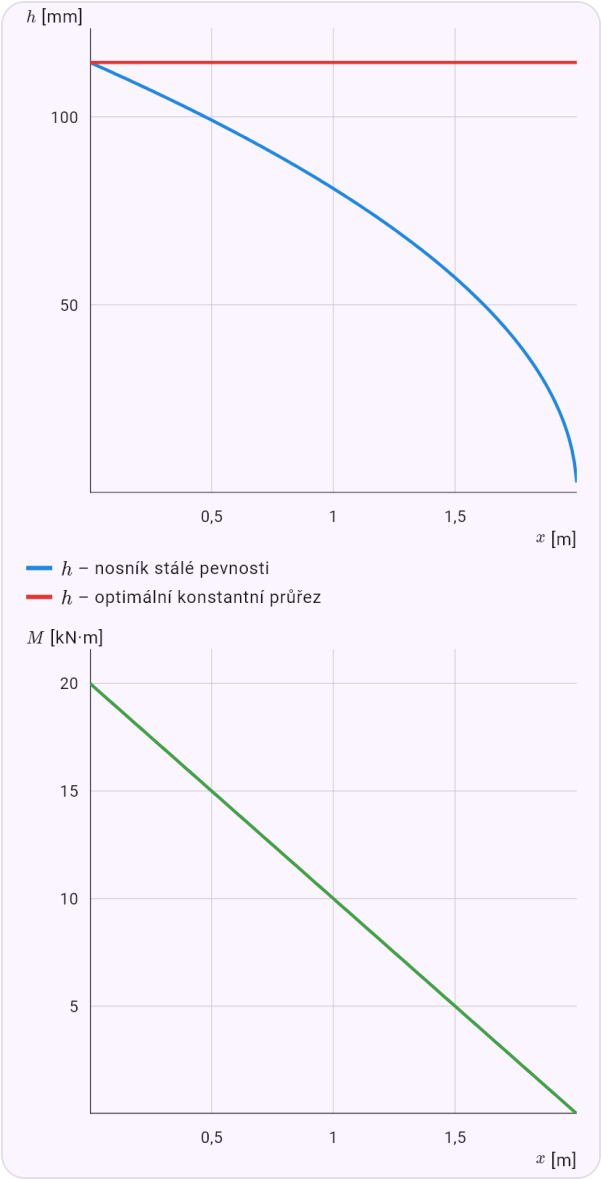
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

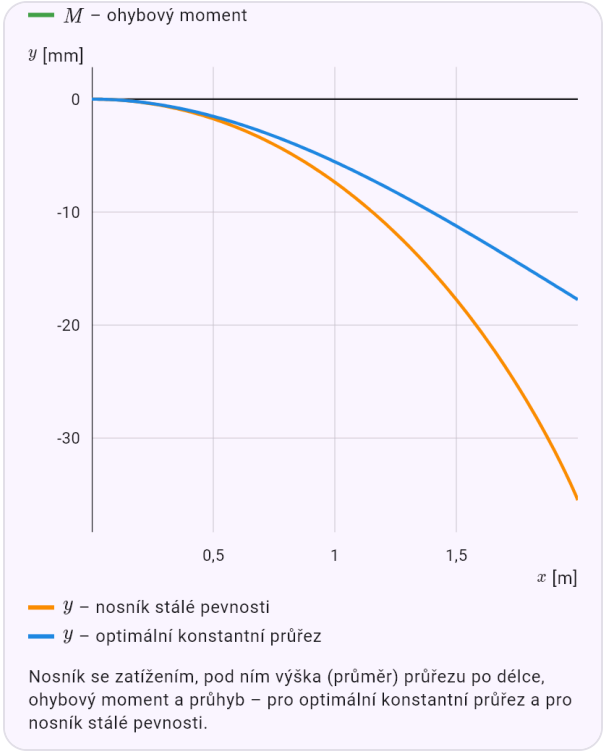
Postup

- Hledáme m; zadáno
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Vetknutý nosník (konzola) délky L se silou F na volném konci nebo se spojitým zatížením q po celé délce. Největší moment je ve vetknutí. Rovnice modelu
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Největší ohybový moment: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Podmínka pevnosti – nejmenší průřezový modul
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Podmínka průhybu (integrací E·I·y'' = −M) – nejmenší kvadratický moment
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$$
- Nejlehčí vyhovující profil v každé řadě
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Podle tabulek – nejlehčí ze všech
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Optimální konstantní průřez – nejmenší rozměr, který splní obě podmínky
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- Aktivní je podmínka pevnosti (průhyb vychází menší, než je povolený): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Plocha a hmotnost optimálního průřezu:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Nosník stálé pevnosti – σ(x) = σ_dov všude, u volného konce nejmenší průřez kvůli smyku
  $$h(x) = \sqrt{\frac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \frac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$$
- Hmotnost a průhyb nosníku stálé pevnosti
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$$
- Hmotnost variant oproti profilu z tabulek:
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- Vlastní tíhu nosníku jsme zanedbali; u dlouhých a těžkých nosníků se přičte ke spojitému zatížení.

Graf







Nosník se zatížením, pod ním výška (průměr) průřezu po délce, ohybový moment a průhyb – pro optimální konstantní průřez a pro nosník stálé pevnosti.

Prostý nosník 6 m se spojitým zatížením: rozhoduje průhyb.

Zadání: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

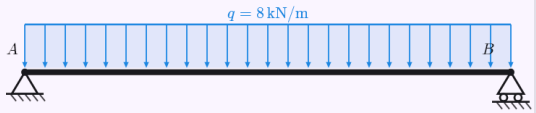
Výsledek

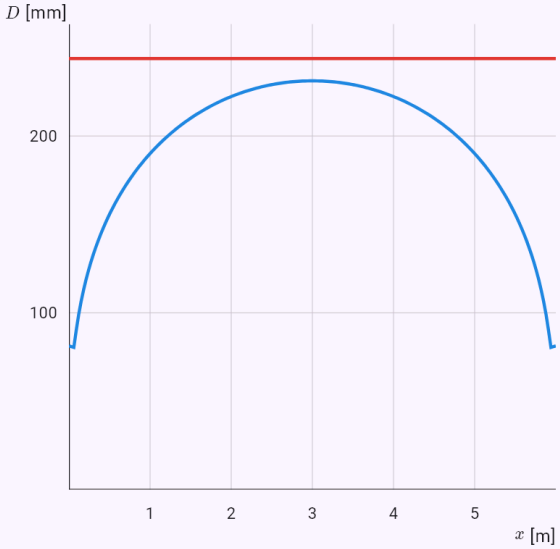
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

Postup

- Hledáme m; zadáno
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Prostý nosník délky L se silou F uprostřed nebo se spojitým zatížením q po celé délce. Největší moment je uprostřed. Rovnice modelu
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Největší ohybový moment: $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Podmínka pevnosti – nejmenší průřezový modul
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$$
- Podmínka průhybu (integrací E·I·y" = −M) – nejmenší kvadratický moment
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$$
- Nejlehčí vyhovující profil v každé řadě
  $\text{IPE}\,240:\ W = 324\,\text{cm}^3,\ I = 3892\,\text{cm}^4,\ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. Podle tabulek – nejlehčí ze všech
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Tenčí stěna dává při stejném W menší plochu, optimum je proto na mezi štíhlosti: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 40$
- 2. Optimální konstantní průřez – nejmenší rozměr, který splní obě podmínky
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$$
- Aktivní je podmínka průhybu (napětí vychází menší, než je dovolené): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Plocha a hmotnost optimálního průřezu:
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Nosník stálé pevnosti – σ(x) = σ_dov všude, u volného konce nejmenší průřez kvůli smyku
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$$
- Hmotnost a průhyb nosníku stálé pevnosti
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$$
- Nosník stálé pevnosti hlídá jen napětí, proto je poddajnější a povolený průhyb překročí. V praxi se průřez zvětší, nebo se použije jen u nosníků, kde rozhoduje pevnost.
- Hmotnost variant oproti profilu z tabulek:
  $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$
- Vlastní tíhu nosníku jsme zanedbali; u dlouhých a těžkých nosníků se přičte ke spojitému zatížení.

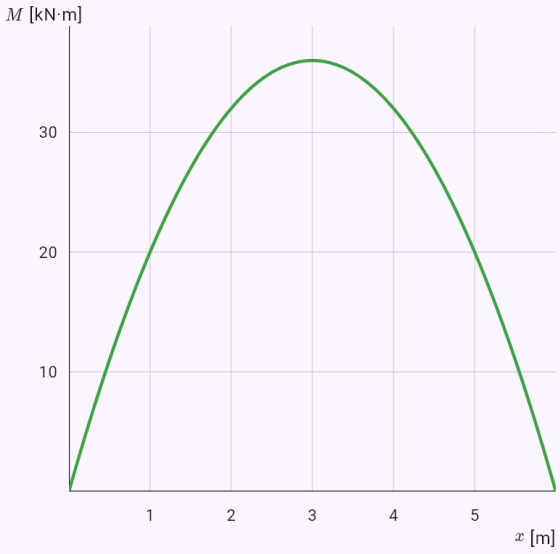
Graf



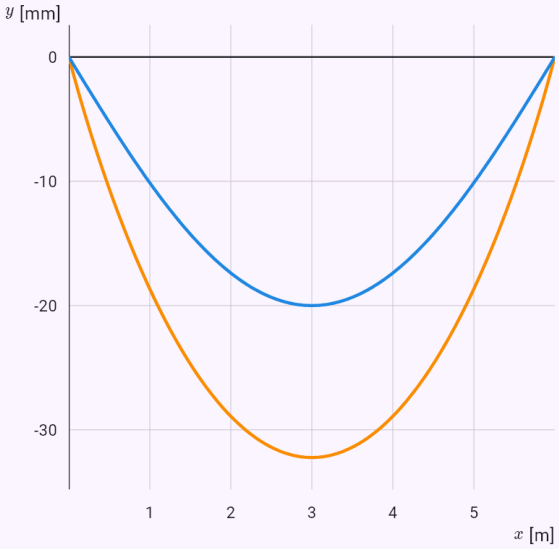


D – nosník stálé pevnosti

D – optimální konstantní průřez



M – ohybový moment



y – nosník stálé pevnosti

y – optimální konstantní průřez

Nosník se zatížením, pod ním výška (průměr) průřezu po délce, ohybový moment a průhyb – pro optimální konstantní průřez a pro nosník stálé pevnosti.

45. Astronomie a astrofyzika

Obor Astronomie a astrofyzika najdete v sekci „Aplikace“. Vedle Keplerových zákonů, vzájemného ovlivňování těles a problému tří těles (popsaných v kapitole Fyzika) má formuláře Černé díry, Neutronové hvězdy, Gravitační vlny, Hvězdné velikosti a vzdálenosti, Záření hvězd, Rudý posuv a Hubbleův zákon a Exoplanety. Vzorce jsou hotové a postup ukazuje dosazení. Rovnice obecné relativity appka neřeší, používá jen jejich výsledky pro nerotující černou díru.

Formulář Černé díry počítá [[schwarzschildRadius|Schwarzschildův poloměr]], fotonovou sféru a nejvnitřnější stabilní dráhu, „hustotu“ černé díry s grafem podle hmotnosti v logaritmickém měřítku, únikovou rychlost, gravitační dilataci času a rudý posuv (i pro dvoje hodiny, například GPS), slapovou sílu, Hawkingovu teplotu s dobou vypaření a hmotnost Sgr A* z oběhu hvězdy S2. Nabídka objektů vyplní Slunce, Zemi, neutronovou hvězdu, hvězdnou černou díru, Sgr A* nebo M87*.

Neutronové hvězdy mají hustotu, gravitaci na povrchu, roztočení při kolapsu ze zachování momentu hybnosti a nejkratší možnou periodu rotace. Gravitační vlny počítají frekvenci ze vzdálenosti obíhající dvojice (a naopak) a energii vyzářenou při splynutí, například GW150914.

Základy úvodního kurzu astronomie: Pogsonova rovnice, modul vzdálenosti s [[absoluteMagnitude|absolutní hvězdnou velikostí]] a paralaxa; Wienův a Stefanův-Boltzmannův zákon pro [[blackBody|absolutně černé těleso]], sluneční konstanta a rovnovážná teplota planety; Dopplerův [[redshift|rudý posuv]] a Hubbleův zákon s Hubbleovým časem; u exoplanet hloubka tranzitu, metoda radiálních rychlostí a [[habitableZone|obyvatelná zóna]].

K Keplerovým zákonům přibyl Hohmannův přelet mezi dvěma kruhovými drahami (Δv a doba letu) a ke vzájemnému ovlivňování těles [[rocheLimit|Rocheova mez]] a Hillova sféra.

Ukázky

Do jaké kuličky by se musela stlačit Země, aby z ní byla černá díra.

Zadání: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Výsledek

$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$

Postup

- Hledáme r_s; zadáno: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\, M_\odot$
- Převedeme jednotky:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\, M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Schwarzschildův poloměr r_s = 2GM/c² je poloměr horizontu událostí. Země by se musela stlačit do kuličky o průměru asi 18 mm, Slunce do koule o poloměru 3 km. Světlo může obíhat na fotonové sféře 1,5 r_s, nejvnitřnější stabilní dráha hmoty (ISCO) je 3 r_s. Rovnice modelu
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- Dosadíme
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Platí pro nerotující černou díru. U rotující (Kerrovy) leží ISCO a fotonová sféra blíž.
- Převedeme jednotky: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

„Hustota“ černé díry M87* – řidší než vzduch.

Zadání: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

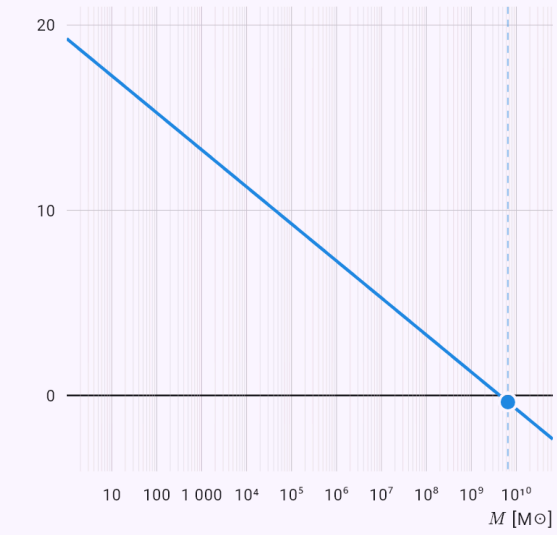
Výsledek

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

Postup

- Hledáme ρ; zadáno: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Převedeme jednotky:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- Průměrná „hustota“ uvnitř horizontu: hmotnost dělená objemem koule o poloměru r_s. Klesá s 1/M². Hvězdná černá díra je hustší než atomové jádro, černá díra o 10^8 hmotnostech Slunce má hustotu vody a M87* je řidší než vzduch. Graf má hmotnost v logaritmickém měřítku.
  Rovnice modelu: $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Dosadíme
  $$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$$
- Pro srovnání: atomové jádro, voda a vzduch (asi 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Řidší než vzduch – „hustota“ je jen průměr přes objem horizontu.

Graf



Vodorovná osa je logaritmická – každý dílek je desetinásobek předchozího. Tečka je zadaná hodnota nebo odpověď.

O kolik se denně předbíhají hodiny družic GPS vlivem gravitace.

Zadání: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km]; t=1[d];`

`mode=gravdilation; astro=earth)`

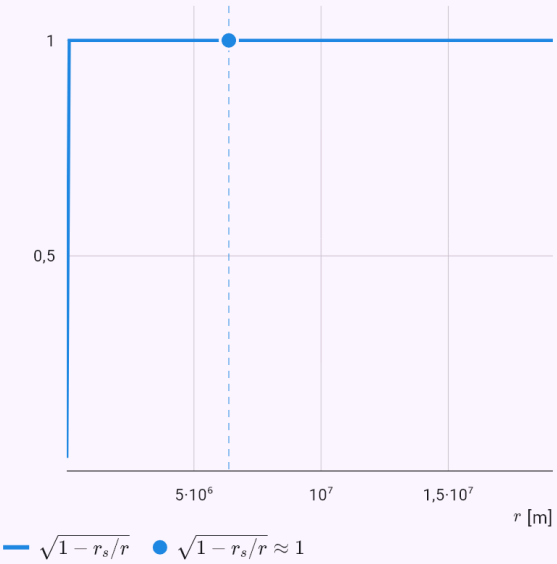
Výsledek

$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Postup

- Hledáme Δt; zadáno
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Převedeme jednotky
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Hodiny blízko hmotného tělesa jdou pomaleji: dτ/dt = √(1 − r_s/r). Světlo odtud přichází posunuté k červené. Se druhou vzdáleností r_2 srovná dvoje hodiny. Družice GPS (r_2 = 26 571 km) jdou vůči zemi napřed asi o 45,7 μs za den. Rovnice modelu
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Dosadíme
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Zpoždění za jednotku času: $1 - \frac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Dosadíme
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Srovnání dvou hodin v různé vzdálenosti, kladný rozdíl znamená, že bližší hodiny jdou pomaleji.
- Převedeme jednotky: $\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Slapová síla na člověka na horizontu hvězdné černé díry.

Zadání: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

`astro=stellar)`

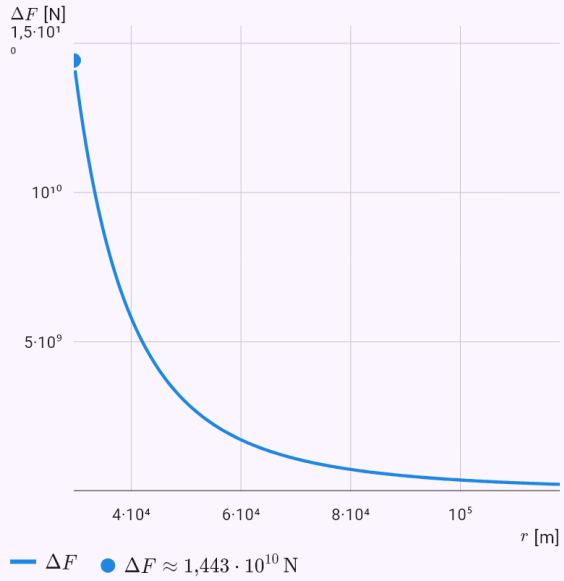
Výsledek

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Postup

- Hledáme ΔF_s; zadáno:
  $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- Převedeme jednotky: $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- Slapová síla je rozdíl gravitace na hlavu a na nohy. U hvězdné černé díry roztrhá člověka dávno před horizontem („špagetizace“), u velké černé díry (Sgr A*) je na horizontu nepatrná. Rovnice modelu:
  $\Delta F \approx \dfrac{2GMm\,L}{r^3}$
- Dosadíme
  $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  $\Delta F_s = \dfrac{2GMm\,L}{r_s^3} = \dfrac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- Dosadíme
  $\Delta F_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- V násobcích tíhy tělesa: $\dfrac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- Slapová síla je mnohem větší, než tělo vydrží – „špagetizace“.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Hmotnost Sgr A* z oběhu hvězdy S2.

Zadání: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Výsledek

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Postup

- Hledáme M; zadáno: $a = 1019\,\mathrm{au}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{let}$
- Převedeme jednotky
  $a = 1019\,\mathrm{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{let} = 5{,}065$
- Hvězda S2 obíhá střed Galaxie po elipse s velkou poloosou asi 1 019 au za 16,05 roku. Z Keplerova 3. zákona plyne hmotnost Sgr A* asi 4 miliony Sluncí v oblasti menší než sluneční soustava. Za toto měření byla Nobelova cena za fyziku 2020. Rovnice modelu:
  $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- Dosadíme
  $M = \dfrac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}065 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg}$
- V hmotnostech Slunce: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horizont Sgr A*
  $r_s = \dfrac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \dfrac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Nobelova cena za fyziku 2020 (Genzel, Ghez) za objev supermasivního kompaktního objektu ve středu Galaxie.
- Převedeme jednotky:
  $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

Perioda rotace jádra po kolapsu na neutronovou hvězdu.

Zadání: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Výsledek

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\mathrm{ms}$$

Postup

- Hledáme T_2; zadáno:
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km}, \quad R_2 = 12\,\mathrm{km}$
- Převedeme jednotky
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d} = 2\,195\,000\,\mathrm{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km} = 6{,}96 \cdot$
- Zachování momentu hybnosti: když se jádro zmenší, roztočí se rychleji, perioda klesá s druhou mocninou poloměru (jako krasobruslařka s přitaženými pažemi). Tak vznikají pulzary s periodami v milisekundách až sekundách. Rovnice modelu
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- Bereme hvězdu jako homogenní kouli bez ztráty hmotnosti.
- Dosadíme
  $T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$
- Kolikrát rychleji se točí: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Skutečné pulzary se točí pomaleji (milisekundy až sekundy): jádro před kolapsem rotuje pomaleji a moment hybnosti odnáší i vyvržený obal.
- Převedeme jednotky: $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}6524\,\mathrm{ms}$

Energie vyzářená gravitačními vlnami při splynutí GW150914.

Zadání: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Výsledek

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$$

Postup

- Hledáme E; zadáno:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Převedeme jednotky
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- Splynutím vznikne černá díra lehčí než součet obou. Rozdíl hmotností odnesou gravitační vlny jako energii E = Δm·c². Rovnice modelu:
  $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\,c^2$
- Dosadíme
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Podíl vyzářené hmotnosti:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$
- Dosadíme
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$
- Ve srovnání s celým životem Slunce:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\mathrm{let}} \approx 4438$
- LIGO zachytilo vlny z GW150914 vzdálené 1,3 miliardy světelných let, posunuly zrcadla o tisícinu průměru protonu.

Vzdálenost Síria z modulu vzdálenosti.

Zadání: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod;`

`star=sirius)`

Výsledek

$$d \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$$

Postup

- Hledáme d; zadáno: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- Absolutní hvězdná velikost M je ta, kterou by hvězda měla ze vzdálenosti 10 pc. Modul vzdálenosti m − M určuje vzdálenost, když známe skutečnou svítivost hvězdy (cefeidy, supernovy Ia). Rovnice modelu: $m - M = 5 \log \dfrac{d}{10\ \mathrm{pc}}$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $d = 10\ \mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Dosadíme: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$
- Ve světelných letech: $d \approx 8{,}658\ \mathrm{ly}$
- Pohlcování světla mezihvězdným prachem zanedbáváme, hvězda pak vypadá dál.

Vlnová délka maxima záření Slunce.

Zadání: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

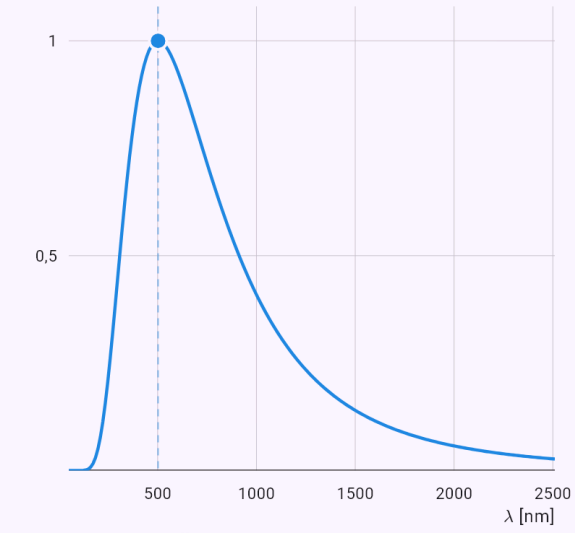
Výsledek

$$\lambda_{\max} \approx 502\ \mathrm{nm}$$

Postup

- Hledáme $\lambda_{\max}$; zadáno: $T = 5772\ \mathrm{K}$
- Wienův posunovací zákon: vlnová délka, na které těleso vyzařuje nejvíc, je nepřímo úměrná teplotě. Slunce má maximum u zelené barvy (asi 500 nm), chladná Betelgeuze v infračervené oblasti, horká Vega v modré. Rovnice modelu: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$
- Wienova konstanta v nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\ \mathrm{nm \cdot K}$
- Dosadíme: $\lambda_{\max} = \dfrac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\ \mathrm{nm}$
- Maximum je ve viditelném světle.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Rovnovážná teplota Země bez skleníkového jevu.

Zadání: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium;`

`planet=earth)`

Výsledek

$$T_{\mathrm{eq}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

Postup

- Hledáme T_{eq}; zadáno:
  $L = 1\,L_{\odot}, \quad a = 1\,\mathrm{au}, \quad A = 0{,}306$
- Převedeme jednotky
  $L = 1\,L_{\odot} = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}, \quad a = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Sluneční konstanta S je výkon dopadající na 1 m² ve vzdálenosti a od hvězdy. Planeta pohltí S(1 − A) na ploše průřezu πR² a vyzáří σT⁴ z celého povrchu 4πR². Z rovnováhy plyne teplota bez skleníkového jevu. Rovnice modelu: $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eq}}^4$
- Dosadíme
  $$S = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2} \approx 1361\,\mathrm{W/m^2}$$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Dosadíme
  $$T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\frac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\mathrm{K}$$
- Bez skleníkového jevu. Skutečná průměrná teplota Země je vyšší: $T_{\oplus} \approx 288\,\mathrm{K}$

Hubbleův čas jako odhad stáří vesmíru.

Zadání: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Výsledek

$$t_H \approx 13{,}97\,\text{mld. let}$$

Postup

- Hledáme t_H; zadáno: $H_0 = 70\,\text{km}/(\text{s}\cdot\text{Mpc})$
- Hubbleův zákon v = H_0·d. Převrácená hodnota Hubbleovy konstanty (Hubbleův čas) odhaduje stáří vesmíru, asi 14 miliard let. Přesné stáří 13,8 miliardy let vychází z modelu rozpínání. Rovnice modelu:
  $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Hubbleova konstanta v s^{-1}
  $H_0 = \dfrac{70}{3{,}086\cdot 10^{19}}\,\text{s}^{-1} \approx 2{,}269\cdot 10^{-18}\,\text{s}^{-1}$
- Dosadíme: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269\cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\text{s}$
- V miliardách let: $t_H \approx 13{,}97\,\text{mld. let}$
- Hubbleův čas je jen odhad stáří, rozpínání se zpomalovalo a teď se zrychluje.
- Převedeme jednotky:
  $t_H \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\text{s} = 13{,}97\,\text{mld. let}$

Hloubka tranzitu Země před Sluncem.

Zadání: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit;`

`exo=earth)`

Výsledek

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$$

Postup

- Hledáme $\frac{\Delta F}{F}$; zadáno: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Převedeme jednotky:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\text{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\text{km}$
- Když planeta přechází před hvězdou, zakryje část jejího kotoučku a jasnost klesne o poměr ploch (R_p/R_*)². Jupiter by Slunce zeslabil o 1 %, Země jen o 84 miliontin (ppm). Rovnice modelu: $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Dosadíme: $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- V miliontinách (ppm): $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$
- Tranzit uvidíme, jen když se na dráhu planety díváme téměř z boku.
- Převedeme jednotky: $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\text{ppm}$

Doba Hohmannova přeletu ze Země k Marsu.

Zadání: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

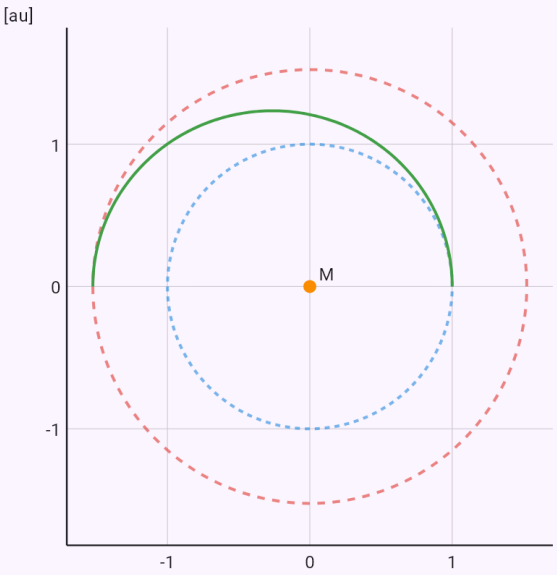
Výsledek

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$$

Postup

- Hledáme t; zadáno
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- Převedeme jednotky
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- Hohmannova přechodová dráha je polovina elipsy, která se dotýká výchozí i cílové kruhové dráhy. Dvěma zážehy (Δv) se přejde z jedné na druhou s nejmenší spotřebou paliva. Let ze Země k Marsu tak trvá asi 259 dní. Rovnice modelu
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Dosadíme
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Dosadíme
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- Ve dnech: $t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$
- Ven: zrychlit ve směru letu, na cílové dráze zrychlit znovu.
- Převedeme jednotky: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{d}$

Graf



Tělesa a význačné body v pravém měřítku.

Rocheova mez Saturnu pro ledový měsíc – proč tam jsou prstence.

Zadání: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Výsledek

$$d_R \approx 129\,000\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hledáme d_R; zadáno
  $R = 58\,230\,\mathrm{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3}, \quad \rho_m = 0{,}917\,\mathrm{g/}$
- Převedeme jednotky
  $R = 58\,230\,\mathrm{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\mathrm{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3} =$
- Rocheova mez: blíž k planetě slapové síly roztrhají měsíc, který drží pohromadě jen vlastní gravitace. Proto má Saturn prstence uvnitř své Rocheovy meze. Pevný měsíc vydrží blíž než kapalný. Rovnice modelu:
  $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\dfrac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Dosadíme
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
- V poloměrech planety: $\dfrac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Uvnitř Rocheovy meze nevznikne velký měsíc, proto tam jsou prstence (Saturn).
- Převedeme jednotky: $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 129\,000\,\mathrm{km}$

46. Aplikace komplexní analýzy

Formuláře v Aplikacích (obory Fyzika, Elektrotechnika, Technika, Geometrie a Matematická analýza) využívají funkce komplexní proměnné z předchozí kapitoly. Každý má postup s komplexním potenciálem, zobrazením nebo póly a graf v Gaussově rovině.

Ideální proudění a profil křídla: [[complexPotential|komplexní potenciál]] $w(z)$, [[streamline|proudnice]] jako vrstevnice $\operatorname{Im} w$ a tlak z Bernoulliho rovnice. Obtékání válce i s cirkulací (body zastavení, Magnusův jev, vztlak $L' = \rho U \Gamma$), Rankinovo těleso, proudění do rohu a vír. Žukovského profil vznikne konformním zobrazením $z = \zeta + b^2/\zeta$, cirkulaci určí [[kuttaCondition|Kuttova podmínka]] a vztlak Kuttova–Žukovského věta; graf ukáže proudnice kolem profilu a C_L podle úhlu náběhu.

Pole konformním zobrazením: koaxiální kabel ($w = \ln z$ převede kabel na deskový kondenzátor – kapacita, indukčnost a vlnová impedance), dvouvodičové vedení přes Möbiovo zobrazení, potenciál v klínu mezi deskami a ustálená teplota v polorovině; siločáry a ekvipotenciály v grafu. Napětí kolem kruhového otvoru v desce podle Kirsche s komplexními potenciály Kolosova a Muschelišviliho dává [[stressConcentration|koncentraci napětí]] 3 u tahu, 2 u stejného tahu ve dvou směrech a 4 u smyku. Mercatorova mapa je komplexní logaritmus stereografické projekce: měřítko $1/\cos\varphi$, Tissotovy kroužky a [[loxodrome|loxodroma]] jako přímka proti ortodromě.

Řízení a signály: stabilita regulační smyčky s přenosem $K \cdot e^{-s\tau}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ [[nyquistCriterion|Nyquistovým kritériem]] (argumentový princip, bezpečnost v zesílení a ve fázi, Bodeho diagram) a [[rootLocus|geometrickým místem kořenů]] (asymptoty, bod rozvětvení, kritické zesílení). Návrh [[butterworthFilter|Butterworthova]] a Čebyševova filtru z pólů na kružnici a elipse, číslicový filtr 2. řádu s póly a nulami v rovině z, impulsní odezvou přes rezidua a frekvenční charakteristikou na jednotkové kružnici. Rezonanční křivka mechanického oscilátoru nebo obvodu RLC ze vzdáleností bodu $i\omega$ od pólů, [[qualityFactor|činitel jakosti]] a šířka pásma. Střídavé obvody s fázory jsou v kapitole Elektrotechnika.

Odezva a vedení: Lorentzův oscilátor dává index lomu a absorpci prostředí; póly v dolní polorovině znamenají kauzalitu a [[kramersKronig|Kramersovy–Kronigovy relace]], které aplikace ověří numerickým integrálem s hlavní hodnotou. Přirozená šířka spektrální čáry plyne z Fourierovy transformace tlumené vlny. [[smithChart|Smithův diagram]]: činitel odrazu jako Möbiova transformace, poměr stojatých vln, vstupní impedance vedení, čtvrtvlnný transformátor a přizpůsobení pahýlem.

Hračky na mathtrace.app ve „Vyzkoušej si“: Mandelbrotova a Juliova množina a Newtonovy pánve – iterace v komplexní rovině, kterou si posunete a zvětšíte.

Ukázky

Rotující válec: cirkulace posune body zastavení pod vodorovnou osu.

Zadání: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Výsledek

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

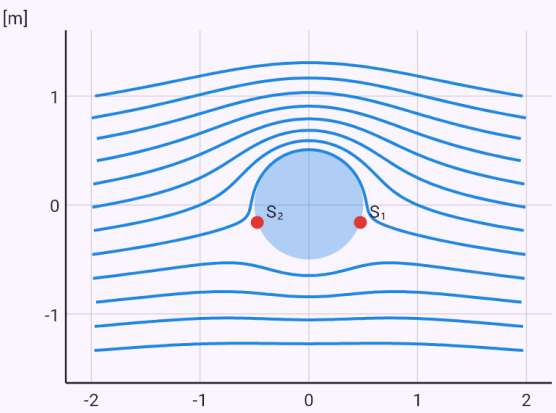
Postup

- Hledáme θ_s; zadáno
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Obtékání válce: proud U(z + R²/z), k němu volitelně vír s cirkulací Γ (rotující válec). Na povrchu je rychlost 2U·sin θ, takže na bocích je dvojnásobná. Cirkulace posune body zastavení dolů a vytvoří vztlak podle Kuttovy–Žukovského věty L' = ρUΓ na metr délky. Rovnice modelu:
  $w(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- Komplexně sdružená rychlost je derivace potenciálu
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$
- Na povrchu válce je rychlost tečná
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Největší rychlost na povrchu:
  $v_{max} = 2U + \frac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Body zastavení (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi UR} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Součinitel tlaku z Bernoulliho rovnice
  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi UR}\right)^2$

- Vztlak na metr délky (Kuttova–Žukovského věta):
  $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Rotující válec nebo míč s cirkulací má vztlak kolmý na proud – Magnusův jev, kterým se točí zahraný míč. Flettnerovy lodě ho využívají k pohonu.

Graf

Proudnice | Graf



Plné čáry jsou proudnice, čárkované ekvipotenciály (jen bez cirkulace). Tam, kde jsou proudnice hustší, teče tekutina rychleji.

Žukovského profil 12 % s prohnutím 2 % při úhlu náběhu 4°.

Zadání: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m];`

```
tc=12[pct]; fc=2[pct]; aoa=4[deg])
```

Výsledek

$$C_L \approx 0{,}7243$$

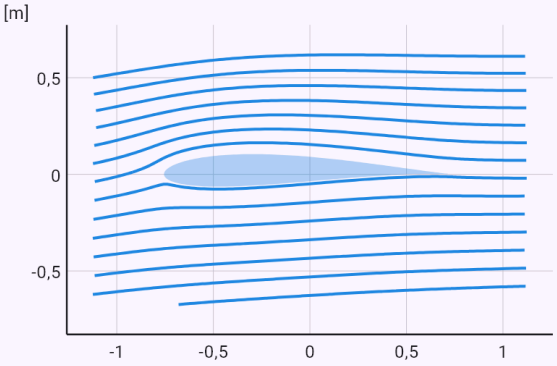
Postup

- Hledáme C_L; zadáno
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- Žukovského profil vznikne konformním zobrazením z = ζ + b²/ζ z kružnice, která prochází bodem ζ = b. Posunutí středu vlevo dá tloušťku, nahoru prohnutí. Obtékání kružnice se přenese na profil, cirkulaci určí Kuttova podmínka (proud opouští ostrou odtokovou hranu hladce) a vztlak Kuttova–Žukovského věta. Vychází známé C_L ≈ 2π(α + β), stejně jako u tenkého profilu. Výkony celého letadla počítá formulář Letadlo. Rovnice modelu
  $$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta - \mu)e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta - \mu}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}$$
- Kružnice v rovině ζ, ze které profil vznikne
  $$b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$$
- Cirkulace z Kuttovy podmínky na odtokové hraně
  $$|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha + \beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$$
- Vztlak na metr délky (Kuttova–Žukovského věta):
  $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Součinitel vztlaku, v závorce teorie tenkého profilu
  $$C_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \frac{8\pi a}{c}\sin(\alpha + \beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha + \beta$$

- Ideální tekutina: platí pro malé úhly náběhu bez odtržení proudu (u běžných profilů zhruba do 10–15°). Skutečné křídlo konečného rozpětí má vztlak menší kvůli indukovanému odporu (formulář Letadlo).

Graf

Proudnice | Graf



Proudnice kolem profilu v pravém měřítku. Odtoková hrana vpravo – proud ji opouští hladce (Kuttova podmínka), nad profilem jsou proudnice hustší a tlak nižší.

Rankinovo těleso – šířka daleko po proudu Q/U.

Zadání: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

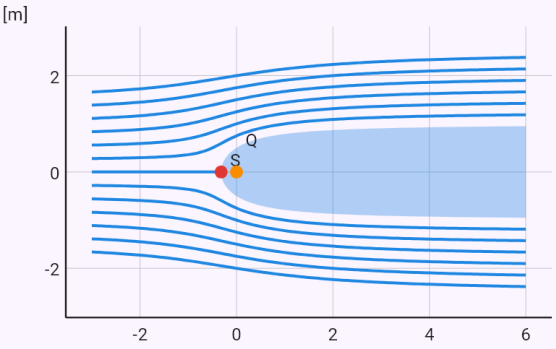
Výsledek

$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme d; zadáno: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Zdroj vydatnosti Q (m²/s na metr hloubky) v proudu rychlosti U. Dělicí proudnice ψ = Q/2 obepíná Rankinovo poloviční těleso, které tvarem připomíná náběžnou část pilíře mostu nebo přídě. Vpředu je bod zastavení, daleko vzadu má těleso šířku Q/U. Rovnice modelu:
  $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- Komplexně sdružená rychlost je derivace potenciálu:
  $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Bod zastavení před zdrojem:
  $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Dělicí proudnice – obrys tělesa: $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Šířka tělesa daleko po proudu:
  $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Největší rychlost na povrchu tělesa (numericky)
  $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$
- Rankinovo těleso je první odhad obtékání zaoblené přední části tělesa (pilíř, trup, náběžná hrana). Za tělesem v ideální tekutině chybí úplav.

Graf



Plné čáry jsou proudnice, čárkované ekvipotenciály (jen bez cirkulace). Tam, kde jsou proudnice hustší, teče tekutina rychleji.

Koaxiální kabel RG-58: vlnová impedance asi 50 Ω.

Zadání: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

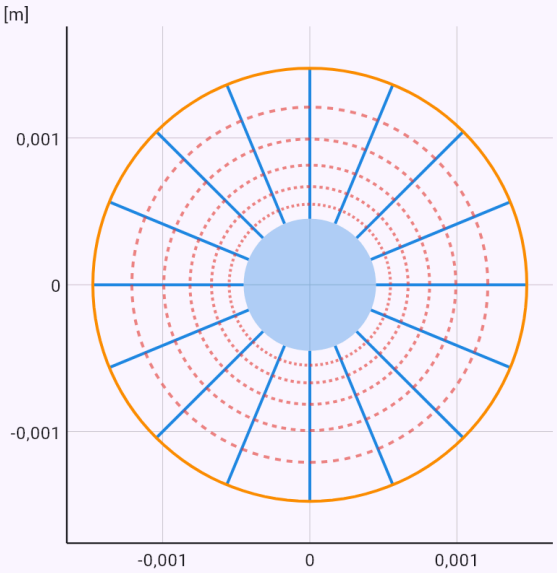
Výsledek

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Postup

- Hledáme Z_0; zadáno:
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Převedeme jednotky
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm} = 0{,}001$
- Koaxiální kabel: logaritmus w = ln z rozvine mezikruží a < |z| < b na obdélník šířky 2π a výšky ln(b/a). Z kabelu je deskový kondenzátor a kapacita, indukčnost i vlnová impedance plynou hned. Rovnice modelu:
  $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Obraz mezikruží v rovině w = ln z – obdélník
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- Potenciál je lineární v Re w
- Kapacita jako u deskového kondenzátoru:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\mathrm{pF/m}$
- Indukčnost a vlnová impedance vedení
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- Kabel RG-58 (vodič 0,9 mm, polyetylen 2,95 mm) má asi 50 Ω a 100 pF/m. Vlnová impedance závisí jen na poměru b/a, proto mají tenké i tlusté kabely stejných 50 nebo 75 Ω.

Graf



Plné čáry jsou siločáry, čárkované ekvipotenciály; obojí se kříží v pravém úhlu. Vodiče jsou vybarvené nebo tlusté.

Kapacita dvouvodičového vedení přes Möbiovo zobrazení.

Zadání: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

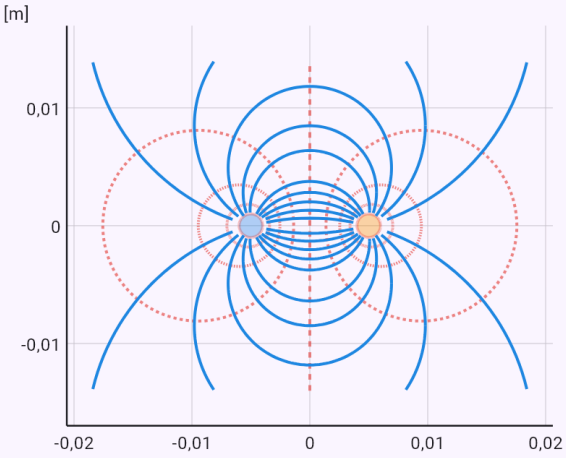
Výsledek

$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Postup

- Hledáme C'; zadáno: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Převedeme jednotky:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Dvouvodičové vedení (dva rovnoběžné dráty): Möbiovo zobrazení w = (z − h)/(z + h) převede obě kružnice drátů na soustředné kružnice, tedy na koaxiální kabel. Ekvipotenciály jsou Apolloniovy kružnice, siločáry kružnice procházející body ±h. Rovnice modelu
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- Obrazy drátů jsou soustředné kružnice
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{argcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Kapacita dvouvodičového vedení
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{argcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Indukčnost a vlnová impedance vedení
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{argcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{}$$
- Ploché dvoulinkové vedení k anténám mívalo 300 Ω, kroucená dvojlinka v datových kabelech asi 100 Ω. Vzorec platí pro dráty daleko od jiných vodičů.

Graf



Plné čáry jsou siločáry, čárkované ekvipotenciály; obojí se kříží v pravém úhlu. Vodiče jsou vybarvené nebo tlusté.

Ustálená teplota v polorovině s horkou a studenou částí hranice.

Zadání: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC]; x=0.5[m];`

```
y=1[m])
```

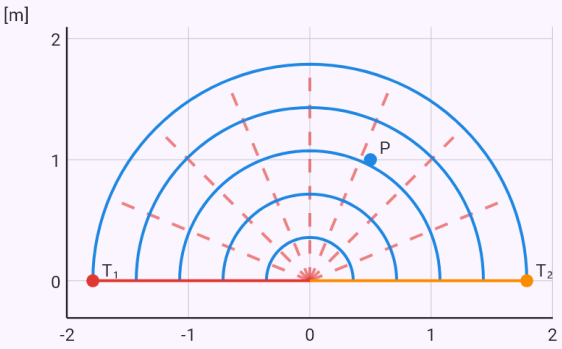
Výsledek

$$T \approx 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Postup

- Hledáme T; zadáno
  $T_1 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Ustálené vedení tepla v polorovině y > 0, jejíž hranice má vlevo teplotu T_1 a vpravo T_2. Teplota je harmonická, stejně jako potenciál v klínu s úhlem 180°: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Izotermy jsou paprsky z počátku, tepelný tok teče po půlkružnicích. Rovnice modelu
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Harmonická funkce s danými hodnotami na hranici
- Úhel bodu: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^{\circ}$
- Teplota v bodě: $T = 20 + \dfrac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$
- Například zem pod rozhraním dvou povrchů s různou teplotou. Na hranici v počátku skáče teplota z T_1 na T_2, proto tam tok roste nade všechny meze.

Graf



Čárkované paprsky jsou izotermy, plné půlkružnice čáry tepelného toku.

Kruhový otvor v tažené desce: součinitel koncentrace napětí 3.

Zadání: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

Výsledek

$$K_t \approx 3$$

Postup

- Hledáme K_t; zadáno: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Tah σ_x v jednom směru: na okraji otvoru napříč tahu je 3σ_x, ve směru tahu −σ_x (tlak). Rovnice modelu

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$$

- Komplexní potenciály Kolosova–Muschelišviliho pro tah σ

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$

- Na okraji otvoru je radiální napětí nulové, obvodové

$$r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$$

- Obvodové napětí v okolí otvoru (Kirsch)

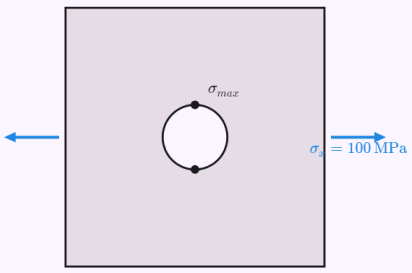
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

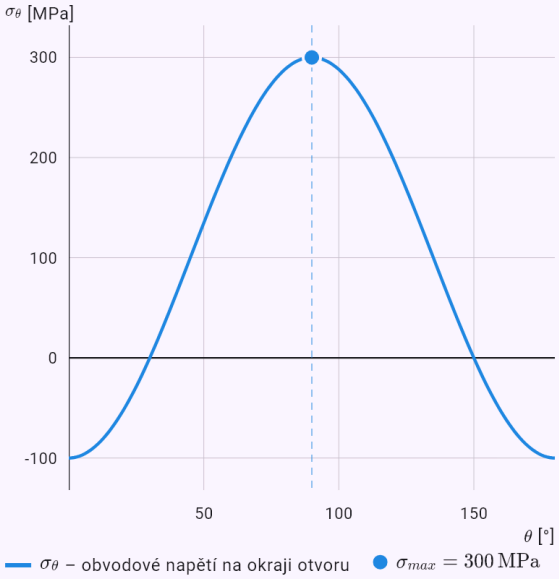
- Největší napětí a součinitel koncentrace

$$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$

- Ve vzdálenosti dvou poloměrů od středu je napětí jen o 22 % vyšší než v desce – koncentrace je místní.
- Platí pro pružný materiál a otvor malý proti rozměrům desky (šířka aspoň pětkrát větší než průměr). U úzkého pásu je K_t menší, ale napětí v oslabeném průřezu větší.

Graf





Deska s otvorem a napětí, kterým je namáhána (šipky nejsou v měřítku). Graf ukazuje obvodové napětí na okraji otvoru podle úhlu θ od osy x; tečky na otvoru jsou místa největšího napětí.

Na 60° šířky jsou délky na mapě dvojnásobné.

Zadání: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

Výsledek

$$k \approx 2$$

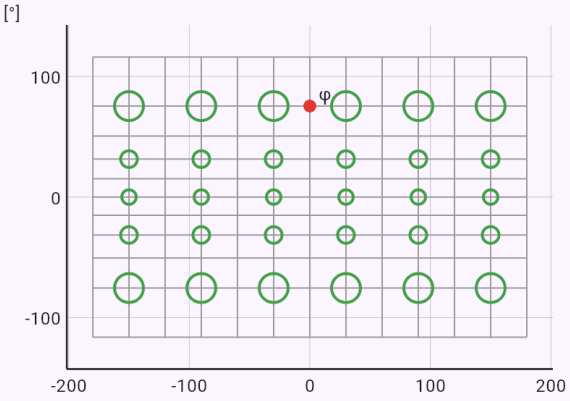
Postup

- Hledáme k; zadáno: $\varphi = 60\,^\circ$
- Vzdálenost rovnoběžky φ od rovníku na mapě šířky W a měřítko k = 1/cos φ. Tissotovy kroužky v grafu jsou na zeměkouli stejně velké. Rovnice modelu

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$

- Zobrazení je konformní, délky se zvětšují stejně ve všech směrech: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Měřítko na rovnoběžce φ: $k = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2, \quad k^2 = 4$
- Plochy se zvětšují s k², na 60° čtyřikrát. Póly na mapě nejsou, leží v nekonečnu.

Graf



Síť poledníků po 30° a rovnoběžek po 15°. Tissotovy kroužky jsou na zeměkouli stejně velké, na mapě rostou s 1/cos φ – tvar se zachová, plocha ne.

Praha – New York: ortodroma a delší loxodroma.

Zadání: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg]; lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

Výsledek

$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hledáme d; zadáno

$$\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$$

- Loxodroma mezi dvěma místy (zeměpisná šířka a délka, západ záporně): kurz, délka a srovnání s ortodromou – nejkratší cestou po hlavní kružnici. Rovnice modelu

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$

- Zobrazení je konformní, délky se zvětšují stejně ve všech směrech: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Na mapě je loxodroma přímka – kurz z rozdílu souřadnic

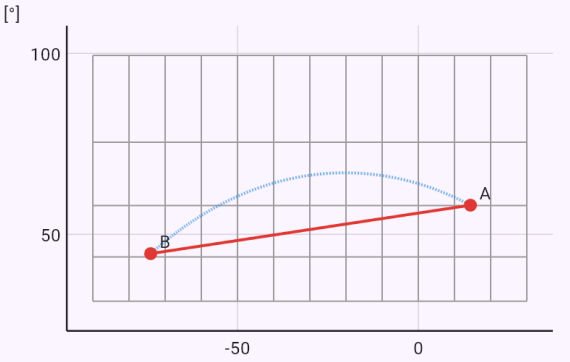
$$\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$$

- Délka loxodromy: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos\alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Ortodroma (nejkratší cesta po kouli)

$$d = 2R \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$$

- Loxodroma je delší než ortodroma, ale dá se plout se stálým kurzem. Letadla na dlouhých tratích letí po ortodromě a kurz průběžně mění.

Graf



Plná přímka je loxodroma (stálý kurz), čárkovaná křivka ortodroma (nejkratší cesta), obě v Mercatorově zobrazení.

Bezpečnost ve fázi smyčky se třemi setrvačnými členy.

Zadání: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s]; T2=1[s]; T3=1[s])`

Výsledek

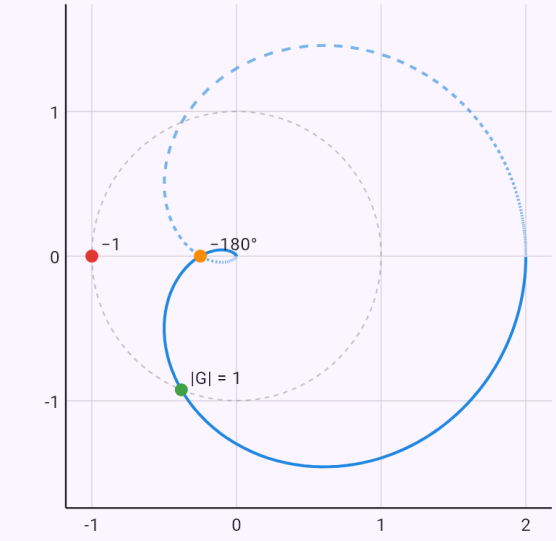
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

Postup

- Hledáme φ_m; zadáno:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- Nyquistovo kritérium plyne z argumentového principu: počet obtočení bodu −1 křivkou G(iω) je rozdíl počtu nestabilních pólů uzavřené a otevřené smyčky. Pro stabilní otevřenou smyčku nesmí křivka bod −1 obtočit. Jak daleko od něj zůstane, ukazují bezpečnost v zesílení a ve fázi. Rovnice modelu
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Argumentový princip: N obtočení bodu −1, Z nestabilních pólů uzavřené smyčky, P otevřené:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Frekvence, kde fáze dosáhne −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Bezpečnost v zesílení a kritické zesílení
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Frekvence, kde |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Bezpečnost ve fázi: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- Křivka bod −1 neobtáčí – uzavřená smyčka je stabilní:
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Obvyklý požadavek: bezpečnost v zesílení aspoň 6 dB a ve fázi 30–60°. Dopravní zpoždění fázi stále ubírá, proto je zpožděná soustava hůř regulovatelná.

Graf

Nyquistův diagram | Graf



Plná křivka je G(iω) pro ω > 0, čárkovaná její zrcadlový obraz pro záporné ω, čárkovaná kružnice |G| = 1. Uzavřená smyčka je stabilní, když křivka neobtáčí bod −1.

Geometrické místo kořenů s integrátorem: kritické zesílení 3.

Zadání: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one]; T1=1[s];`

`T2=0.5[s])`

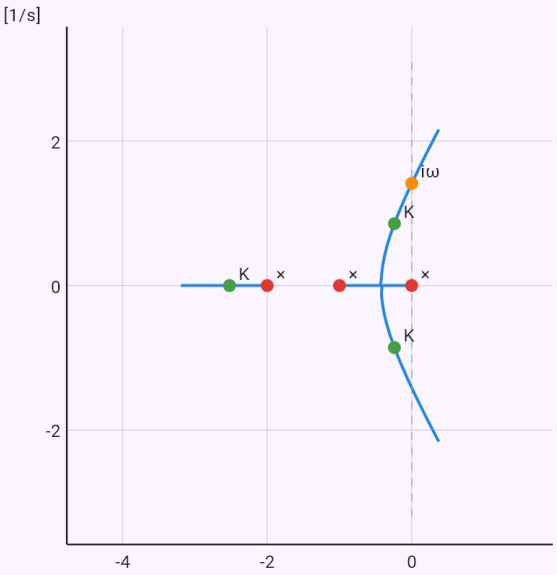
Výsledek

$$K_{krit} \approx 3$$

Postup

- Hledáme K_{krit}; zadáno:
  $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- Geometrické místo kořenů: jak se pohybují póly uzavřené smyčky, když zesílení K roste od nuly. Větve začínají v pólech otevřené smyčky, odcházejí po asymptotách a na imaginární ose přechází systém do nestability (kritické zesílení z Routhovy–Hurwitzovy podmínky). Rovnice modelu: $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Póly otevřené smyčky (začátky větví): $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Asymptoty větví: těžiště a úhly
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Bod rozvětvení na reálné ose:
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Průsečík s imaginární osou – mez stability
  $s = i\omega: \quad \text{Im}\, D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- Zadané zesílení je pod kritickým – stabilní:
  $K = 1 < K_{krit}$
- Póly uzavřené smyčky pro zadané K:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Graf



Větve ukazují póly uzavřené smyčky pro rostoucí K: začínají v pólech otevřené smyčky (×), body K jsou póly pro zadané zesílení, iω průsečík s imaginární osou.

Potřebný řád Čebyševova filtru pro útlum 40 dB o oktávu výš.

Zadání: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB];`

```
fs=2000[Hz]; As=40[dB])
```

Výsledek

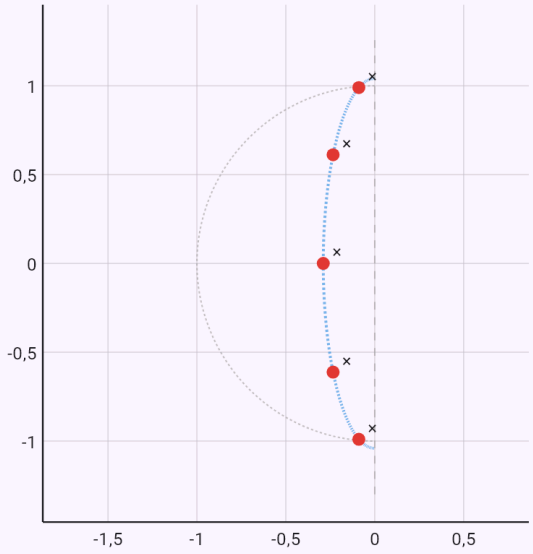
$$n \approx 5$$

Postup

- Hledáme n; zadáno
  $f_c = 1000\,\mathrm{Hz}, \quad A_p = 1\,\mathrm{dB}, \quad f_s = 2000\,\mathrm{Hz}, \quad A_s = 4($
- Čebyšev: v propustném pásmu zvlnění A_p, za to strmější přechod do nepropustného pásma než Butterworth stejného řádu. Rovnice modelu
  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$
- Parametr zvlnění: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10}-1} = 0{,}5088$
- Potřebný řád (zaokrouhlíme nahoru)
  $$n \geq \frac{\operatorname{argcosh}\sqrt{\frac{10^{A_s/10}-1}{10^{A_p/10}-1}}}{\operatorname{argcosh}(f_s/f_c)} = 4{,}536 \Rightarrow n = 5$$
- Póly na půlelipse
  $s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{argsinl}}{n}$
- Póly (vztažené k ω_c)
  $\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28($
- Přenos – všechny póly vlevo, filtr je stabilní
  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$
- Za strmost platí Čebyšev zvlněním a horším fázovým (skupinovým) zpožděním – hůř přenáší tvar pulzů.

Graf

Póly | Graf



Póly v komplexní rovině s (×), stabilní systém je má vlevo od imaginární osy.

Impulsní odezva číslicového filtru s komplexními póly přes rezidua.

Zadání: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Výsledek

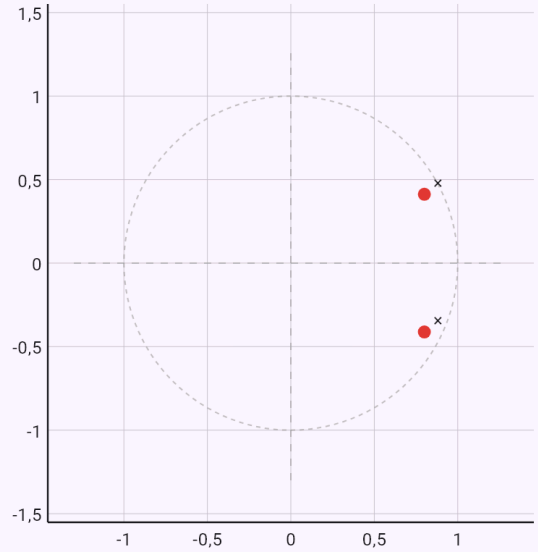
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Postup

- Hledáme $h[n]$; zadáno:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Číslicový filtr počítá výstup z několika posledních vzorků: y[n] = b₀x[n] + b₁x[n−1] + b₂x[n−2] − a₁y[n−1] − a₂y[n−2]. Jeho přenos je racionální funkce H(z) (Z-transformace). Filtr je stabilní, když všechny póly leží uvnitř jednotkové kružnice. Impulsní odezvu dá inverzní Z-transformace přes rezidua: h[n] = Σ Res[H(z)z^{n−1}]. Frekvenční charakteristika je H na jednotkové kružnici, z = e^(iΩ). Rovnice modelu
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Diferenční rovnice filtru:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Póly přenosu
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Póly uvnitř jednotkové kružnice – filtr je stabilní:
  $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Inverzní Z-transformace přes rezidua:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Komplexně sdružené póly dávají tlumený kmit
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \vartheta$
- Hodnota odezvy: $h[10] = -0{,}6596$

Graf

Póly a nuly | Graf



Póly (×) a nuly (○) přenosu v rovině z s jednotkovou kružnicí. Filtr je stabilní, když jsou všechny póly uvnitř.

Činitel jakosti oscilátoru z polohy pólů.

Zadání: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

```
b=2[kg_s])
```

Výsledek

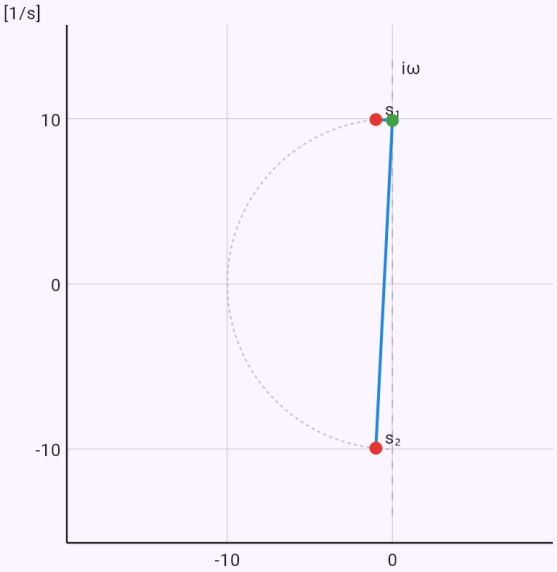
$$Q \approx 5$$

Postup

- Hledáme Q; zadáno:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Hmotnost na pružině s tlumením, buzená harmonickou silou. X/X_0 je amplituda proti výchylce při statickém zatížení stejnou silou. Rovnice modelu:
  $$H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$
- Póly přenosu
  $$s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$$
- Amplituda ze vzdáleností od pólů
  $$|H(i\omega)| = \frac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$$
- Vrchol rezonanční křivky
  $$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$$
- Činitel jakosti a šířka pásma
  $$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \frac{2\delta}{2\pi} = \frac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$$
- Blízko rezonance má křivka tvar Lorentzovy čáry
  $$\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$$
- Proto se stroje nesmí dlouho točit na vlastní frekvenci rámu a mosty se kontrolují na buzení chodci a větrem.

Graf

Póly | Graf



Póly v komplexní rovině s (×), stabilní systém je má vlevo od imaginární osy.

Index lomu pod rezonancí Lorentzova oscilátoru, kontrola Kramersovou–Kronigovou relací.

Zadání: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV]; E=1.5[eV])`

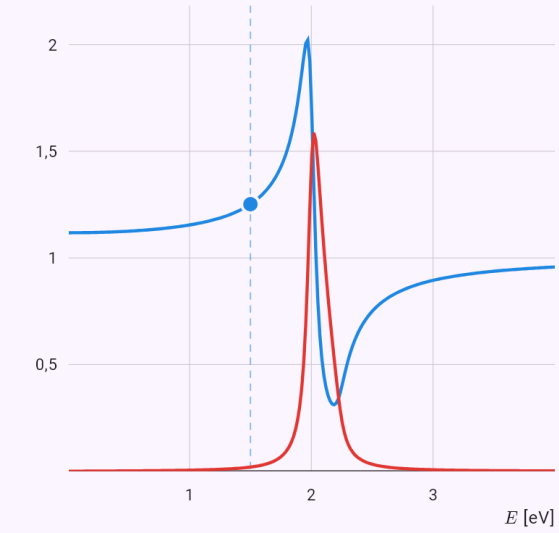
Výsledek

$$n \approx 1{,}252$$

Postup

- Hledáme n; zadáno
  $E_0 = 2\,\mathrm{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\mathrm{eV}, \quad E_p = 1\,\mathrm{eV}, \quad E = 1{,}5\,\mathrm{eV}$
- Index lomu n a extinkční koeficient κ z n + iκ = √(1 + χ). Energie fotonu E, rezonance E_0, šířka Γ a síla oscilátoru E_p v elektronvoltech. Rovnice modelu:
  $$\chi(E) = \frac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$$
- Póly susceptibility leží v dolní polorovině
  $$E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} - \frac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$$
- Kauzalita: Kramersova–Kronigova relace
  $$\mathrm{Im}\, E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty \frac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$$
- Susceptibilita při zadané energii: $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Kontrola: χ' z integrálu přes χ'' (numericky) a přímo:
  $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Komplexní index lomu:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Vlnová délka a koeficient absorpce
  $$\lambda = \frac{hc}{E} = 826{,}6\,\mathrm{nm}, \quad \alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\mathrm{m}^{-1}$$
- Pod rezonancí index lomu s energií roste – normální disperze, kterou hranol rozkládá světlo do barev.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Přirozená šířka sodíkové čáry D – asi 10 MHz.

Zadání: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

Výsledek

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$

Postup

- Hledáme $\Delta\nu$; zadáno: $\tau = 16\,\mathrm{ns}$
- Vybuzený atom vyzařuje vlnu, která exponenciálně slábne s dobou života τ. Její Fourierova transformace (reziduum v jednom pólu) dá Lorentzův tvar čáry s pološirkou Δν = 1/(2πτ) – přirozená šířka spektrální čáry. Rovnice modelu: $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Fourierova transformace tlumené vlny

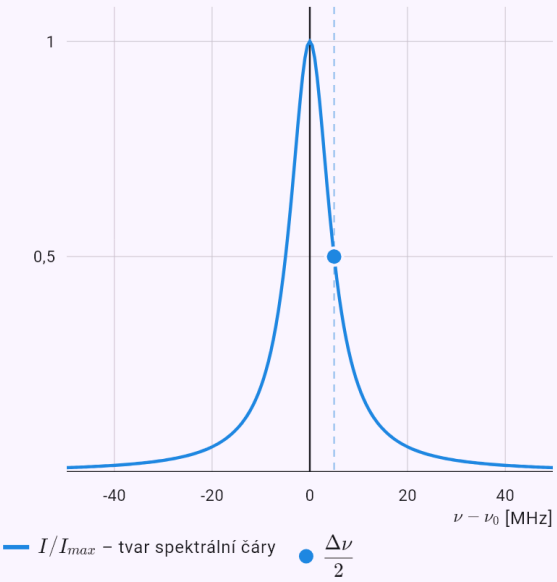
$$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$

- Lorentzův tvar čáry a její pološirka

$$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}: \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{}{2}$$

- Přirozená šířka čáry: $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot 16\,\mathrm{ns}} = 9{,}947\,\mathrm{MHz}$
- Sodíková čára D (τ ≈ 16 ns) má přirozenou šířku asi 10 MHz. Skutečné čáry v plynu rozšiřuje ještě Dopplerův jev a srážky.

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Přizpůsobení zátěže 100 Ω k vedení 50 Ω zkratovaným pahýlem.

Zadání: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

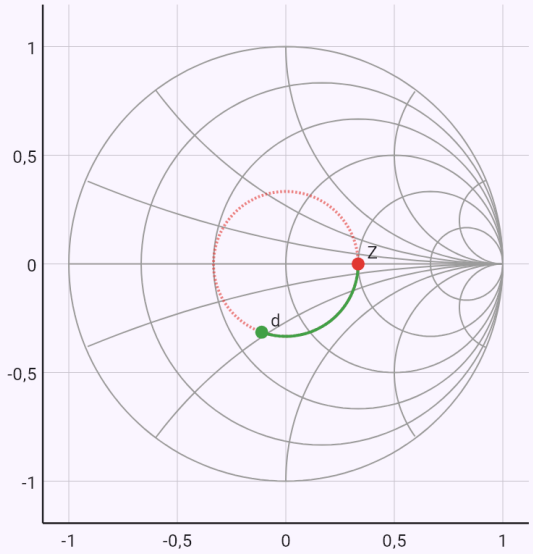
Výsledek

$$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$$
$$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hledáme d; zadáno
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- Činitel odrazu Γ = (Z − Z_0)/(Z + Z_0) na vedení s vlnovou impedancí Z_0 je Möbiova transformace. Zobrazí pravou polorovinu impedancí na jednotkový kruh – Smithův diagram. Pohyb po vedení k generátoru je otáčení po kružnici |Γ| = konst. ve směru hodinových ručiček, půl vlnové délky je celá otáčka. Odtud poměr stojatých vln, vstupní impedance vedení, čtvrtvlnný transformátor i přizpůsobení pahýlem. Rovnice modelu
  $$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{Z_L}{Z_0}$$
- Normovaná impedance zátěže: $z = \frac{100}{50} = 2$
- Činitel odrazu:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Poměr stojatých vln a útlum odrazu
  $$PSV = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$$
- Vlnová délka na vedení: $\lambda = \frac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Normovaná admitance zátěže: $y = \frac{1}{z} = 0{,}5$
- Místo, kde má admitance reálnou část 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Délka zkratovaného pahýlu, který vyruší susceptanci
  $y_s = -j\,\mathrm{cotg}\,\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \frac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arccotg}\,(0{,}7($
- Pahýl je kousek vedení zakončený zkratem, připojený paralelně. Na zvolené frekvenci pak vedení za ním nevidí žádný odraz.

Graf



Kružnice stálého odporu a oblouky stálé reaktance (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). Čárkovaná kružnice má poloměr |Γ| (stálý PSV), barevný oblouk je posun po vedení k generátoru.

Známá omezení

- Proudění je ideální: bez vazkosti, odtržení a úplavu. Odpor ani chování za velkých úhlů náběhu model nedá.
- Konformní zobrazení jsou jen pro uvedené tvary; obecný tvar vodičů nebo profilu (Schwarzova–Christoffelova transformace) zatím neumí.
- Přenos regulační smyčky má pevný tvar se třemi setrvačnými členy a nanejvýš dvěma integrátory; nuly v čitateli a nestabilní otevřenou smyčku zatím neumí.
- Číslicový filtr je 2. řádu, analogové filtry jen dolní propust.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace