Mathtrace – příručka

III. Matematická analýza

Obsah

III. Matematická analýza

25. Limity
26. Derivace
27. Průběh funkce
28. Funkce více proměnných
    - Mapa integrálních vět
    - Fyzikální aplikace integrálních vět
29. Taylorův polynom
30. Neurčitý integrál
    - Základní integrály a substituce
    - Per partes
    - Racionální funkce
    - Goniometrické funkce
    - Hyperbolické funkce
    - Odmocniny
31. Určitý integrál a jeho aplikace
    - Určitý integrál
    - Nevlastní integrál
    - Plocha pod křivkou a mezi křivkami
    - Délka křivky
    - Objem rotačního tělesa
    - Plášť rotačního tělesa
    - Aplikace s parametry
    - Těžiště
    - Křivky zadané parametricky a v polárních souřadnicích
    - Křivky zadané rovnicí
32. Nekonečné řady
    - Číselné řady

- Mocninné řady
- Taylorova řada

33. Fourierovy řady

25. Limity

Mathtrace spočítá limitu funkce jedné proměnné ve vlastním bodě, v nekonečnu i limitu jednostrannou a postupuje jako ve škole: nejdřív zkusí do funkce dosadit. Limitu posloupnosti ($n \to \infty$) spočítá stejně – i tvar 1^∞ nebo součet mocnin, ze kterého vytkne nejrychleji rostoucí člen.

Když dosazením vyjde neurčitý výraz ($0/0$, ∞/∞, …), zvolí úpravu podle tvaru funkce – rozklad a krácení, rozšíření sdruženým výrazem, vydělení nejvyšší mocninou, známou limitu ($\sin x / x$) nebo l'Hospitalovo pravidlo, i opakovaně. Mocninu, v jejímž základu i exponentu je proměnná (tvary 0^0, ∞^0, 1^∞), přepíše jako $e^{g \cdot \ln f}$ a limitu spočítá v exponentu; když je funkce definovaná jen na jedné straně bodu ($x^{\ln(x+1)}$ jen pro $x > 0$), spočítá limitu z té strany a řekne to. Čipem „L'Hospitalovo pravidlo“ zvolíte pravidlo rovnou; když dosazením neurčitý výraz nevyjde, postup vysvětlí, proč ho nelze použít.

Další písmena v zadání (k v $(1 + k/x)^x$) bere jako parametry – konstanty, se kterými počítá obecně; když výsledek platí jen pro kladné hodnoty parametru, řekne to. Písmeno může být i v bodě limity: $\lim (x^2 - a^2)/(x - a)$ pro $x \to a = 2a$. Graf u limity s parametrem nekreslí.

Nekonečnou limitu ani limitu, která neexistuje (jednostranné limity se liší), nevydá za číslo – řekne to slovy a ukáže jednostranné limity. K výsledku patří graf funkce v okolí bodu s vyznačenou hodnotou limity.

U limity posloupnosti kreslí graf jako body a_1, a_2, a_3, … místo spojité křivky.

Jak zadat

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Limita napsaná ručně: za slovem lim v závorce proměnná, šipka -> a bod, pak funkce.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Limita v nekonečnu: nekonečno se píše oo (minus nekonečno -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Jednostranná limita: za bodem + (zprava) nebo − (zleva).
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	Z fotky nebo v zápisu LaTeX, jak ho rozpozná fotoaparát.
`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	Limita posloupnosti v nekonečnu.

Ukázky

Neurčitý výraz 0/0 – čitatel rozložíme a zkrátíme.

Zadání: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

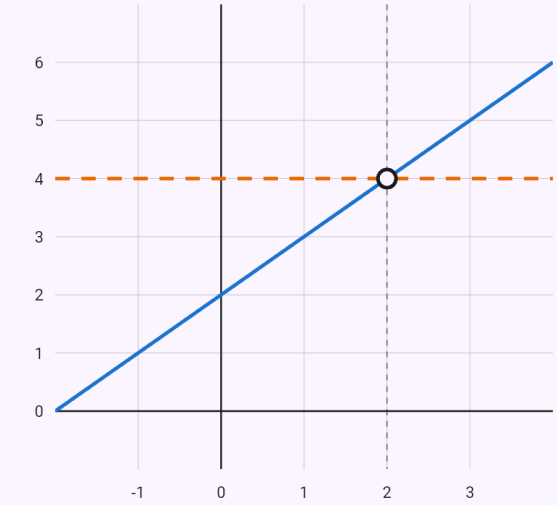
Výsledek

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- Upravíme a zkrátíme
  $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- Dosadíme: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Graf



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
$y = 4$

Limita:

○ $[2; 4]$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkovaně hodnota limity.

Limita v nekonečnu – čitatel i jmenovatel vydělíme nejvyšší mocninou.

Zadání: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Výsledek

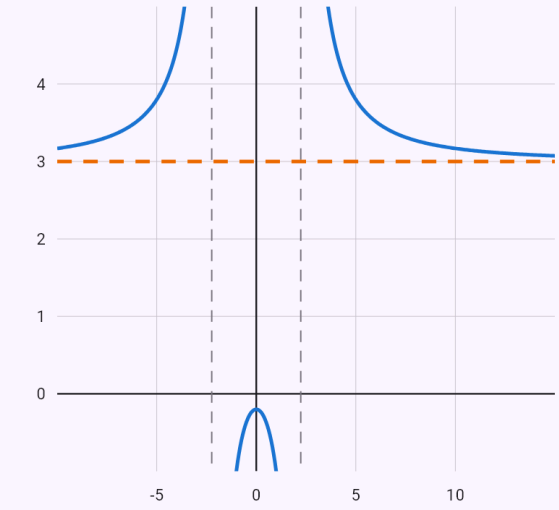
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ – výraz je potřeba upravit.
- Čitatel i jmenovatel vydělíme x^2 – členy typu c/xⁿ se blíží nule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Graf



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkovaně hodnota limity.

Známá limita sin x / x.

Zadání: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Výsledek

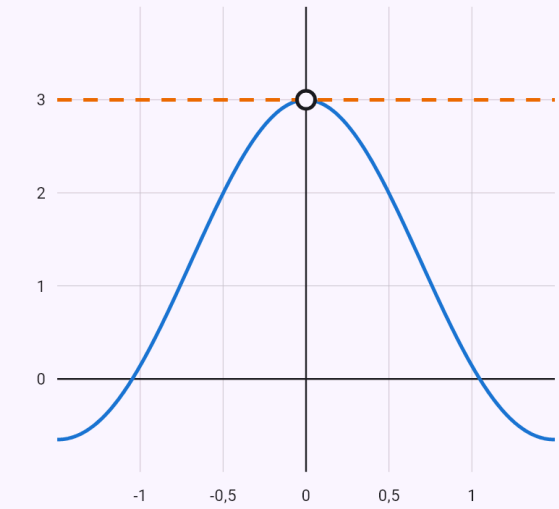
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- Použijeme známou limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Graf



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Limita:

○ $[0; 3]$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkovaně hodnota limity.

L'Hospitalovo pravidlo, použité dvakrát po sobě.

Zadání: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Výsledek

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitatel i jmenovatel

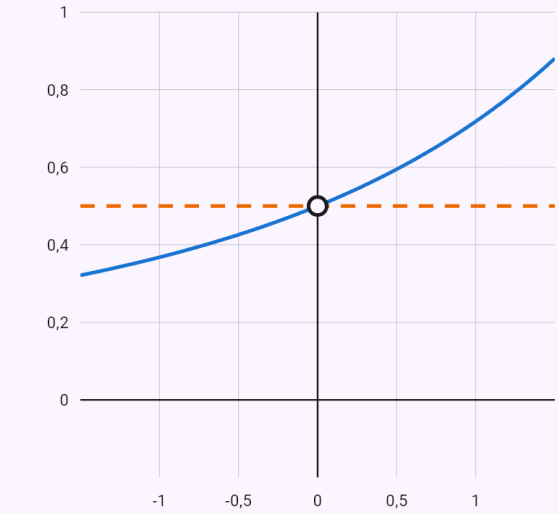
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitatel i jmenovatel

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Dosadíme: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Graf



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Limita:

- $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkovaně hodnota limity.

Neurčitý výraz 0^0 – mocninu přepíšeme jako e^(g·ln f); funkce je definovaná jen pro x > 0, proto limita

zprava.

Zadání: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Výsledek

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Postup

- Vlevo od bodu 0 funkce není definovaná, počítáme proto limitu zprava.
- Dosazením vychází neurčitý výraz 0^0 – výraz je potřeba upravit.
- Základ i exponent obsahují proměnnou – mocninu zapíšeme jako e na součin exponentu a logaritmu základu a limitu převedeme do exponentu

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$
- Dosazením vychází neurčitý výraz $0 \cdot \infty$ – výraz je potřeba upravit.
- Součin přepíšeme na podíl

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$
- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ – výraz je potřeba upravit.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitatel i jmenovatel

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$
- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- Činitel $x+1$ má v bodě limitu hodnotu 1 – vytkneme ho před limitu

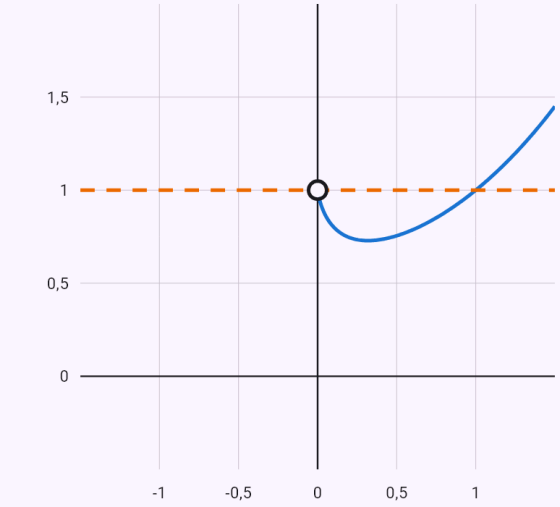
  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$
- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitatel i jmenovatel

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$

- Dosadíme

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$
- Limitu exponentu dosadíme zpět: $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$

Graf



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Limita:
○ $[0; 1]$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkovaně hodnota limity.

Jednostranné limity se liší – limita neexistuje.

Zadání: `lim(x->0) 1/x`

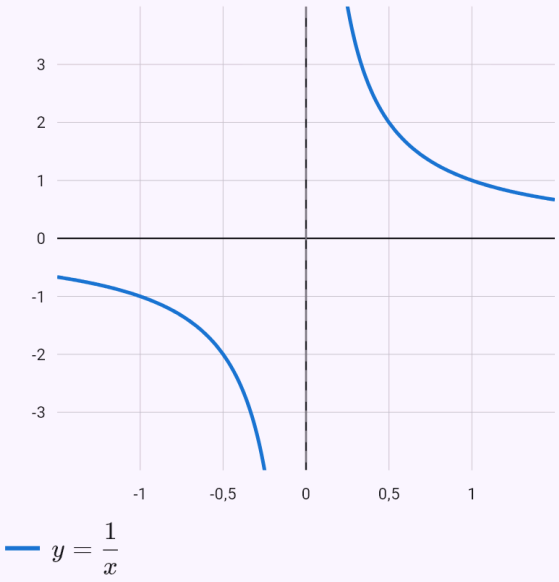
Výsledek

Limita neexistuje – jednostranné limity se liší.

Postup

- Dosazením vychází nenulové číslo dělené nulou – limita je nekonečná, znaménko určíme zvlášť zleva a zprava: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Jednostranné limity: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Graf



Limita posloupnosti – vytkneme nejrychleji rostoucí člen 9^n.

Zadání: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Výsledek

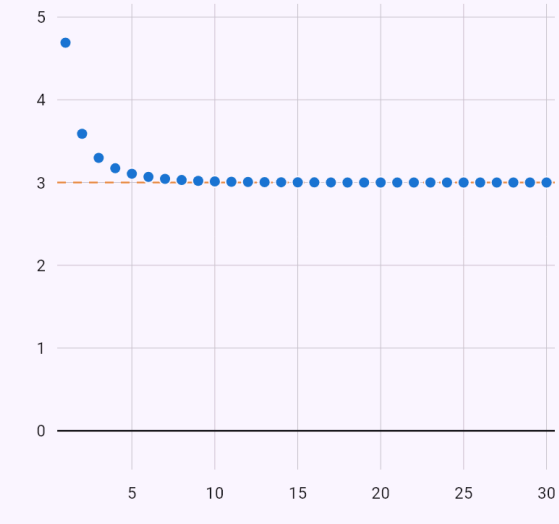
$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Postup

- Vytkneme nejrychleji rostoucí člen 9^n – podíly ostatních členů s ním jdou k nule

$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Graf



Body jsou členy posloupnosti a_n pro n = 1, 2, 3, … Má-li posloupnost limitu, členy se k ní (čárkovaně) blíží.

Limita s parametrem k – známá limita (1 + 1/x)^x = e dává e^k.

Zadání: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Výsledek

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Postup

- Písmena jiná než proměnnou jsou parametry – pevná čísla, se kterými počítáme jako s konstantami: k
- Dosazením vychází neurčitý výraz 1^{∞} – výraz je potřeba upravit.
- Základ zapíšeme jako $1+\frac{1}{t}$, kde t = $\frac{x}{k}$, a mocninu jako $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ umocněné na k. Výraz v hranaté závorce se blíží k e – je to známá limita $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Zbývá limita exponentu

  $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

26. Derivace

Aplikace derivuje podle pravidel – derivace součtu, konstanty, součinu, podílu i složené funkce – a u každého kroku řekne, které pravidlo použila. Umí i vyšší derivace a hodnotu derivace v bodě. Základní funkce (x^2, sin x, e^x, …) zderivuje i z definice jako limitu podílu diferencí. Výsledek doplní graf funkce a její derivace.

U funkce zadané implicitně rovnicí s x a y ($x^3 + y^3 = 3xy$) zderivuje obě strany podle x (y bere jako funkci x) a vyjádří y', nebo použije vzorec $y' = -F_x / F_y$; umí i y'' a v zadaném bodě tečnu a normálu, v grafu nakreslí křivku.

V singulárním bodě (křivka se kříží nebo má hrot) najde tečny z členů nejnižšího stupně rovnice – u Descartova listu v počátku x = 0 a y = 0.

Diferenciál funkce $df = f'(x)\,dx$, v bodě s krokem („diferenciál √x, x0 = 4, dx = 0.1“) i s přibližnou hodnotou $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$. Zápis „přibližně √4.1“ zvolí bod $x_0 = 4$, kde hodnotu známe přesně, a porovná odhad se skutečnou hodnotou.

Jak zadat

`(x^2 sin x)'`	Derivace apostrofem za závorkou.
`d/dx (e^x / x)`	Zápis d/dx, i z fotky (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Vyšší derivace více apostrofy, nebo řádem u čipu „Derivovat“.
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	Hodnota derivace v bodě, nebo vyplňte bod u čipu.
`x^2 sin x`	Výraz s čipem „Derivovat“ – tam vyberete i řád, bod a způsob (podle pravidel / z definice).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Rovnice s x a y – čip „Implicitní derivace“ (řád 1 nebo 2, postup, bod $[x_0; y_0]$) nebo „Graf křivky“; psaně diff(x^3+y^3=3xy, x).
`diferenciál √x, x0 = 4, dx = 0.1`	Diferenciál v bodě s krokem (bez bodu obecně: diferenciál x^2 sin x).
`přibližně √4.1`	Přibližný výpočet hodnoty pomocí diferenciálu.

Ukázky

Derivace součinu.

Zadání: `(x^2 sin x)'`

Výsledek

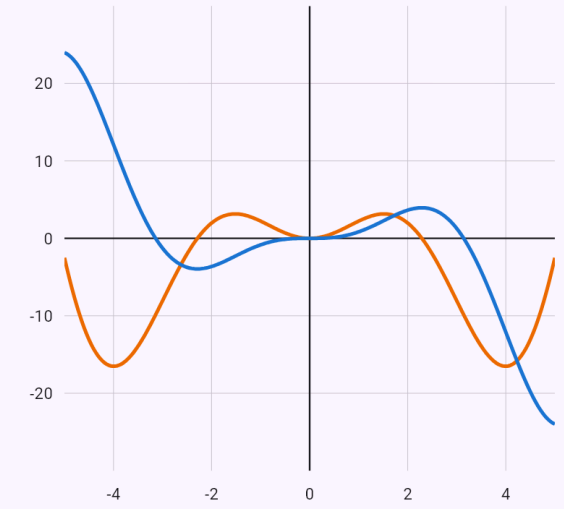
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Postup

- Derivace součinu (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Graf



Kde je derivace kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá. V nulových bodech derivace má funkce vodorovnou tečnu.

Derivace podílu.

Zadání: `d/dx (e^x / x)`

Výsledek

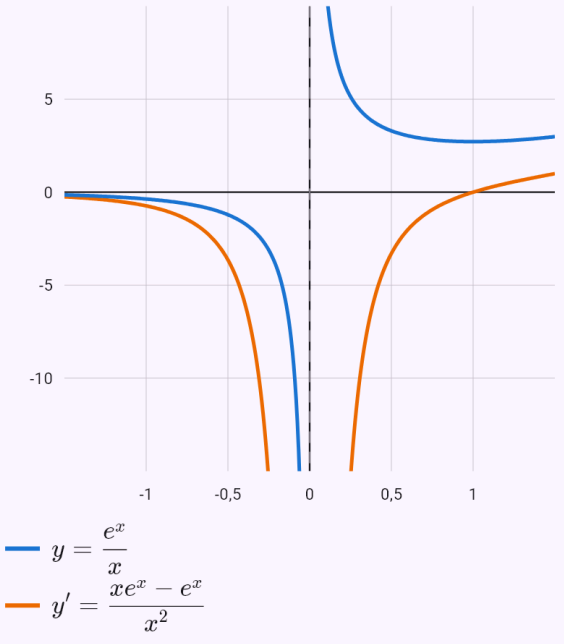
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Postup

- Derivace podílu (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Graf



Kde je derivace kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá. V nulových bodech derivace má funkce vodorovnou tečnu.

Druhá derivace.

Zadání: `(x^3 ln x)''`

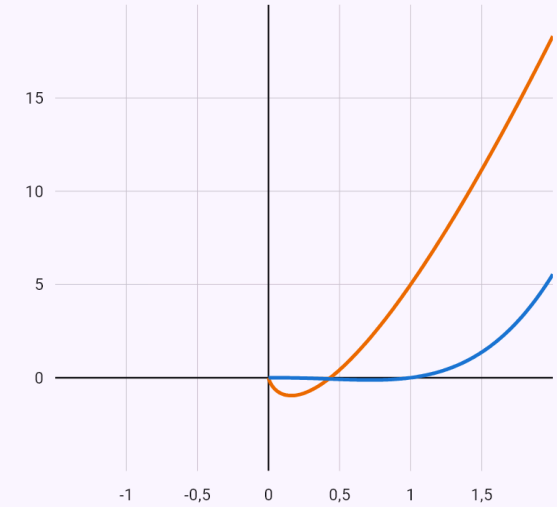
Výsledek

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Postup

- 1. derivace: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Derivace součinu (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- 2. derivace: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- Derivace součtu je součet derivací:
  $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Konstantu vytkneme před derivaci:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Derivace součinu (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Dosadíme:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Dosadíme: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Upravíme: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Graf



Kde je druhá derivace kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, je konkávní (prohnutá dolů).

Derivace z definice jako limita.

Zadání: `x^2` Derivovat → Z definice

Výsledek

$$y' = 2x$$

Postup

- Derivace z definice

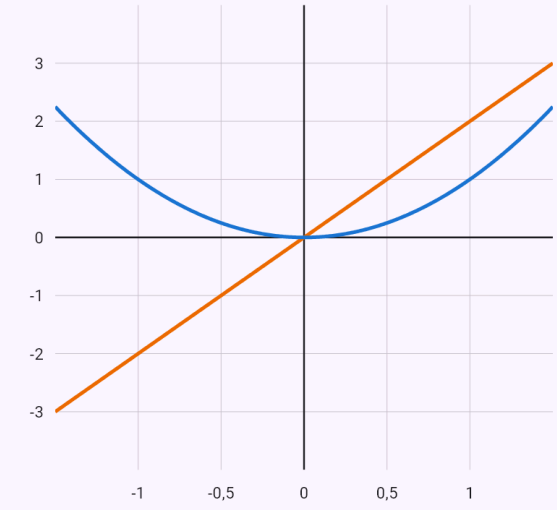
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- Upravíme a zkrátíme

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

- Dosadíme: $\lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

Graf



$y = x^2$
$y' = 2x$

Kde je derivace kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá. V nulových bodech derivace má funkce vodorovnou tečnu.

Implicitní derivace – Descartův list, tečna a normála v bodě [3/2; 3/2], druhá derivace.

Zadání: `x^3 + y^3 = 3xy` Implicitní derivace, řád 2, bod [3/2; 3/2]

Výsledek

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$\text{t: } y = 3 - x$$

$$\text{n: } y = x$$

$$y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$$

Podmínky: $y^2 - x \neq 0$

Postup

- Funkce y = y(x) je zadaná rovnicí $x^3 + y^3 = 3xy$ – obě strany zderivujeme podle x a y bereme jako funkci x (derivace složené funkce: např. (y³)' = 3y²·y').
- Derivujeme obě strany: $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Členy s y' převedeme na levou stranu, ostatní na pravou, a y' vytkneme: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- Vyjádříme y': $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- Druhá derivace – y' zderivujeme podle x znovu (y i y' jsou funkce x)

  $$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

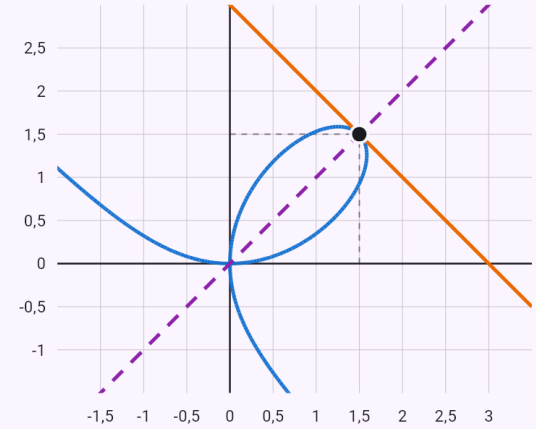
- Dosadíme za y'

  $$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$

- Na křivce platí $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – výraz se tím zjednoduší: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- Bod $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ leží na křivce: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}} = 0$
- Derivace v bodě $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – směrnice tečny: $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- Tečna: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- Normála je kolmá k tečně, má směrnici 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- Druhá derivace v bodě: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Graf



$x^3 + y^3 = 3xy$
t: $y = 3 - x$
n: $y = x$

Křivka zadaná rovnicí. V zadaném bodě je tečna (plnou čarou) a normála (čárkovaně).

Diferenciál √x v bodě 4 s krokem 0,1.

Zadání: `diferenciál √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Výsledek

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Postup

- Diferenciál funkce – lineární část jejího přírůstku:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- Diferenciál v bodě x_0 pro krok h
  $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\cdot h = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Přírůstek funkce nahradíme diferenciálem. Přesná hodnota je $2{,}0248457$, chyba odhadu $0{,}00015$
  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

Přibližná hodnota ∛27,1 pomocí diferenciálu.

Zadání: `přibližně \sqrt[3]{27.1}`

Výsledek

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Postup

- Číslo zapíšeme jako hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě blízko $x_0 = 27$, kde ji známe přesně; krok je $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- Diferenciál funkce – lineární část jejího přírůstku:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- Diferenciál v bodě x_0 pro krok h
  $\mathrm{d}f(27) = f'(27)\cdot h = \frac{1}{27}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Přírůstek funkce nahradíme diferenciálem. Přesná hodnota je $3{,}0036991$, chyba odhadu $0{,}0000046$
  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Průběh funkce

Průběh funkce aplikace vyšetří v obvyklém pořadí: definiční obor, sudost a lichost, průsečíky s osami, znaménko funkce, limity v krajních bodech definičního oboru a asymptoty, první derivace – monotonie a extrémy (i pomocí vyšších derivací), druhá derivace – konvexnost, konkávnost a inflexní body, nakonec obor hodnot. Vše shrne v přehledu a nakreslí graf s vyznačenými body.

U goniometrické funkce aplikace najde periodu, vyšetří funkci na jedné periodě a výsledky zapíše s periodou (maximum v $x = \pi/2 + 2k\pi$); má-li periodickou derivaci jen samotná derivace ($x + 2 \sin x$), opakují se s periodou extrémy a monotonie. Absolutní hodnoty odstraní podle znamének na intervalech a v hrotech porovná jednostranné derivace; kde je derivace nekonečná, ukáže svislou tečnu. Vnořené absolutní hodnoty a součty absolutních hodnot vyšetří po částech; kde je funkce na intervalu konstantní, uvede to i s hodnotou (minimum v každém bodě intervalu).

Absolutní (globální) extrémy na uzavřeném intervalu: „extrémy x^3 - 3x na ⟨-2; 3⟩“ – aplikace najde stacionární body a body bez derivace uvnitř intervalu a porovná funkční hodnoty v nich a v krajních bodech. Bez intervalu „extrémy …“ vyšetří průběh funkce. Inverzní funkci („inverzní funkce f(x) = …“) najde vyjádřením x z rovnice y = f(x) se zkouškou složením; graf ukáže f, f^{-1} a osu y = x.

Vrchol paraboly („vrchol paraboly y = x^2 - 4x + 7“, stačí i samotné y = …) najde doplněním na čtverec – s osou, oborem hodnot a posunutím grafu $y = ax^2$. Složenou funkci zapíšete s definicemi: „f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))“.

Graf posunutím, natažením a překlopením: „posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1“ – aplikace vyjde ze základní funkce (sin, cos, tg, cotg, e^x, a^x, ln, $\log_a$, odmocnina, mocnina, 1/x, |x|) a krok po kroku ji stlačí či roztáhne podél osy x, posune doprava či doleva, roztáhne podél osy y, překlopí a posune nahoru či dolů; umí i |f(x)| a f(|x|). V grafu je základní i výsledná funkce.

Jak zadat

`průběh y = x^3 - 3x`	Slovem „průběh“ před funkcí.
`x^3 - 3x`	Funkce s čipem „Průběh funkce“.
`extrémy x^3 - 3x na ⟨-2; 3⟩`	Absolutní extrémy na uzavřeném intervalu (i „max a min …, x ∈ ⟨a; b⟩“).
`inverzní funkce f(x) = (2x+1)/(x-3)`	Inverzní funkce (i „f^{-1}, f(x) = …“).

Ukázky

Polynom – extrémy a inflexní bod.

Zadání: `x^3 - 3x` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Průsečíky s osou x: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$

Rostoucí: $(-\infty;\ -1\rangle$, $\langle 1;\ \infty)$

Klesající: $\langle -1;\ 1\rangle$

Lokální maximum: $[-1;\ 2]$

Lokální minimum: $[1;\ -2]$

Konvexní: $\langle 0;\ \infty)$

Konkávní: $(-\infty;\ 0\rangle$

Inflexní body: $[0;\ 0]$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
- Průsečíky s osou x:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, tedy
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\ -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};\ 0)$	$(0;\ \sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  Funkce je kladná pro $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ \infty\right)$ a záporná pro $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$
- Limity v krajních bodech definičního oboru
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v ±∞ neexistuje:
  $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- První derivace: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- Stacionární body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

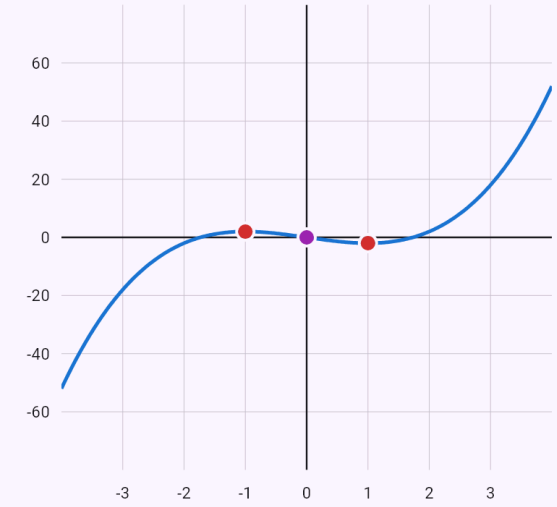
	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Funkce je rostoucí na $(-\infty;\ -1\rangle$, $\langle 1;\ \infty)$ a klesající na $\langle -1;\ 1\rangle$
- V bodě $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – lokální maximum.
- V bodě $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – lokální minimum.
- Lokální maximum $[-1;\ 2]$, lokální minimum $[1;\ -2]$
- Druhá derivace: $f''(x) = 6x$
- Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

  Funkce je konvexní na $\langle 0;\ \infty)$ a konkávní na $(-\infty;\ 0\rangle$
- V bodě $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – první nenulová derivace (od třetí) je lichého řádu, je tu inflexní bod.
- Inflexní body: $[0;\ 0]$
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \mathbb{R}$

Graf



$y = x^3 - 3x$

Významné body:

- maximum $[-1;2]$
- inflexe $[0;0]$
- minimum $[1;-2]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Lomená funkce – asymptoty.

Zadání: `x^2/(x - 1)` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Obor hodnot: $H(f) = (-\infty;\, 0\rangle \cup \langle 4;\, \infty)$

Sudost a lichost: ani sudá, ani lichá

Průsečíky s osou x: $[0;\ 0]$

Rostoucí: $(-\infty;\, 0\rangle,\ \langle 2;\, \infty)$

Klesající: $\langle 0;\, 1),\ (1;\, 2\rangle$

Lokální maximum: $[0;\ 0]$

Lokální minimum: $[2;\ 4]$

Konvexní: $(1;\, \infty)$

Konkávní: $(-\infty;\, 1)$

Asymptoty: $x = 1,\ y = x + 1$

Postup

- Definiční obor – podmínky $x \neq 1$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ není souměrný podle nuly – funkce není sudá ani lichá.
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\, 0)$	$(0;\, 1)$	$(1;\, \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

  Funkce je kladná pro $x \in (1;\, \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, 1)$

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty (limita je tam nekonečná): $x = 1$
- Asymptota se směrnicí v ±∞: $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – přímka $y = x + 1$
- První derivace

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Stacionární body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty;\, 0)$	$(0;\, 1)$	$(1;\, 2)$	$(2;\, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

  Funkce je rostoucí na $(-\infty;\, 0\rangle,\ \langle 2;\, \infty)$ a klesající na $\langle 0;\, 1),\ (1;\, 2\rangle$

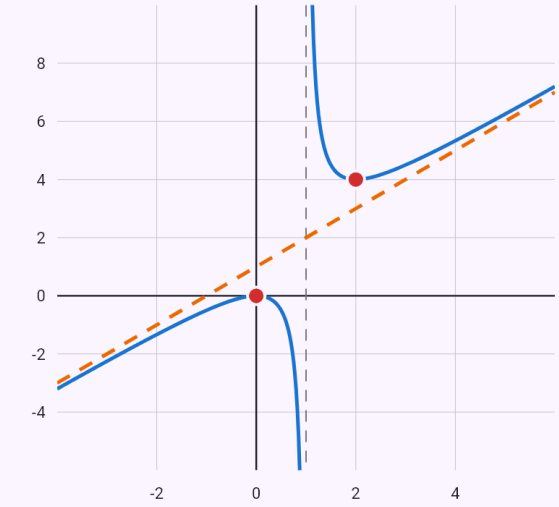
- V bodě $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokální maximum.
- V bodě $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – lokální minimum.
- Lokální maximum $[0;\ 0]$, lokální minimum $[2;\ 4]$
- Druhá derivace: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty;\, 1)$	$(1;\, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  Funkce je konvexní na $(1;\, \infty)$ a konkávní na $(-\infty;\, 1)$

- Funkce nemá inflexní body.
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = (-\infty;\, 0\rangle \cup \langle 4;\, \infty)$

Graf



$y = \frac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

Významné body:

● maximum $[0;0]$ ● minimum $[2;4]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Periodická funkce – vše na jedné periodě, výsledky s periodou.

Zadání: `sin 2x + 2cos x` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

Sudost a lichost: ani sudá, ani lichá

Perioda: $p = 2\pi$

Průsečíky s osou x: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Rostoucí: $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Klesající: $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Lokální maximum: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Lokální minimum: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Konvexní:
$\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right.$

Konkávní:
$\left\langle \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, \left\langle -\arcsin \right.$

Inflexní body:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Funkce je periodická s periodou 2π – vyšetříme ji na jedné periodě (od 0 do 2π) a výsledky zopakujeme s periodou, k $\in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – to není f(x) ani −f(x), funkce není sudá ani lichá.
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, tedy $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 2$, tedy $[0;\ 2]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f(x)$	+	−	+

  Funkce je kladná pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ a záporná pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
- Periodická funkce (která není konstantní) nemá limitu v ±∞.
- První derivace: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Stacionární body

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(0;\ \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

  Funkce je rostoucí na $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$ a klesající na $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$
- Lokální maximum $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, lokální minimum $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Druhá derivace: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Body podezřelé z inflexe

  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$

- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi+\arcsin(\frac{1}{4}))$	$(\pi+\arcsin(\frac{1}{4});\ \frac{3}{2}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Funkce je konvexní na a konkávní na

$$\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi \right\rangle,\ \left\langle \frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi \right.$$

$$\left\langle \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi \right\rangle,\ \left\langle -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \right.$$

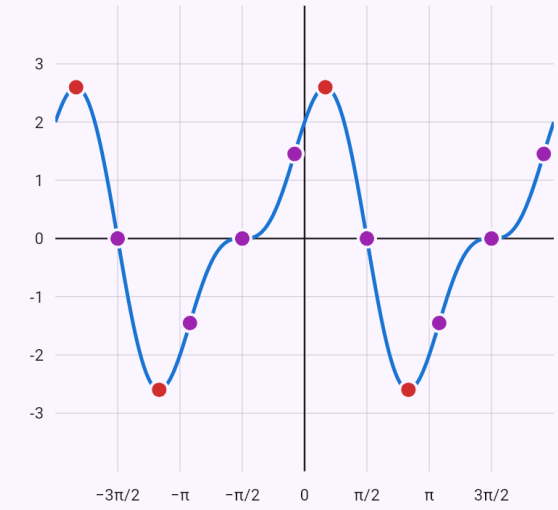
- Inflexní body

$$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],\ [2\pi$$

- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:

$$H(f)=\left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

Graf



$y=\sin 2x+2\cos x$

Významné body:

- maximum $\left[-\frac{11\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexe $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$
- minimum $\left[-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexe $\left[-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$
- inflexe $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$
- inflexe $\left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$
- maximum $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexe $\left[\frac{\pi}{2};\ 0\right]$
- minimum $\left[\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexe $\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$
- inflexe $\left[\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$
- inflexe $\left[2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Tangens – svislé asymptoty, obor hodnot $\mathbb{R}$.

Zadání: `tg x` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Perioda: $p = \pi$

Průsečíky s osou x: $[k\pi;\ 0]$

Rostoucí: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Konvexní: $\left\langle k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Konkávní: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi \right\rangle$

Inflexní body: $[k\pi;\ 0]$

Asymptoty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Postup

- Definiční obor – podmínky $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Funkce je periodická s periodou π – vyšetříme ji na jedné periodě (od 0 do π) a výsledky zopakujeme s periodou, k $\in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, tedy $[k\pi;\ 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$

  Funkce je kladná pro $x \in \left(k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ a záporná pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi \right)$
- Periodická funkce (která není konstantní) nemá limitu v $\pm\infty$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru

  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$

  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Svislé asymptoty (limita je tam nekonečná): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- První derivace: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

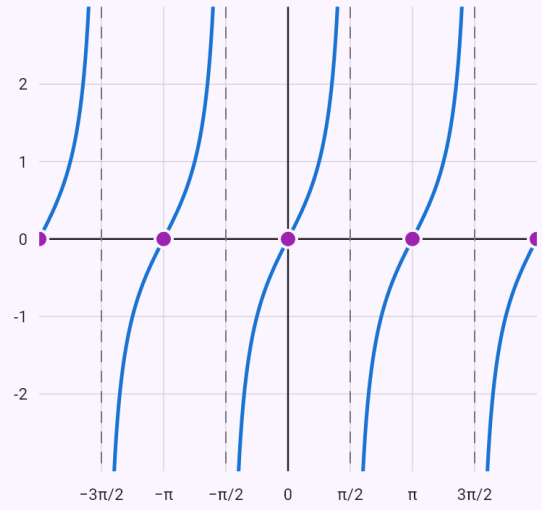
	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  Funkce je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$
- Funkce nemá lokální extrémy.
- Druhá derivace: $f''(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$
- Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  Funkce je konvexní na $\left\langle k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ a konkávní na $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi \right\rangle$
- Inflexní body: $[k\pi;\ 0]$
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \mathbb{R}$

Graf



$y = \operatorname{tg} x$

Významné body:

inflexe $[-2\pi; 0]$ inflexe $[-\pi; 0]$ inflexe $[0; 0]$ inflexe $[\pi; 0]$ inflexe $[2\pi; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Hyperbolický tangens – vodorovné asymptoty y = ±1.

Zadání: `tgh x` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = (-1;\ 1)$

Sudost a lichost: lichá

Průsečíky s osou x: $[0;\ 0]$

Rostoucí: $\mathbb{R}$

Konvexní: $(-\infty;\ 0\rangle$

Konkávní: $\langle 0;\ \infty)$

Inflexní body: $[0;\ 0]$

Asymptoty: $y = -1,\ y = 1$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
  $f(-x) = \operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x = -f(x)$
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  Funkce je kladná pro $x \in (0;\ \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty;\ 0)$
- Limity v krajních bodech definičního oboru
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$
- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v −∞: $k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – přímka $y = -1$
- Asymptota se směrnicí v +∞: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ – přímka $y = 1$
- První derivace: $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

  Funkce je rostoucí na $\mathbb{R}$
- Funkce nemá lokální extrémy.
- Druhá derivace: $f''(x) = -\frac{2\operatorname{tgh} x}{\cosh^2 x}$
- Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  Funkce je konvexní na $(-\infty;\ 0\rangle$ a konkávní na $\langle 0;\ \infty)$
- V bodě $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – první nenulová derivace (od třetí) je lichého řádu, je tu inflexní bod.
- Inflexní body: $[0;\ 0]$
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = (-1;\ 1)$

Periodická je jen derivace – hodnoty extrémů rostou s k.

Zadání: `x + 2sin x` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Perioda: $p = 2\pi$

Průsečíky s osou x: $[0;\ 0]$

Rostoucí: $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Klesající: $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Lokální maximum: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Lokální minimum: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Konvexní: $\langle \pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \rangle$

Konkávní: $\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle$

Inflexní body: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Funkce sama periodická není, ale její derivace ano (perioda 2π) – monotonie, extrémy a konvexnost se opakují s touto periodou, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Limity v krajních bodech definičního oboru

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

- První derivace: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Stacionární body

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(0;\ \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

  Funkce je rostoucí na $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$ a klesající na $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

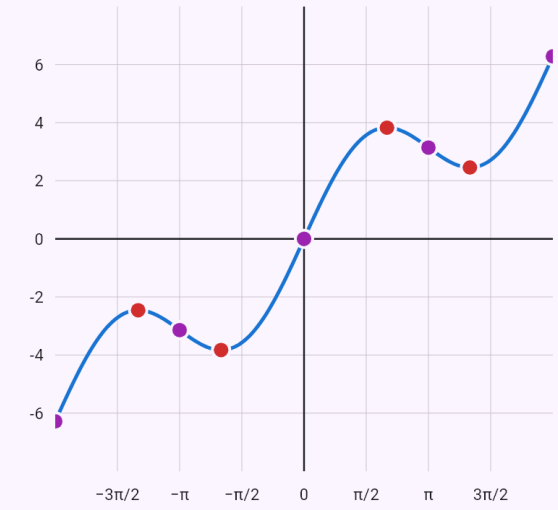
- Lokální maximum $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, lokální minimum $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Druhá derivace: $f''(x) = -2\sin x$
- Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(0;\ \pi)$	$(\pi;\ 2\pi)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

  Funkce je konvexní na $\langle \pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \rangle$ a konkávní na $\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle$

- Inflexní body: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Graf



$y = x + 2\sin x$

Významné body:

- inflexe $[-2\pi; -2\pi]$
- maximum $\left[-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right]$
- inflexe $[-\pi; -\pi]$
- minimum $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right]$
- inflexe $[0; 0]$
- maximum $\left[\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right]$
- inflexe $[\pi; \pi]$
- minimum $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$
- inflexe $[2\pi; 2\pi]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Absolutní hodnota – hroty, jednostranné derivace.

Zadání: `|x^2 - 1|` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \langle 0;\, \infty)$

Sudost a lichost: sudá

Průsečíky s osou x: $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$

Rostoucí: $\langle -1;\, 0\rangle,\ \langle 1;\, \infty)$

Klesající: $(-\infty;\, -1\rangle,\ \langle 0;\, 1\rangle$

Lokální maximum: $[0;\, 1]$

Lokální minimum: $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$

Konvexní: $(-\infty;\, -1\rangle,\ \langle 1;\, \infty)$

Konkávní: $\langle -1;\, 1\rangle$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Absolutní hodnoty odstraníme podle znamének jejich argumentů na jednotlivých intervalech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty;\, -1) \\ 1 - x^2, & x \in \langle -1;\, 1) \\ x^2 - 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

- – funkce je sudá (graf je souměrný podle osy y).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, tedy $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 1$, tedy $[0;\, 1]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\, -1)$	$(-1;\, 1)$	$(1;\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

Funkce je kladná pro $x \in (-\infty;\, -1) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, \infty)$ a záporná pro $x \in \emptyset$

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v −∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

- Asymptota se směrnicí v +∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

- První derivace

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Stacionární body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- V bodě $x = -1$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), graf tam má hrot.
- V bodě $x = 1$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), graf tam má hrot.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty;\, -1)$	$(-1;\, 0)$	$(0;\, 1)$	$(1;\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Funkce je rostoucí na $\langle -1;\, 0\rangle,\ \langle 1;\, \infty)$ a klesající na $(-\infty;\, -1\rangle,\ \langle 0;\, 1\rangle$

- V bodě $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokální maximum.
- Lokální maximum $[0;\ 1]$, lokální minimum $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Druhá derivace

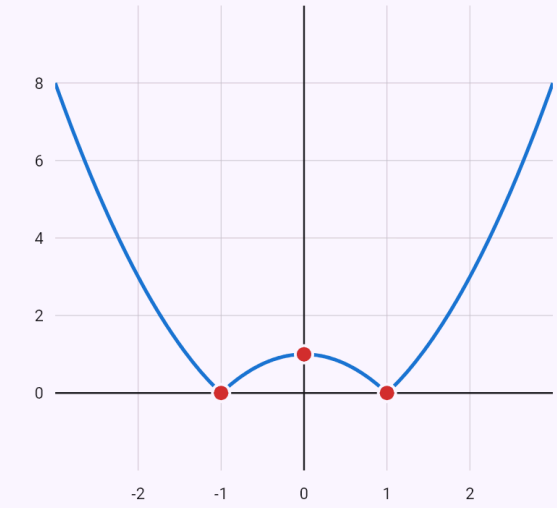
$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

  Funkce je konvexní na $(-\infty;\ -1\rangle,\ \langle 1;\ \infty)$ a konkávní na $\langle -1;\ 1\rangle$
- Funkce nemá inflexní body.
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \langle 0;\ \infty)$

Graf



$y = |x^2 - 1|$

Významné body:

- minimum $[-1; 0]$
- maximum $[0; 1]$
- minimum $[1; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Třetí odmocnina – svislá tečna v nule.

Zadání: `x^(1/3)` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Průsečíky s osou x: $[0;\ 0]$

Rostoucí: $\mathbb{R}$

Konvexní: $(-\infty;\ 0\rangle$

Konkávní: $\langle 0;\ \infty)$

Inflexní body: $[0;\ 0]$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0;\ 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  Funkce je kladná pro $x \in (0;\ \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty;\ 0)$

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v −∞ neexistuje:
  $k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, ale $q = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Asymptota se směrnicí v +∞ neexistuje:
  $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, ale $q = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- První derivace: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.
- V bodě $x = 0$ je derivace nekonečná ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) – graf tam má svislou tečnu.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  Funkce je rostoucí na $\mathbb{R}$

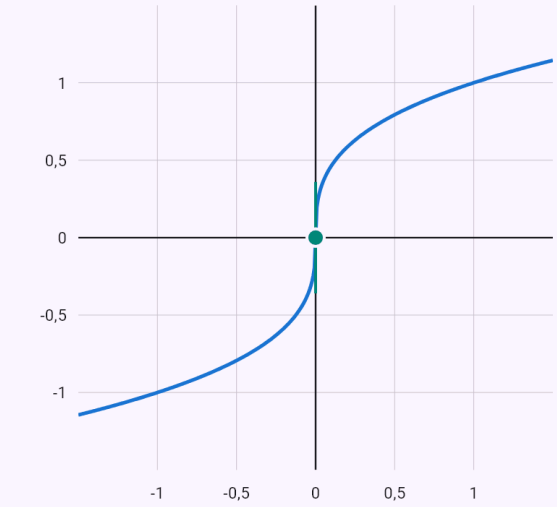
- Funkce nemá lokální extrémy.
- Druhá derivace: $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  Funkce je konvexní na $(-\infty;\ 0\rangle$ a konkávní na $\langle 0;\ \infty)$

- Inflexní body: $[0;\ 0]$
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \mathbb{R}$

Graf



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Významné body:

● inflexe $[0;0]$ ● svislá tečna $[0;0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Vnořená absolutní hodnota – po částech, sudá funkce.

Zadání: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \langle 0;\ \infty)$

Sudost a lichost: sudá

Průsečíky s osou x: $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$

Rostoucí: $\langle -3;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

Klesající: $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ 3\rangle$

Lokální maximum: $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$

Lokální minimum: $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$

Konvexní: $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

Konkávní: $\langle -3;\ 0\rangle,\ \langle 0;\ 3\rangle$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Absolutní hodnoty odstraníme podle znamének jejich argumentů na jednotlivých intervalech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty;\ -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in \langle -3;\ 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in \langle 0;\ 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in \langle 3;\ \infty) \end{cases}$$

- – funkce je sudá (graf je souměrný podle osy y).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, tedy $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 3$, tedy $[0;\ 3]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

Funkce je kladná pro $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ \infty)$ a záporná pro $x \in \emptyset$

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v -∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

- Asymptota se směrnicí v +∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

- První derivace

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+$$

- Stacionární body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- V bodě $x = -3$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), graf tam má hrot.
- V bodě $x = 0$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), graf tam má hrot.
- V bodě $x = 3$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), graf tam má hrot.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ -1)$	$(-1;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

Funkce je rostoucí na a klesající na

$\langle -3;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

$(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ 3\rangle$

- V bodě $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – lokální maximum.
- V bodě $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – lokální maximum.
- Lokální maximum $[-1;\ 4]$, $[1;\ 4]$, lokální minimum $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$, $[3;\ 0]$
- Druhá derivace

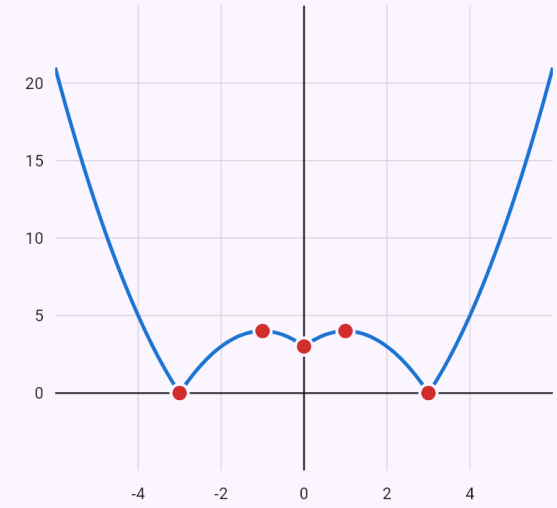
$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 0)$	$(0;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

  Funkce je konvexní na $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$ a konkávní na $\langle -3;\ 0\rangle,\ \langle 0;\ 3\rangle$
- Funkce nemá inflexní body.
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \langle 0;\ \infty)$

Graf



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Významné body:

- minimum $[-3; 0]$
- maximum $[-1; 4]$
- minimum $[0; 3]$
- maximum $[1; 4]$
- minimum $[3; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Součet absolutních hodnot – konstantní úsek a dvě šikmé asymptoty.

Zadání: `|x - 2| + |x + 3|` Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \langle 5;\ \infty)$

Sudost a lichost: ani sudá, ani lichá

Rostoucí: $\langle 2;\ \infty)$

Klesající: $(-\infty;\ -3\rangle$

Konstantní: $\langle -3;\ 2\rangle$

Lokální minimum: $f(x) = 5,\ x \in \langle -3;\ 2\rangle$

Asymptoty: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Absolutní hodnoty odstraníme podle znamének jejich argumentů na jednotlivých intervalech

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\ -3) \\ 5, & x \in \langle -3;\ 2) \\ 2x + 1, & x \in \langle 2;\ \infty) \end{cases}$$

- – to není f(x) ani −f(x), funkce není sudá ani lichá.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- Rovnice $f(x) = 0$ nemá řešení – graf osu x neprotíná.
- Průsečík s osou y: $f(0) = 5$, tedy $[0;\ 5]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty;\ \infty)$
$f(x)$	$+$

Funkce je kladná pro $x \in \mathbb{R}$ a záporná pro $x \in \emptyset$

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v −∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – přímka $y = -2x - 1$
- Asymptota se směrnicí v +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – přímka $y = 2x + 1$
- První derivace

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

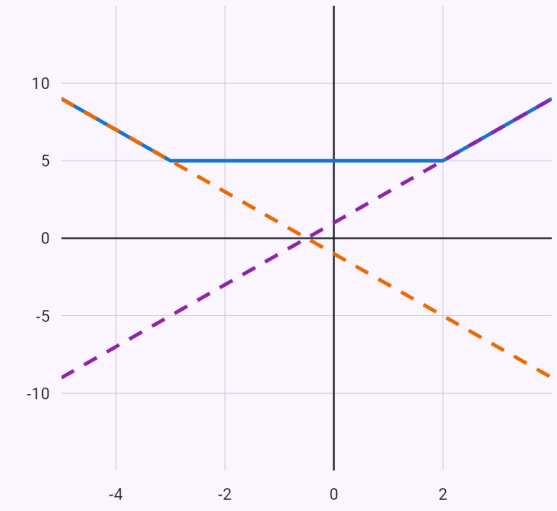
- Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.
- V bodě $x = -3$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), graf tam má hrot.
- V bodě $x = 2$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), graf tam má hrot.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 2)$	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

Funkce je rostoucí na $\langle 2;\ \infty)$ a klesající na $(-\infty;\ -3\rangle$. Na $\langle -3;\ 2\rangle$ je konstantní (f' = 0).

- Lokální minimum $f(x) = 5,\ x \in \langle -3;\ 2\rangle$, maximum funkce nemá.
- Druhá derivace: $f''(x) = 0$
- Druhá derivace je nulová – graf je část přímky, funkce není konvexní ani konkávní.
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \langle 5;\ \infty)$

Graf



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Absolutní extrémy na intervalu – stacionární body a krajní body.

Zadání: `extrémy x^3 - 3x na ⟨-2; 3⟩`

Výsledek

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

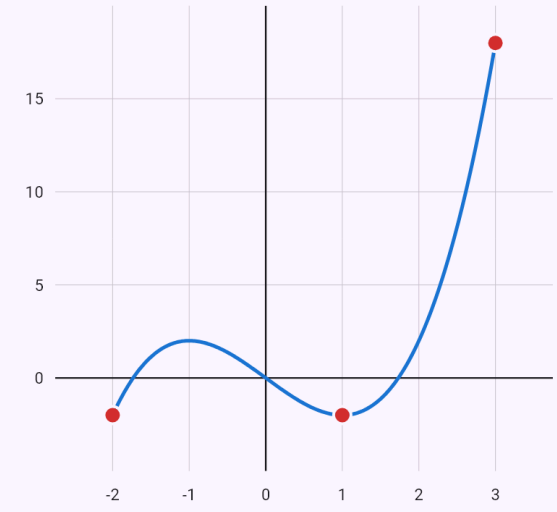
Postup

- Derivace funkce: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Stacionární body ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; všechny leží v intervalu $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu největší i nejmenší hodnoty (Weierstrassova věta) – ve stacionárním bodě, v bodě bez derivace nebo v krajním bodě. Porovnáme funkční hodnoty

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- Největší hodnota na intervalu $\langle -2;\ 3 \rangle$ je $f(3) = 18$, nejmenší $f(-2) = f(1) = -2$

Graf



$y = x^3 - 3x$

Významné body:

- maximum $[3; 18]$
- minimum $[-2; -2]$
- minimum $[1; -2]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Inverzní funkce lineární lomené funkce se zkouškou.

Zadání: `inverzní funkce f(x) = (2x+1)/(x-3)`

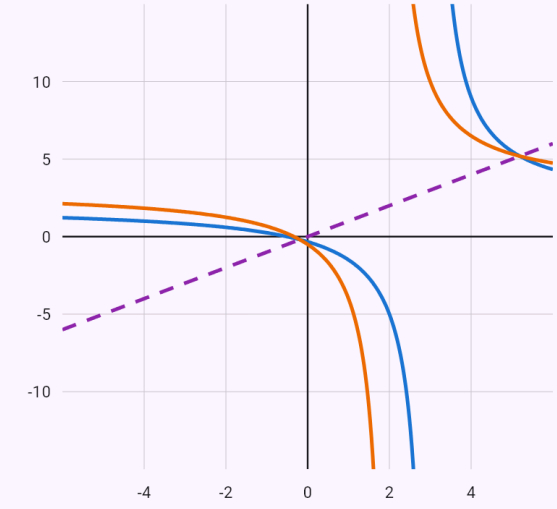
Výsledek

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Postup

- Funkce $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, podmínky definičního oboru: $x - 3 \neq 0$
- Rovnici $y = f(x)$ vyřešíme vzhledem k x: $y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$
- Zaměníme proměnné x a y: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Definiční obor inverzní funkce je obor hodnot f: $x - 2 \neq 0$
- Zkouška složením: $f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = x$ ✓

Graf



$y = \frac{2x+1}{x-3}$

f^{-1}

$y = x$

Graf inverzní funkce je souměrný s grafem f podle přímky y = x.

Vrchol paraboly doplněním na čtverec.

Zadání: `vrchol paraboly y = x^2 - 4x + 7`

Výsledek

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Postup

- Doplníme na čtverec: $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Vrchol $V = [2;\ 3]$, osa paraboly $x = 2$; parabola je otevřená nahoru, obor hodnot $H(f) = \langle 3; \infty)$
- Graf vznikne posunutím grafu $y = x^2$ o vektor $(2;\ 3)$

Graf sinusovky stlačením, posunutím a natažením.

Zadání: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

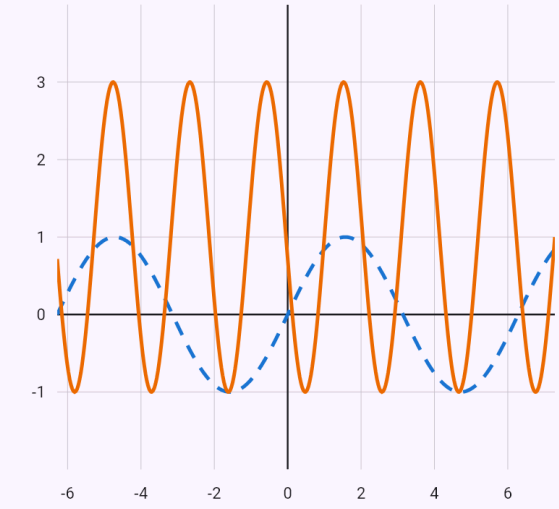
Výsledek

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

Postup

- Vyjdeme z grafu základní funkce $y = \sin x$
- Graf stlačíme ve směru osy x 3krát (k ose y): $y = \sin\left(3x\right)$
- Graf posuneme o 1 doprava ve směru osy x: $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- Graf roztáhneme ve směru osy y 2krát: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- Graf posuneme o 1 nahoru ve směru osy y: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Graf



$y = \sin x$

$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Čárkovaně graf základní funkce, plnou čarou výsledný graf.

Odmocnina posunutá a překlopená podle osy x.

Zadání: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

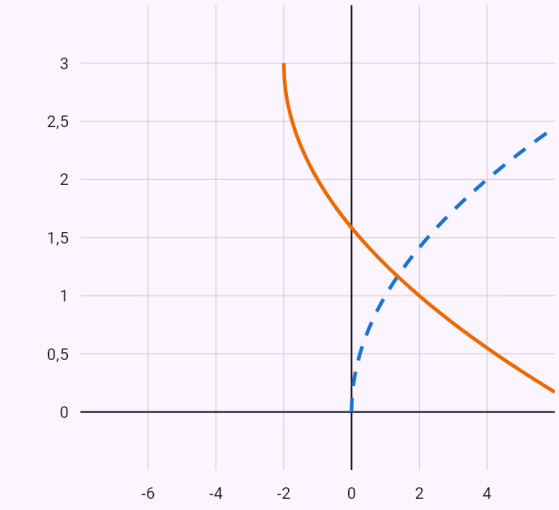
Výsledek

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

Postup

- Vyjdeme z grafu základní funkce $y = \sqrt{x}$
- Graf posuneme o 2 doleva ve směru osy x: $y = \sqrt{x+2}$
- Graf překlopíme podle osy x: $y = -\sqrt{x+2}$
- Graf posuneme o 3 nahoru ve směru osy y: $y = -\sqrt{x+2}+3$

Graf



$y = \sqrt{x}$
$y = -\sqrt{x+2}+3$

Čárkovaně graf základní funkce, plnou čarou výsledný graf.

Složená funkce f(g(x)).

Zadání: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Výsledek

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Postup

- Do vnější funkce f dosadíme za x vnitřní funkci g: $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Známá omezení

- Funkce, která ani nemá periodickou derivaci (x·sin x), se vyšetří jen numericky na intervalu ⟨−2π; 2π⟩ a bez periody; cyklometrické funkce (arcsin, arctg) zatím nevyšetříme.
- Absolutní extrémy jen na uzavřeném intervalu a u spojité funkce; inverzní funkce jen tam, kde ji jde vyjádřit vzorcem – u funkce, která není prostá (x²), inverzi na části definičního oboru zatím nehledá.

28. Funkce více proměnných

Parciální derivace (první i druhé, smíšené) a gradient funkce dvou nebo tří proměnných – při derivování podle jedné proměnné bere ostatní jako konstanty.

Lokální extrémy funkce dvou proměnných: stacionární body ze soustavy f_x = 0, f_y = 0 a o každém rozhodne determinant Hessovy matice D = f_xx·f_yy − f_xy² (minimum, maximum, sedlo). Vázané extrémy s jednou vazbou („extrémy xy, x + y = 1“) Lagrangeovou metodou a ohraničeným Hessiánem.

Derivace ve směru (gradient krát jednotkový vektor), totální diferenciál s přibližnou hodnotou a tečná rovina plochy. Dvojný integrál se zadává postupnými mezemi nebo oblastí z nerovnic; aplikace oblast rozdělí na normální části, ukáže vnitřní i vnější integrál a nakreslí oblast; přepínač 3D ukáže plochu integrandu nad ní. Čipy pod výsledkem mění pořadí integrace a přepínají na polární souřadnice.

Vektorová analýza: divergence, rotace (u rovinného pole jediné číslo ∂Q/∂x − ∂P/∂y), Laplaceův operátor a potenciál konzervativního pole – aplikace nejdřív ověří nulovou rotaci, pak φ najde postupnou integrací složek a udělá zkoušku ∇φ = F. Pole se zadává jako vektor (P; Q; R) nebo (P; Q), i s jednotkovými vektory i, j, k nebo pojmenované „F = …“ na zvláštním řádku. U rovinného pole graf ukáže šipky pole a vrstevnice potenciálu. Čipy pod výsledkem přepínají mezi divergencí, rotací a potenciálem téhož pole.

Křivkové integrály: 1. druhu ∫_C f ds (délka křivky, hmotnost drátu) a 2. druhu ∫_C F·dr (práce síly, cirkulace ∮ po uzavřené křivce). Křivka se zadá parametrizací r(t) nebo předvolbou – úsečka, kružnice, graf y = f(x), lomená čára; v postupu je tečný vektor, dosazení do pole a integrál podle t. U konzervativního pole aplikace výsledek ověří potenciálem φ(B) − φ(A) (nezávislost na cestě), u uzavřené rovinné křivky (kružnice, elipsa, konvexní mnohoúhelník) Greenovou větou – spočítá i dvojný integrál přes oblast uvnitř. Čipy pod výsledkem přepínají, který způsob je hlavní. Formulář „Křivkový integrál“ (sekce „Aplikace“, obor Vícerozměrná analýza) nabízí předvolby křivky; graf ukáže křivku s orientací nad šipkami pole a oblastí z Greenovy věty, prostorovou křivku ve 3D, otočnou prstem.

Trojné integrály: postupnými mezemi, přes těleso z nerovnic (∭_V, i z fotky) nebo formulářem „Trojný integrál“ (sekce „Aplikace“, obor Vícerozměrná analýza) s předvolbami kvádr, koule, válec, kužel, těleso mezi grafy a nerovnice. Aplikace těleso popíše jako normální oblast – nejvnitřnější proměnná mezi dvěma plochami nad průmětem – a spočítá tři integrály po sobě (Fubiniho věta). V cylindrických a sférických souřadnicích ukáže dosazení s Jakobiánem (r, ρ² sin θ) a meze v nových proměnných; když kartézsky přesný výsledek nevyjde, přejde na ně sama a u koule, válce nebo x² + y² v zadání je čipem nabídne. Formulář spočítá i objem, hmotnost s hustotou ρ, těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose. Těleso ukáže otočný 3D graf.

Písmena kromě x, y, z (poloměr r, výška h, hrany a, b, c) jsou kladné parametry: výsledek je vzorec, třeba V = 4/3 πr³ pro kouli ball(r) – cylindrická souřadnice se vedle poloměru r píše ϱ – nebo V = abc pro kvádr. Aplikace vzorec ověří numericky pro několik hodnot parametrů; 3D obrázek tělesa kreslí pro hodnotu 1.

Plošné integrály: 1. druhu ∬_S f dS (obsah plochy, hmotnost skořepiny) a 2. druhu – tok ∬_S F·n dS. Plocha se zadá předvolbou – graf z = g(x, y) nad oblastí D, sféra, polosféra, válec, kužel (celý povrch s podstavami, nebo jen plášť) – nebo parametrizací r(u, v). V postupu jsou tečné vektory r_u, r_v, normálový vektor r_u × r_v s orientací (u uzavřené plochy ven, u grafu nahoru, jinak podle parametrizace; zápisem outward, inward, up, down), plošný element a dvojný integrál přes parametry; uzavřenou plochu sečte po částech. Tok uzavřenou plochou aplikace ověří Gaussovou větou (trojný integrál divergence), tok rotace Stokesovou větou – křivkovým integrálem po hranici; čipy pod výsledkem přepínají, který způsob je hlavní. Formulář „Plošný integrál“ (sekce „Aplikace“, obor Vícerozměrná analýza) nabízí předvolby plochy; otočný 3D graf ukáže plochu s normálami, šipkami pole a hranicí.

Drát a skořepina: formuláře křivkového a plošného integrálu (volba „Co spočítat“) i zápis quantity=mass / centroid / inertia spočítají hmotnost drátu nebo skořepiny s hustotou f (prázdná = 1), těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose (axis=x, y, z). Planimetr lineint(area; C) spočítá obsah oblasti uvnitř uzavřené rovinné křivky jako ½∮ x dy − y dx a ověří ho Greenovou větou.

Jak zadat

`parciální derivace x^2 y + y^3`	Všechny první parciální derivace (s „druhé“ i druhé).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Jedna parciální derivace (i \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	Gradient.
`extrémy x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Lokální extrémy funkce dvou proměnných.
`extrémy xy, x + y = 1`	Vázané extrémy – funkce a za čárkou vazba.
`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Derivace ve směru: funkce, bod, směr (i slovy „derivace ve směru“).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Totální diferenciál; bod a přírůstky h jsou nepovinné (i slovy „totální diferenciál“).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Tečná rovina v bodě, plocha z = f(x, y) nebo F(x, y, z) = 0 (i slovy „tečná rovina“).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Dvojný integrál postupnými mezemi (i \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Dvojný integrál přes oblast z nerovnic (i \iint_D ..., D: ...); můžete přidat order=dxdy nebo polar.

`div(x y; y z; z x)`	Divergence pole (i ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, slovy „divergence“).
`∇×(y z; x z; x y)`	Rotace (i rot, curl, \nabla \times, slovy „rotace“); u pole (P; Q) jediné číslo.
`Δ(x^2 y + y^3)`	Laplaceův operátor funkce dvou nebo tří proměnných (i laplace(...), ∇², \Delta).
`potenciál (2x + y; x + 2y)`	Potenciál konzervativního pole (i potential(...)); pole může být pojmenované: „div F, F = (y; x; 0)“.
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Křivkový integrál – pole (P; Q) nebo funkce f, pak křivka: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); i cw (po směru hodinových ručiček), method=green / method=potential (i slovy „křivkový integrál … po …“). Za křivkou může být quantity=mass / centroid / inertia (s axis=…); místo funkce area spočítá obsah uvnitř uzavřené křivky.
`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	Hmotnost drátu s hustotou f, quantity=centroid jeho těžiště, quantity=inertia moment setrvačnosti (axis=x, y, z).
`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	Planimetr – obsah oblasti uvnitř uzavřené rovinné křivky z integrálu po hranici (Greenova věta).
`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	Z fotky ∮_C nebo ∫_C s P dx + Q dy, F·dr nebo f ds; křivka za čárkou nebo na dalším řádku (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Integrál 1. druhu – křivka parametricky s rozsahem parametru (i t ∈ [a, b]).

`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Trojný integrál – funkce, pak těleso nerovnicemi nebo předvolbou ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); souřadnice cart, cyl, sph, pořadí order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (i axis=x). Slovy „trojný integrál z přes V: …“, „objem tělesa …“, „hmotnost tělesa … s hustotou …“, „těžiště tělesa …“, „moment setrvačnosti tělesa … vzhledem k ose z“.
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	Z fotky ∭ (\iiint_V) s dV nebo dx dy dz; těleso za čárkou (V: …) nebo pod integrálem.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Postupnými mezemi – tři integrály za sebou, diferenciály na konci nebo hned za svým integrálem.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Plošný integrál – funkce f, pole (P; Q; R) nebo curl(P; Q; R), pak plocha: graph(z = …; nerovnice D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (jen plášť), closed (polosféra s podstavou), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. Slovy „plošný integrál … přes …“, „tok pole … plochou …“. U funkce f i quantity=mass / centroid / inertia (s axis=…).
`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	Z fotky ∬_S nebo ∯_S s f dS, F·dS nebo F·n dS; plocha za čárkou nebo na dalším řádku: S: x² + y² + z² = R² (se z ≥ 0 polosféra), x² + y² = R² s mezemi z (plášť válce), z = g(x, y) s nerovnicemi, r(u, v) s rozsahy parametrů.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	Tok rotace (∇ × F, rot F, curl F) – pole pojmenované zvlášť; kontrola Stokesovou větou.
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	Hmotnost, těžiště nebo moment setrvačnosti skořepiny s plošnou hustotou f.

Ukázky

Druhé parciální derivace, i smíšená.

Zadání: `druhé parciální derivace x^2 y + y^3`

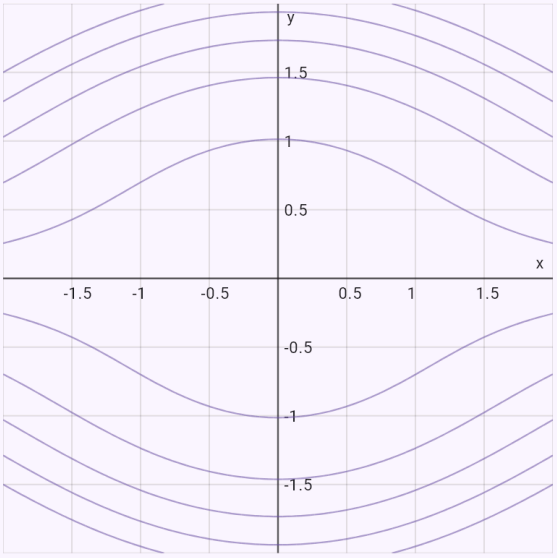
Výsledek

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Postup

- Parciální derivace podle x – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- Parciální derivace podle y – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- Parciální derivace podle xx – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- Parciální derivace podle xy – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- Parciální derivace podle yy – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Graf



Vrstevnice funkce f.

Lokální extrémy – sedlový bod a minimum.

Zadání: `extrémy x^3 - 3xy + y^3`

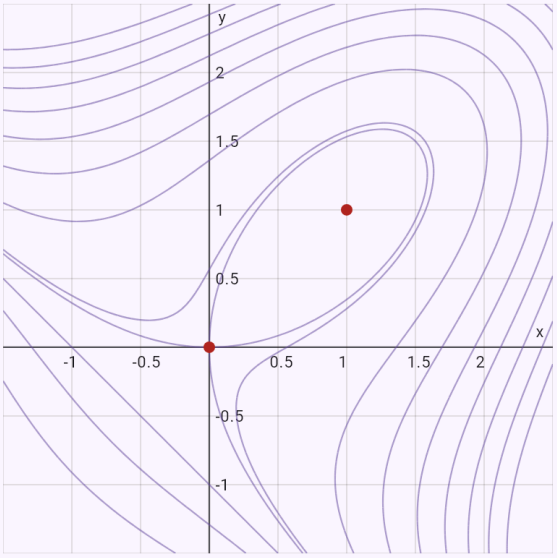
Výsledek

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Postup

- Parciální derivace podle x – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- Parciální derivace podle y – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Stacionární body $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ jsou řešením soustavy, v níž jsou obě parciální derivace nulové
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Druhé parciální derivace $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ a determinant Hessovy matice
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- V bodě $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – sedlový bod, extrém tam není $(f(0;\ 0) = 0)$.
- V bodě $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ a $f_{xx} = 6 > 0$ – lokální minimum $f(1;\ 1) = -1$

Graf



Vrstevnice funkce f.

Vázaný extrém Lagrangeovou metodou.

Zadání: `extrémy xy, x + y = 1`

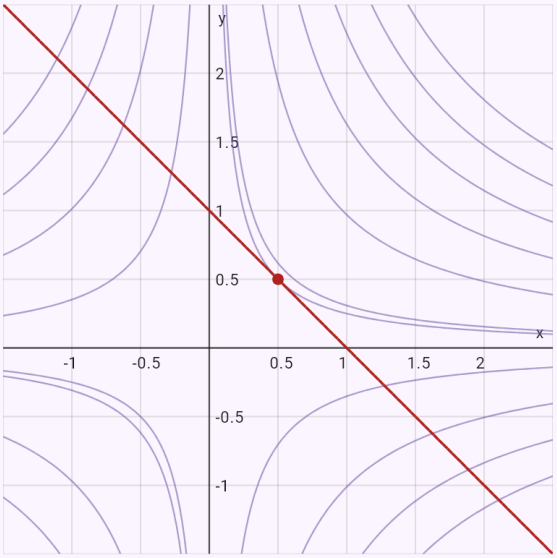
Výsledek

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Postup

- Lagrangeova funkce s multiplikátorem λ:
  $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Její parciální derivace jsou nulové a platí vazba
  $$L_x = y - \lambda = 0$$
  $$L_y = x - \lambda = 0$$
  $$x + y - 1 = 0$$
- Body podezřelé z vázaného extrému (řešení soustavy):
  $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- V bodě $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ ($\lambda = \frac{1}{2}$) vychází ohraničený Hessián kladný – vázané lokální maximum $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $$\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Graf



Vrstevnice funkce f.

Derivace ve směru a největší růst.

Zadání: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

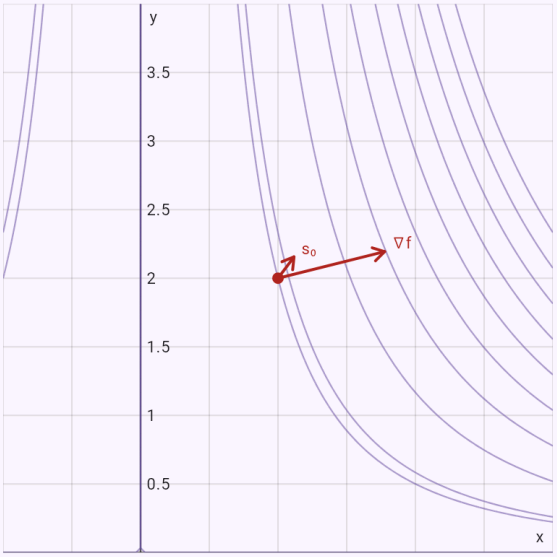
Výsledek

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Postup

- Parciální derivace podle x – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_x = 2xy$
- Parciální derivace podle y – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_y = x^2$
- Směr převedeme na jednotkový vektor:
  $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- Gradient v bodě $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- Derivace ve směru je skalární součin gradientu a jednotkového vektoru
  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$
- Největší růst je ve směru gradientu a má velikost
  $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Graf



Vrstevnice funkce f. Šipka ∇f míří ve směru největšího růstu.

Tečná rovina paraboloidu.

Zadání: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

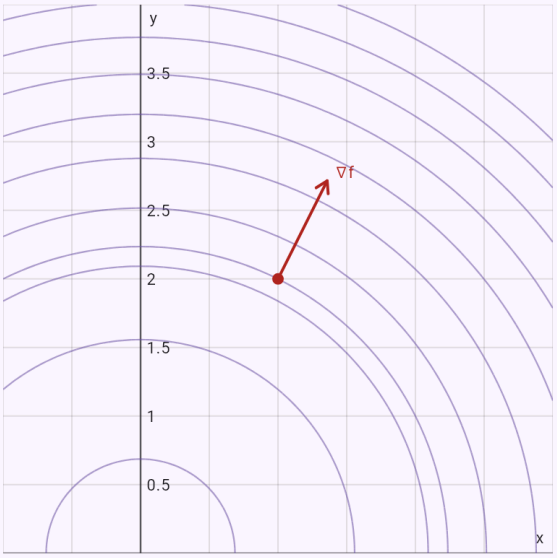
Výsledek

$$z = 2x + 4y - 5$$

Postup

- Parciální derivace podle x – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_x = 2x$
- Parciální derivace podle y – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $f_y = 2y$
- Dopočítáme třetí souřadnici bodu dotyku: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Dosadíme do rovnice tečné roviny z − z_0 = f_x·(x − x_0) + f_y·(y − y_0): $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- Normálový vektor roviny: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Graf



Vrstevnice funkce f. Šipka ∇f míří ve směru největšího růstu.

Dvojný integrál přes trojúhelník.

Zadání: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Výsledek

$$\frac{1}{8}$$

Pořadí integrace:

✓ dy dx | dx dy

Souřadnice:

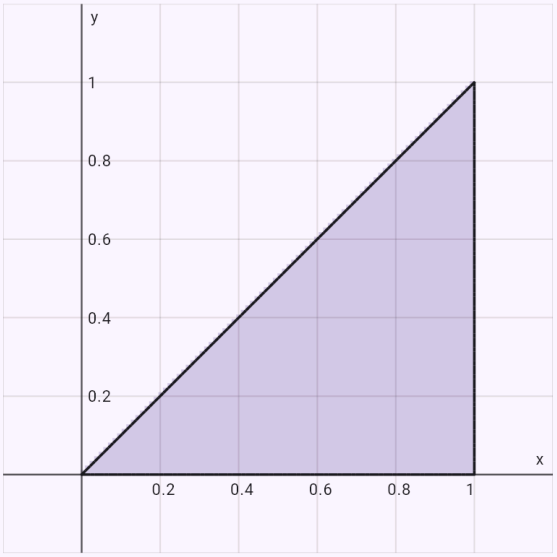
✓ Kartézské | Polární

Postup

- Oblast popíšeme jako normální oblast: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako dvojnásobný: $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- Vnitřní integrál podle y (druhá proměnná je konstanta): $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- Vnější integrál podle x: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Graf

✓ 2D | 3D



Oblast integrace.

Vnitřní integrál není elementární – aplikace sama zamění pořadí.

Zadání: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Výsledek

$$\frac{e-1}{2}$$

Pořadí integrace:

✓ dx dy | dy dx

Souřadnice:

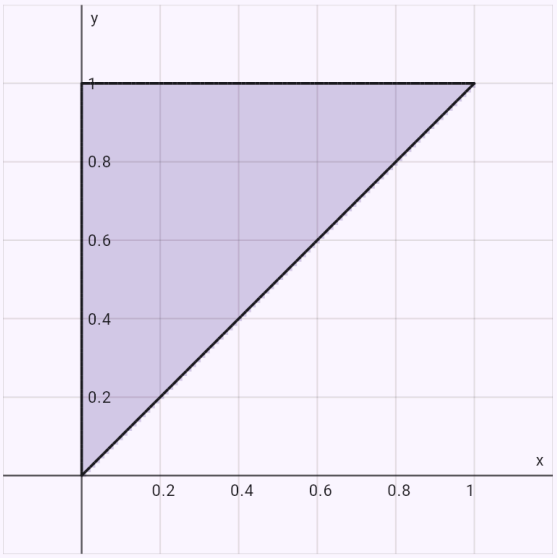
✓ Kartézské | Polární

Postup

- Vnitřní integrál podle y nemá elementární primitivní funkci, proto pořadí integrace zaměníme.
- Oblast popíšeme jako normální oblast:
  $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako dvojnásobný:
  $$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$$
- Vnitřní integrál podle x (druhá proměnná je konstanta):
  $$\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$$
- Vnější integrál podle y: $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Graf

✓ 2D | 3D



Oblast integrace.

Čtvrtkruh v polárních souřadnicích.

Zadání: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Výsledek

$$\frac{\pi}{8}$$

Souřadnice:

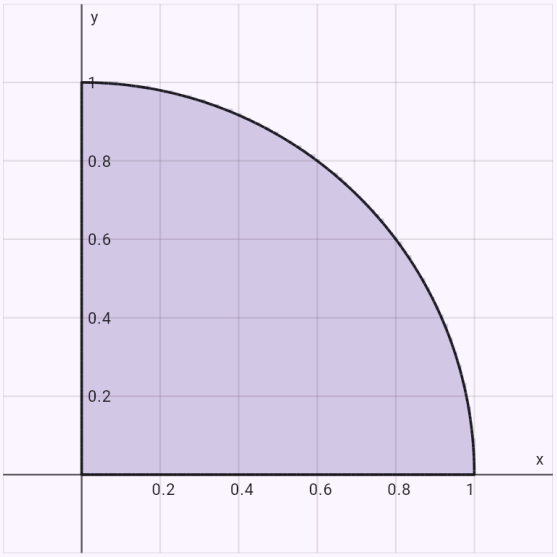
Kartézské | ✓ Polární

Postup

- Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r,$ kde r je Jakobián transformace. Integrand: $f \cdot r = r^3$
- Oblast v polárních souřadnicích: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako dvojnásobný: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- Vnitřní integrál podle r (druhá proměnná je konstanta): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- Vnější integrál podle φ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

Graf

✓ 2D | 3D



Oblast integrace.

Divergence prostorového pole jako součet tří parciálních derivací.

Zadání: `div(x y; y z; z x)`

Výsledek

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Pro toto pole spočítat:

✓ divergence | rotace | potenciál

Postup

- Vektorové pole a jeho složky: $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- Parciální derivace podle x – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $\frac{\partial P}{\partial x} = y$
- Parciální derivace podle y – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $\frac{\partial Q}{\partial y} = z$
- Parciální derivace podle z – ostatní proměnné bereme jako konstanty: $\frac{\partial R}{\partial z} = x$
- Divergence je součet parciálních derivací složek, každé podle „její“ proměnné $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

Rotace rovinného víru – šipky pole obíhají kolem počátku.

Zadání: `rot(-y; x)`

Výsledek

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

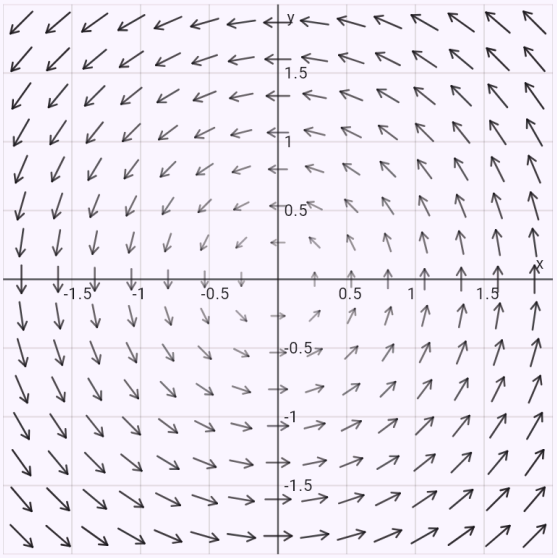
Pro toto pole spočítat:

divergence | ✓ rotace | potenciál

Postup

- Vektorové pole a jeho složky:
  $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- U rovinného pole je rotace jediné číslo – složka z, tedy ∂Q/∂x − ∂P/∂y
  $(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Graf



Šipky ukazují směr a velikost pole (delší a tmavší = silnější).

Harmonická funkce – Laplaceův operátor je nulový.

Zadání: `Δ(x^2 - y^2)`

Výsledek

$$\Delta f = 0$$

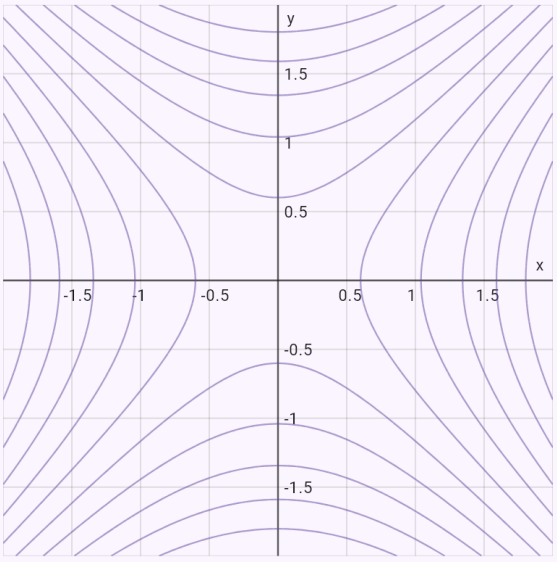
Pro tuto funkci spočítat:

✓ Laplaceův operátor Δf | gradient ∇f

Postup

- První a druhá parciální derivace podle x:
  $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- První a druhá parciální derivace podle y:
  $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- Laplaceův operátor je součet druhých parciálních derivací: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – funkce je harmonická.

Graf



Vrstevnice funkce f.

Potenciál školní metodou: integrace P podle x, porovnání s Q, zkouška; graf s ekvipotenciálami.

Zadání: `potential(2x y; x^2)`

Výsledek

$$\varphi = x^2 y + C$$

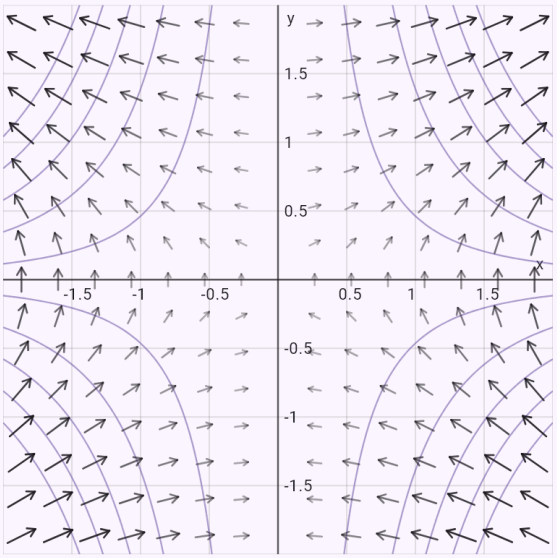
Pro toto pole spočítat:

divergence | rotace | ✓ potenciál

Postup

- Vektorové pole a jeho složky:
  $\vec{F} = (2xy;\ x^2), \quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- Rotace je nulová (v rovině ∂Q/∂x = ∂P/∂y), pole je konzervativní a potenciál hledat má smysl:
  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Hledáme φ, pro které ∇φ = F. Integrujeme P podle x, integrační „konstanta“ smí záviset na ostatních proměnných: $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Derivujeme φ podle y a porovnáme se složkou Q – zbude derivace „konstanty“
  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- „Konstantu“ zintegrujeme podle y; nová smí záviset jen na zbylých proměnných, nakonec je to číslo C:
  $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Zkouška – gradient potenciálu je zadané pole:
  $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Graf



Šipky ukazují směr a velikost pole (delší a tmavší = silnější). Vrstevnice potenciálu φ (ekvipotenciály) – pole je k nim všude kolmé.

Práce konzervativního pole – parametrizací a kontrola potenciálem φ = x²y.

Zadání: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Výsledek

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Spočítat:

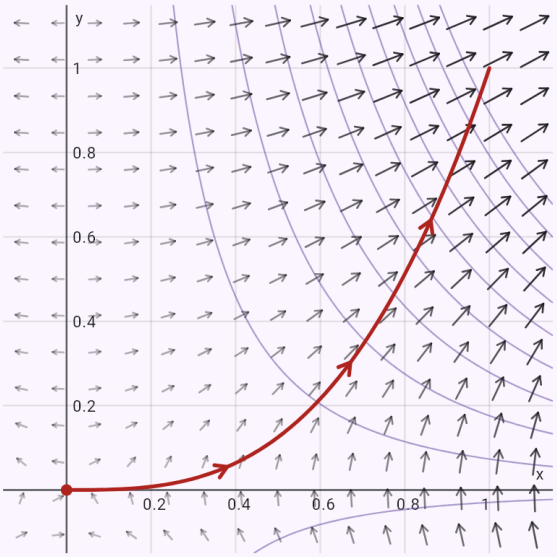
- ✓ parametrizací
- potenciálem

Upravit ve formuláři

Postup

- Křivkový integrál 2. druhu vektorového pole po orientované křivce C (například práce síly po dráze):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Parametrizace křivky: $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- Tečný vektor – derivace parametrizace: $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Dosadíme parametrizaci do pole a skalárně vynásobíme tečným vektorem
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Zbývá obyčejný určitý integrál přes interval parametru:
  $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Kontrola: pole je konzervativní, má potenciál φ a integrál nezávisí na cestě – stačí rozdíl φ(B) − φ(A)
  $\varphi = x^2y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Graf



Křivka C se šipkami ve směru její orientace (tečka = počáteční bod). Šipky ukazují směr a velikost pole (delší a tmavší = silnější). Vrstevnice potenciálu φ (ekvipotenciály) – pole je k nim všude kolmé.

Cirkulace po jednotkové kružnici z fotky, kontrola Greenovou větou v polárních souřadnicích.

Zadání: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Výsledek

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Spočítat:

parametrizací | Greenovou větou

Upravit ve formuláři

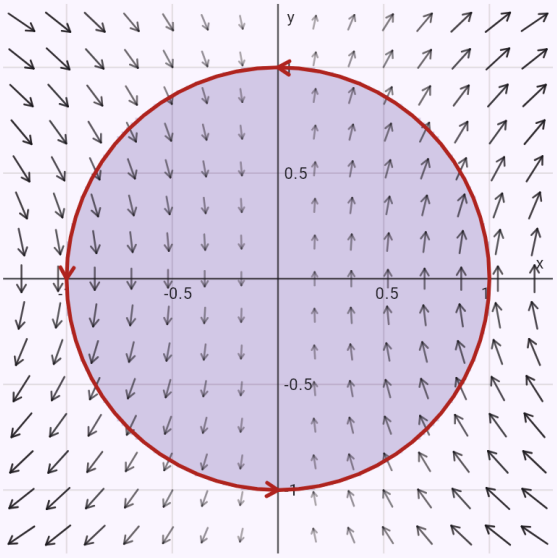
Postup

- Křivka je uzavřená – integrál 2. druhu po ní je cirkulace pole: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- Kružnice se středem S a poloměrem r oběhnutá jednou (parametrizace úhlem t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Tečný vektor – derivace parametrizace:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Dosadíme parametrizaci do pole a skalárně vynásobíme tečným vektorem
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cdots$
- Zbývá obyčejný určitý integrál přes interval parametru:
  $\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Kontrola Greenovou větou: křivka je kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček), integrál po ní se rovná dvojnému integrálu přes oblast D uvnitř
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- Oblast D uvnitř křivky – přes ni spočítáme dvojný integrál: $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, kde r je Jakobián transformace. Integrand:
  $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- Oblast v polárních souřadnicích: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako dvojnásobný

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$$

- Vnitřní integrál podle r (druhá proměnná je konstanta)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -}{}$
- Vnější integrál podle φ
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- Obě strany Greenovy věty vyšly stejně: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Graf



Křivka C se šipkami ve směru její orientace (tečka = počáteční bod). Šipky ukazují směr a velikost pole (delší a tmavší = silnější). Vybarvená je oblast D uvnitř křivky z Greenovy věty.

Délka paraboly – integrál 1. druhu z 1.

Zadání: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Výsledek

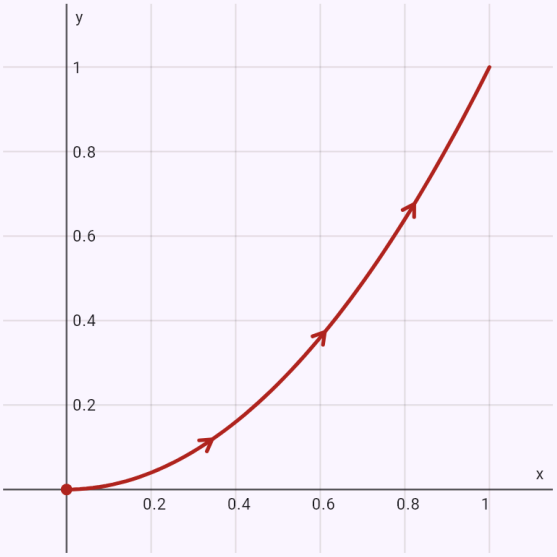
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{argsinh} 2}{4}$$

Upravit ve formuláři

Postup

- Křivkový integrál 1. druhu funkce f po křivce C – sčítáme hodnoty f násobené délkou malých kousků křivky ds: $\int_C ds$
- Graf funkce – parametrem je samo x (parametrizace r(x) = (x; f(x))): $y = x^2$: $\vec{r}(x) = (x;\ x^2), \quad 0 \le x \le 1$
- Tečný vektor – derivace parametrizace: $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- Jeho velikost; element délky oblouku je ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Dosadíme parametrizaci do f a vynásobíme velikostí tečného vektoru: $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Zbývá obyčejný určitý integrál přes interval parametru $\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{argsinh} 2}{4}$
- Integrál z 1 ds je délka křivky (s hustotou f místo 1 by to byla hmotnost drátu).

Graf



Křivka C se šipkami ve směru její orientace (tečka = počáteční bod).

Šroubovice v prostoru – otočný 3D graf se šipkami pole.

Zadání: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Výsledek

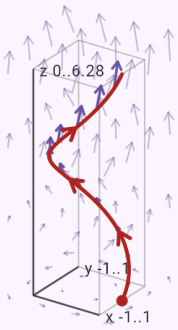
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Upravit ve formuláři

Postup

- Křivkový integrál 2. druhu vektorového pole po orientované křivce C (například práce síly po dráze):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Parametrizace křivky:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Tečný vektor – derivace parametrizace:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Dosadíme parametrizaci do pole a skalárně vynásobíme tečným vektorem
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Zbývá obyčejný určitý integrál přes interval parametru:
  $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Graf



Křivka C se šipkami ve směru její orientace (tečka = počáteční bod). Šipky ukazují pole, na křivce jsou sytější. Otáčejte tažením prstu.

Těžiště půlkružnice – hmotnost a dva statické momenty.

Zadání: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Výsledek

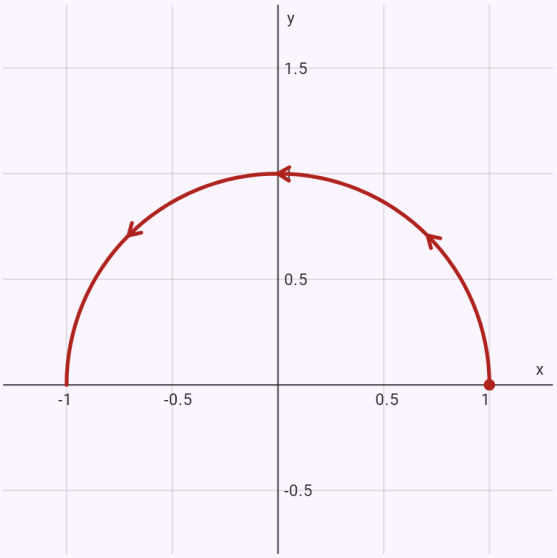
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Upravit ve formuláři

Postup

- Křivkový integrál 1. druhu funkce f po křivce C – sčítáme hodnoty f násobené délkou malých kousků křivky ds: $\int_C ds$
- Těžiště drátu: statické momenty (integrál souřadnice krát hustota) dělené hmotností, pro y (a z) obdobně $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Parametrizace křivky: $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- Tečný vektor – derivace parametrizace: $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Jeho velikost; element délky oblouku je ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Dosadíme parametrizaci do f a vynásobíme velikostí tečného vektoru: $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Zbývá obyčejný určitý integrál přes interval parametru: $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- Statický moment pro souřadnici x – stejný postup s integrandem $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- Statický moment pro souřadnici y – stejný postup s integrandem $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Souřadnice těžiště jsou momenty dělené hmotností: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Graf



Křivka C se šipkami ve směru její orientace (tečka = počáteční bod).

Obsah elipsy planimetrem: ½∮ x dy − y dx = πab.

Zadání: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Výsledek

$$A = 6\pi$$

Spočítat:

parametrizací | Greenovou větou

Upravit ve formuláři

Postup

- Křivka je uzavřená – integrál 2. druhu po ní je cirkulace pole: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$
- Obsah oblasti uvnitř uzavřené křivky jako křivkový integrál po hranici (planimetr) – podle Greenovy věty s Q_x − P_y = 1: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
- Parametrizace křivky: $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Tečný vektor – derivace parametrizace: $\vec{r}'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Dosadíme parametrizaci do pole a skalárně vynásobíme tečným vektorem

$$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \frac{3}{2}$$

- Zbývá obyčejný určitý integrál přes interval parametru: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Kontrola Greenovou větou: křivka je kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček), integrál po ní se rovná dvojnému integrálu přes oblast D uvnitř

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

- Oblast D uvnitř křivky – přes ni spočítáme dvojný integrál: $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Oblast popíšeme jako normální oblast: $-3 \le x \le 3,\ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako dvojnásobný

$$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$

- Vnitřní integrál podle y (druhá proměnná je konstanta)

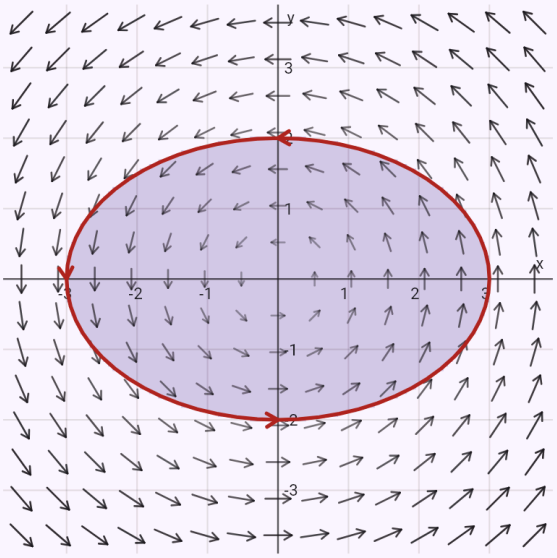
$$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$

- Vnější integrál podle x

$$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$

- Obě strany Greenovy věty vyšly stejně: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$

Graf



Křivka C se šipkami ve směru její orientace (tečka = počáteční bod). Šipky ukazují směr a velikost pole (delší a tmavší = silnější). Vybarvená je oblast D uvnitř křivky z Greenovy věty.

Horní polokoule ve sférických souřadnicích – Jakobián ρ² sin θ, meze ρ, θ, φ.

Zadání: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Výsledek

$$4\pi \approx 12{,}566$$

Počítat v souřadnicích:

kartézské | cylindrické | ✓ sférické

Upravit ve formuláři

Postup

- Trojný integrál funkce přes těleso V: $\iiint_V z\,dV$
- Sférické souřadnice – J = ρ² sin θ je Jakobián transformace (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); dosazení a integrand

  $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$

  $f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$
- Těleso ve sférických souřadnicích:

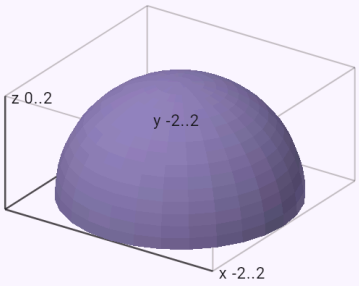
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný

  $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$
- Nejvnitřnější integrál podle ρ (ostatní proměnné jsou konstanty)

  $\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$
- Prostřední integrál podle θ

  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$
- Vnější integrál podle φ: $\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$

Graf



Těleso V, přes které se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Čtyřstěn postupnými mezemi – tři integrály po sobě.

Zadání: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Výsledek

$$\frac{1}{24}$$

Počítat v souřadnicích:

kartézské | cylindrické | sférické

Upravit ve formuláři

Postup

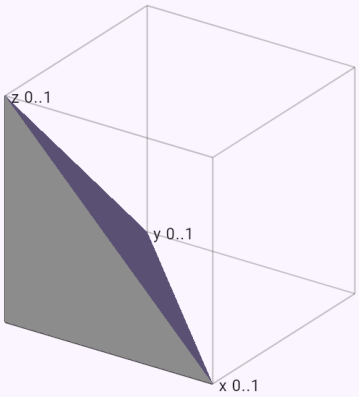
- Trojný integrál funkce přes těleso V: $\iiint_V x \, dV$
- Těleso popíšeme jako normální oblast – z leží mezi dvěma plochami nad průmětem tělesa: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le -x-y+1$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- Nejvnitřnější integrál podle z (ostatní proměnné jsou konstanty): $\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x-y+1)$
- Prostřední integrál podle y

$$\int_0^{1-x} (x(-x-y+1))\, dy = \left[-\frac{x(x+y-1)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

- Vnější integrál podle x

$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Graf



Těleso V, přes které se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Objem kužele v cylindrických souřadnicích.

Zadání: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Výsledek

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Počítat v souřadnicích:

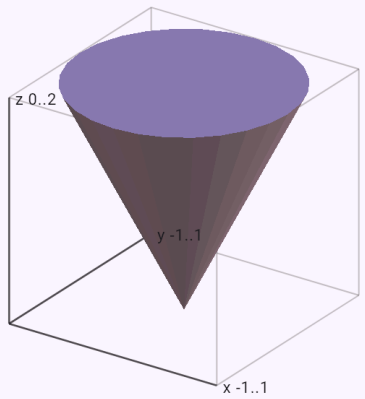
kartézské | ✓ cylindrické

Upravit ve formuláři

Postup

- Objem tělesa je trojný integrál z jedničky: $V = \iiint_V dV$
- Cylindrické souřadnice – J = r je Jakobián transformace (dV = r dr dφ dz); dosazení a integrand
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- Těleso v cylindrických souřadnicích:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný:
  $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{2r}^{2} r\,dz\,dr\,d\varphi$
- Nejvnitřnější integrál podle z (ostatní proměnné jsou konstanty): $\int_{2r}^{2} r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- Prostřední integrál podle r
  $\int_0^{1} (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- Vnější integrál podle φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Graf



Těleso V, přes které se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Těžiště polokoule – hmotnost a tři statické momenty.

Zadání: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Výsledek

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

Těleso nebo funkce obsahuje x² + y² + z² – jednodušší bývají sférické souřadnice:

✓ kartézské | cylindrické | sférické

Upravit ve formuláři

Postup

- Těžiště tělesa: každá souřadnice je statický moment (integrál souřadnice krát hustota) dělený hmotností m, pro y a z obdobně: $x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$
- Těleso popíšeme jako normální oblast – z leží mezi dvěma plochami nad průmětem tělesa

$$-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-$$

- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$

- Nejvnitřnější integrál podle z (ostatní proměnné jsou konstanty)

$$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$

- Prostřední integrál podle y

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right) dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\sqrt{}\right.}{2}\right.$$

- Vnější integrál podle x

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$

- Statický moment pro souřadnici x – stejný postup s integrandem $x \cdot \rho$

$$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$

- Statický moment pro souřadnici y – stejný postup s integrandem $y \cdot \rho$

$$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$

- Statický moment pro souřadnici z – stejný postup s integrandem $z \cdot \rho$

$$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$

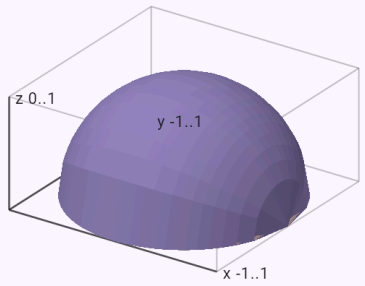
- Souřadnice těžiště jsou momenty dělené hmotností

$$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$

$$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$

$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Graf



Těleso V, přes které se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho ose.

Zadání: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Výsledek

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Počítat v souřadnicích:

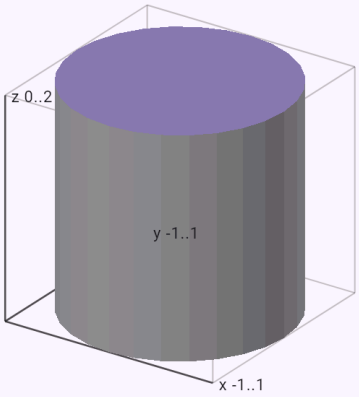
kartézské | ✓ cylindrické

Upravit ve formuláři

Postup

- Moment setrvačnosti vzhledem k ose z – hustota krát druhá mocnina vzdálenosti d od osy:
  $$I_z = \iiint_V d^2\,dV = \iiint_V (x^2+y^2)\,dV$$
- Cylindrické souřadnice – J = r je Jakobián transformace (dV = r dr dφ dz); dosazení a integrand
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- Těleso v cylindrických souřadnicích:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný:
  $$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{2} r^3\,dz\,dr\,d\varphi$$
- Nejvnitřnější integrál podle z (ostatní proměnné jsou konstanty): $\int_0^2 r^3\,dz = \left[zr^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- Prostřední integrál podle r: $\int_0^1 2r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$
- Vnější integrál podle φ
  $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Graf



Těleso V, přes které se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Tok ven sférou – parametrizace úhly θ, φ a kontrola Gaussovou větou.

Zadání: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Výsledek

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Spočítat:

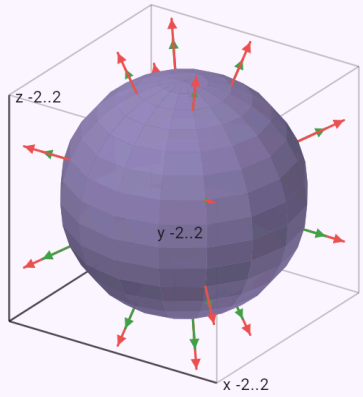
- ✓ parametrizací
- Gaussovou větou

Upravit ve formuláři

Postup

- Tok vektorového pole plochou S – plošný integrál 2. druhu: $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Parametrizace sféry úhly θ (od kladné osy z) a φ (kolem osy z)
  $\vec{r}(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Parciální derivace podle parametrů – tečné vektory plochy
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Normálový vektor (vektorový součin tečných vektorů) orientovaný ven z tělesa
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta\cdot si\right.$
- Dosadíme parametrizaci do pole a vynásobíme skalárně normálovým vektorem (F · n dS = F · N du dv):
  $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N} = 8\sin\theta$
- Dvojný integrál přes obdélník parametrů
  $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\,d\theta = 32\pi$$
- Kontrola Gaussovou větou: tok ven uzavřenou plochou je trojný integrál divergence přes těleso uvnitř
- Trojný integrál funkce přes těleso V: $\iiint_V 3\,dV$
- Těleso popíšeme jako normální oblast – z leží mezi dvěma plochami nad průmětem tělesa
  $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný
  $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz\,dy\,dx$$
- Nejvnitřnější integrál podle z (ostatní proměnné jsou konstanty)
  $$\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz = [3z]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2}$$
- Prostřední integrál podle y
  $$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right) dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right.$$
- Vnější integrál podle x
  $$\int_{-2}^{2}\left(\pi\left(12-3x^2\right)\right)dx = \left[-\pi x^3+12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$$
- Gaussova věta dává stejnou hodnotu:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$

Graf



Plocha S s normálami (zeleně) a šipkami pole (červeně). Otáčejte tažením prstu.

Obsah rotačního paraboloidu – plošný element grafu, dvojný integrál v polárních souřadnicích.

Zadání: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Výsledek

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Upravit ve formuláři

Postup

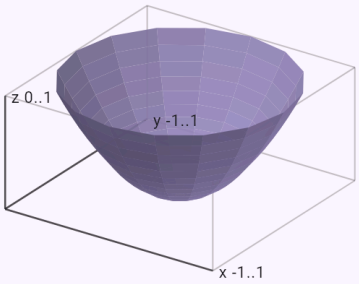
- Obsah plochy S je plošný integrál 1. druhu z jedničky:
  $\iint_S dS$
- Plocha je graf funkce z = g(x, y) nad oblastí D v rovině xy:
  $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \le 1$
- Parciální derivace funkce g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- Plošný element grafu:
  $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Dosadíme parametrizaci do f a vynásobíme plošným elementem:
  $f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- Plošný integrál přes graf je dvojný integrál přes jeho průmět D: $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; J = r$, kde r je Jakobián transformace. Integrand:
  $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- Oblast v polárních souřadnicích: $0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le 1$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako dvojnásobný:
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr \right) d\varphi$
- Vnitřní integrál podle r (druhá proměnná je konstanta)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2+1} \right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2+1\right)^3}}{12} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1+5\sqrt{}}{12}$$

- Vnější integrál podle φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1+5\sqrt{5}}{12} \right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{(-1+}{}$$

Graf



Plocha S, přes kterou se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Tok uzavřeným válcem Gaussovou větou, kontrola po částech – plášť a dvě podstavy.

Zadání: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Výsledek

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$$

Spočítat:

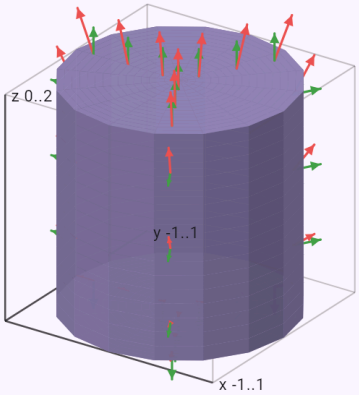
parametrizací | ✓ Gaussovou větou

Upravit ve formuláři

Postup

- Tok vektorového pole plochou S – plošný integrál 2. druhu: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Podle Gaussovy věty je tok uzavřenou plochou ven roven trojnému integrálu divergence přes těleso V uvnitř
- Trojný integrál funkce přes těleso V: $\iiint_V 3\, dV$
- Těleso popíšeme jako normální oblast – z leží mezi dvěma plochami nad průmětem tělesa: $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Podle Fubiniho věty integrál zapíšeme jako trojnásobný: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} 3\, dz\, dy\, dx$
- Nejvnitřnější integrál podle z (ostatní proměnné jsou konstanty): $\int_0^2 3\, dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- Prostřední integrál podle y $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\, dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$
- Vnější integrál podle x $\int_{-1}^{1} \left(12\sqrt{1-x^2}\right) dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$
- Kontrola parametrizací plochy dává stejnou hodnotu: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$

Graf



Plocha S s normálami (zeleně) a šipkami pole (červeně). Otáčejte tažením prstu.

Tok rotace polosférou – kontrola Stokesovou větou po rovníku.

Zadání: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Výsledek

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Spočítat:

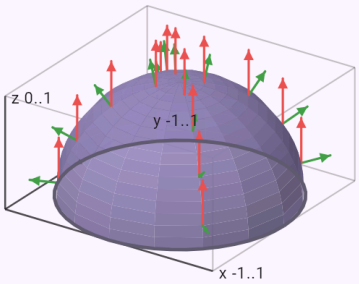
parametrizací | Stokesovou větou

Upravit ve formuláři

Postup

- Tok rotace pole plochou S – plošný integrál 2. druhu, který se dá spočítat i Stokesovou větou
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- Spočítáme rotaci pole
  $$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Parametrizace horní polosféry – úhel θ jen do π/2
  $$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- Parciální derivace podle parametrů – tečné vektory plochy
  $$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- Normálový vektor (vektorový součin tečných vektorů) orientovaný ven z tělesa
  $$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- Dosadíme parametrizaci do pole a vynásobíme skalárně normálovým vektorem (F · n dS = F · N du dv):
  $$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$$
- Dvojný integrál přes obdélník parametrů
  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Kontrola Stokesovou větou: tok rotace se rovná cirkulaci pole po hranici plochy (pravidlo pravé ruky)
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- Okraje obdélníku parametrů, které se zobrazí do bodu nebo se proběhnou dvakrát proti sobě (šev), se vyruší – zbývá skutečná hranice plochy.
- Část hranice
  $$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$
- Křivkový integrál po ní: $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1$, $\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$
- Stokesova věta dává stejnou hodnotu:
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Graf



Plocha S s normálami (zeleně) a šipkami pole (červeně). Hranice plochy se šipkou oběhu. Otáčejte tažením prstu.

Plošný integrál 1. druhu přes polosféru zadanou rovnicí.

Zadání: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Výsledek

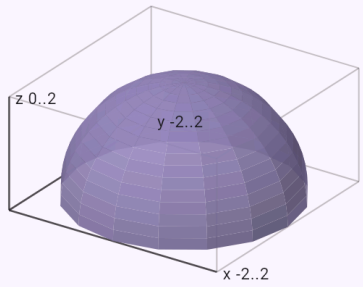
$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

Upravit ve formuláři

Postup

- Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu S: $\iint_S z \, dS$
- Parametrizace horní polosféry – úhel θ jen do π/2
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \leq$
- Parciální derivace podle parametrů – tečné vektory plochy
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Vektorový součin tečných vektorů je normálový vektor, jeho velikost dává plošný element dS = |r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Dosadíme parametrizaci do f a vynásobíme plošným elementem: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- Dvojný integrál přes obdélník parametrů
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$

Graf



Plocha S, přes kterou se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Moment setrvačnosti kulové skořepiny vzhledem k ose z.

Zadání: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Výsledek

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

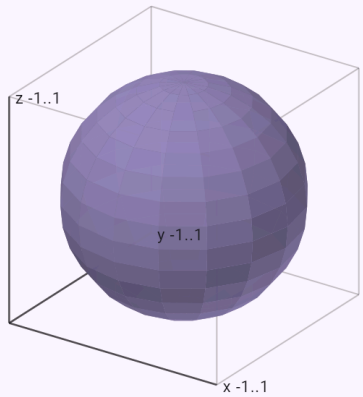
Upravit ve formuláři

Postup

- Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu S:
  $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- Moment setrvačnosti skořepiny vzhledem k ose z – hustota krát druhá mocnina vzdálenosti d od osy:
  $I_z = \iint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Parametrizace sféry úhly θ (od kladné osy z) a φ (kolem osy z)
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Parciální derivace podle parametrů – tečné vektory plochy
  $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- Vektorový součin tečných vektorů je normálový vektor, jeho velikost dává plošný element dS = |r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Dosadíme parametrizaci do f a vynásobíme plošným elementem: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- Dvojný integrál přes obdélník parametrů

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Graf



Plocha S, přes kterou se integruje. Otáčejte tažením prstu.

Mapa integrálních vět

Všechny integrální věty říkají totéž: integrál derivace přes oblast se rovná integrálu po její hranici. Hranice úsečky jsou dva body, hranice plochy křivka, hranice tělesa uzavřená plocha; souhrnně to vyjadřuje zobecněná Stokesova věta ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω. Aplikace věty používá jako druhý způsob výpočtu a jako kontrolu (čipy pod výsledkem); v glosáři je tatáž mapa pod pojmem „Integrální věty“.

Jak zadat

`∫ f'(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	Newtonova–Leibnizova formule – uvnitř: derivace na intervalu ⟨a; b⟩, na hranici: hodnoty v krajních bodech.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Gradientová věta (potenciál, nezávislost na cestě) – uvnitř: gradient podél křivky, na hranici: potenciál v koncových bodech.

`∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Greenova věta – uvnitř: ∂Q/∂x − ∂P/∂y přes oblast v rovině, na hranici: cirkulace po uzavřené křivce.
`∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Stokesova věta – uvnitř: tok rotace plochou, na hranici: cirkulace po její okrajové křivce.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Gaussova věta – uvnitř: divergence přes těleso, na hranici: tok ven uzavřenou plochou.

Fyzikální aplikace integrálních vět

V sekci „Aplikace“ (obory Fyzika a Vícerozměrná analýza, elektřina i v Elektrotechnice, proudění a teplo v Technice) jsou modely s jednotkami: Gaussův zákon (koule, přímka, rovina), Ampérův zákon a Biotův–Savartův zákon (vodič, solenoid, toroid, proudová smyčka), elektromagnetická indukce (magnetický tok, proměnné pole, generátor), kondenzátor (deskový, kulový, válcový), energie pole, práce v silovém poli (gravitace, pružina, Coulombova síla), proudění kapaliny (průtok, parabolický profil, rovnice kontinuity, cirkulace a rotace), vedení tepla (rovinná a válcová stěna) a gravitační pole z Gaussova zákona.

Postup začne integrálním zákonem, pak zdůvodní souměrnost (na zvolené ploše nebo křivce je pole stálé a míří podél normály či tečny), ukáže spočítaný integrál, uzavřený náboj, proud nebo hmotnost a vzorec, do kterého dosadí. U elektromagnetických zákonů připojí jejich diferenciální tvar – pojem glosáře „Maxwellovy rovnice“ má oba tvary vedle sebe. Graf ukáže průběh pole se vzdáleností (E(r), B(r), g(r)), rychlostní profil, teplotu ve stěně nebo napětí generátoru.

Ukázky

Pole uvnitř rovnoměrně nabité koule – uzavřený náboj Q r³/R³, pole roste lineárně.

Zadání: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

Výsledek

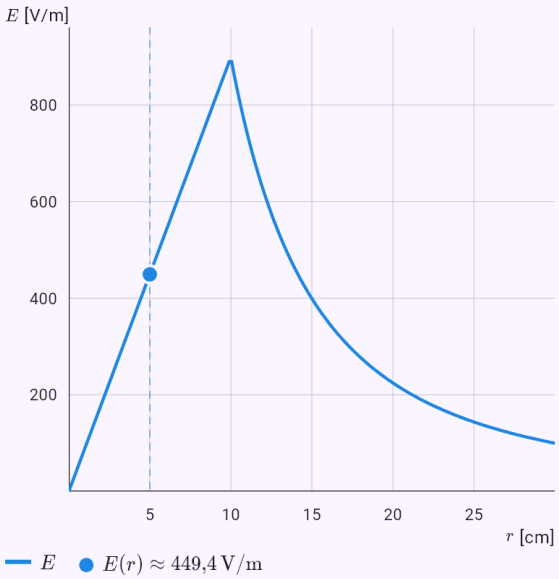
$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Postup

- Hledáme E; zadáno:
  $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Náboj Q rozložený souměrně kolem středu – na povrchu koule (vodivá koule, slupka) nebo rovnoměrně v celém objemu. Gaussovou plochou je soustředná sféra o poloměru r; vně působí náboj jako bodový. Rovnice modelu: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Souměrnost: pole míří radiálně a na každé soustředné sféře má stejnou velikost. Gaussovou plochou zvolíme sféru o poloměru r – pole je na ní rovnoběžné s normálou a stálé.
- Výpočet integrálu: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\,dS = E \cdot 4\pi r^2$
- Uzavřený náboj
  $Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- Dosadíme
  $E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$

- Tentýž zákon v diferenciálním tvaru (Maxwellovy rovnice): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Magnetické pole přímého vodiče Ampérovým zákonem po kružnici kolem osy.

Zadání: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

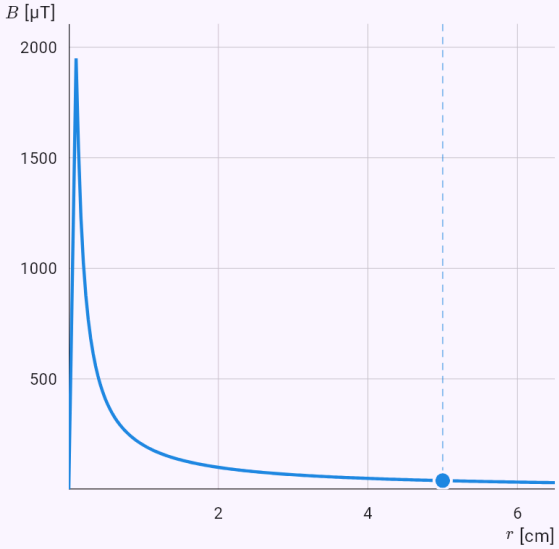
Výsledek

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Postup

- Hledáme B; zadáno:
  $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Dlouhý přímý vodič o poloměru R s proudem I rovnoměrně rozloženým v průřezu. Integrační křivkou je kružnice kolem osy vodiče; uvnitř vodiče obepíná jen část proudu. Rovnice modelu: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Souměrnost: indukční čáry jsou kružnice kolem osy vodiče, B je k nim tečné a na kružnici o poloměru r stálé.
- Výpočet integrálu: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- Obepnutý proud: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Dosadíme
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Tentýž zákon v diferenciálním tvaru (Maxwellovy rovnice): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Převedeme jednotky: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Pole na ose proudové smyčky Biotovým–Savartovým zákonem.

Zadání: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

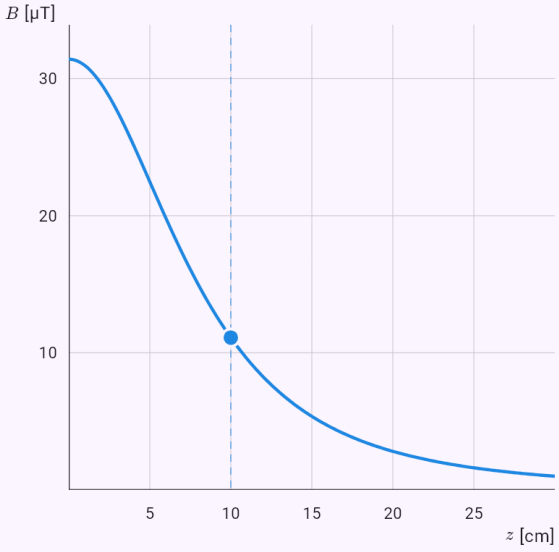
Výsledek

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Postup

- Hledáme B; zadáno:
  $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Kruhová smyčka o poloměru R s proudem I. Pole na její ose ve vzdálenosti z od středu dá Biotův–Savartův zákon – kolmé složky příspěvků se vyruší, podélné se sečtou.
  Rovnice modelu: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Každý kousek smyčky dl je od bodu na ose stejně daleko, ρ = √(R² + z²), a je kolmý na spojnici. Složky kolmé k ose se po obvodu vyruší, sčítají se jen podélné dB · R/ρ.
- Výpočet integrálu
  $B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Dosadíme
  $B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Ve středu smyčky (z = 0): $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Převedeme jednotky: $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Amplituda napětí generátoru ε = NBAω a sinusový průběh v grafu.

Zadání: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2];`

`omega=314.16[rad_s]; mode=rotating)`

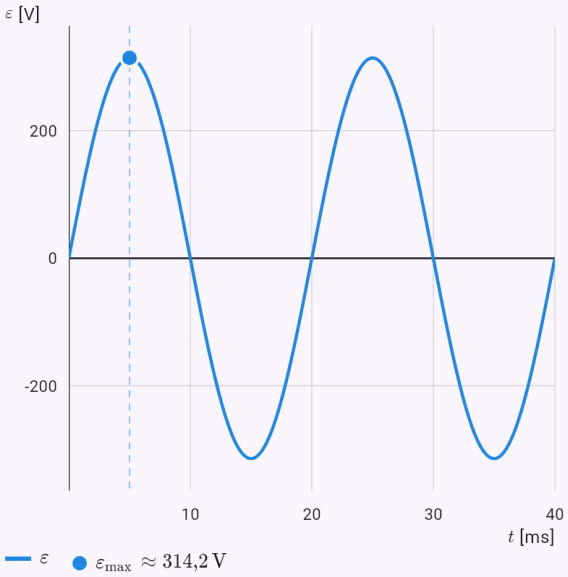
Výsledek

$$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$$

Postup

- Hledáme $\varepsilon_{\max}$; zadáno
  $N = 200, \quad B = 0{,}1\,\mathrm{T}, \quad A = 500\,\mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\,\mathrm{rad}$
- Převedeme jednotky: $A = 500\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$
- Smyčka s N závity se otáčí úhlovou rychlostí ω v rovnoměrném poli B – princip generátoru střídavého proudu. Napětí je sinusové s amplitudou NBAω. Rovnice modelu: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$
- Magnetický tok jedním závitem: $\Phi(t) = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- Výpočet integrálu: $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Dosadíme: $\varepsilon_{\max} = 200\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$
- Frekvence: $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\,\mathrm{Hz}$
- Tentýž zákon v diferenciálním tvaru (Maxwellovy rovnice): $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Kapacita metru koaxiálního kabelu – pole z Gaussova zákona, napětí jako integrál pole.

Zadání: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m]; mode=cylindrical)`

Výsledek

$$C \approx 102{,}1\,\mathrm{pF}$$

Postup

- Hledáme C; zadáno
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\,\mathrm{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm}, \quad L = 1\,\mathrm{m}$
- Převedeme jednotky
  $R_1 = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm} = 0{,}0035\,\mathrm{m}$
- Dvě souosé válcové elektrody o poloměrech $R_1 < R_2$ a délce L – například koaxiální kabel. Rovnice modelu
  $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$
- Gaussovou plochou je souosý válec o poloměru r mezi elektrodami a délce L; uzavírá náboj vnitřní elektrody Q, podstavami pole neprochází.
- Pole mezi elektrodami z Gaussova zákona

$$E\cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$$

- Napětí jako křivkový integrál pole
  $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$
- Kapacita
  $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}3\cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$
- Převedeme jednotky: $C \approx 1{,}021\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 102{,}1\,\mathrm{pF}$

Energie magnetického pole 1 T v litru objemu.

Zadání: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Výsledek

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

Postup

- Hledáme W; zadáno: $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\,\mathrm{l}$
- Převedeme jednotky: $V = 1\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- Hustota energie magnetického pole ve vakuu w = B²/(2μ₀) – například pole uvnitř cívky. Rovnice modelu:
  $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Dosadíme
  $w = \frac{(1)^2}{2 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m^3}$
- V rovnoměrném poli je hustota energie všude stejná, objemový integrál je hustota krát objem.
- Vyjádříme hledanou veličinu: $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Dosadíme: $W = 397\,900 \cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- Takto je uložena energie cívky s proudem: $W = \frac{1}{2}LI^2$

Práce gravitace při zvednutí 1 kg z povrchu Země do výšky jednoho poloměru.

Zadání: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km]; mode=gravity)`

Výsledek

$$W \approx -31{,}28\,\mathrm{MJ}$$

Postup

- Hledáme W; zadáno
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad m = 1\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 6371\,\mathrm{km}, \quad r_2$
- Převedeme jednotky
  $r_1 = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\mathrm{km} = 1{,}27$
- Síla je konzervativní (má potenciál): práce nezávisí na cestě, jen na počátečním a koncovém bodě. Počítáme ji proto po nejjednodušší dráze – podél spojnice.
- Gravitační síla tělesa o hmotnosti M působí na těleso m, které se přesune ze vzdálenosti r_1 do r_2 od středu. Záporná práce pole znamená, že těleso bylo nutné zvedat. Rovnice modelu:
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- Výpočet integrálu

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$$

- Dosadíme
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- Potenciální energie
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- Práce konzervativní síly se rovná úbytku potenciální energie: $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}$
- Převedeme jednotky: $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J} = -31{,}28\,\mathrm{MJ}$

Průtok laminárního proudění – integrál parabolického profilu v polárních souřadnicích.

Zadání: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

Výsledek

$$Q \approx 7{,}854\,\mathrm{l/s}$$

Postup

- Hledáme Q; zadáno: $v_{\max} = 2\,\mathrm{m/s}, \quad R = 5\,\mathrm{cm}$
- Převedeme jednotky: $R = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Laminární (Poiseuilleovo) proudění: u stěny kapalina stojí, v ose teče nejrychleji, rychlostní profil je parabola v = v_max(1 − r²/R²). Rovnice modelu

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- Rychlost závisí jen na vzdálenosti r od osy, průřez proto integrujeme v polárních souřadnicích (dS = r dr dφ).
- Výpočet integrálu

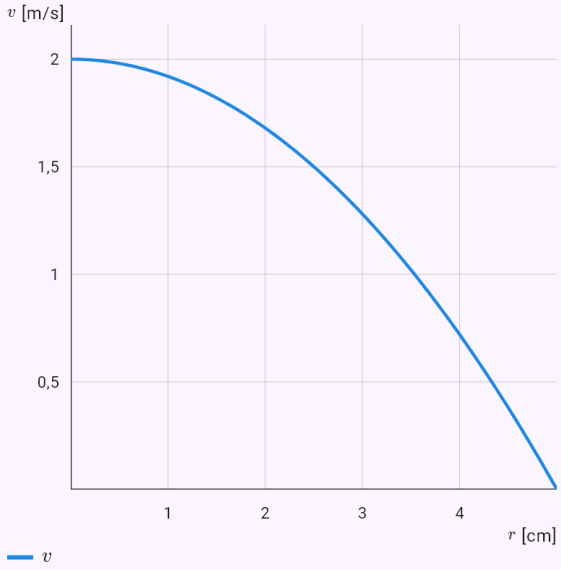
$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$$

- Dosadíme

$$Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s}$$

- Průměrná rychlost v průřezu: $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\mathrm{m/s}$
- Převedeme jednotky: $Q \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s} = 7{,}854\,\mathrm{l/s}$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Tepelné ztráty izolované trubky – logaritmický průběh teploty ve stěně.

Zadání: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC];`

`T2=20[degC]; mode=cylinder)`

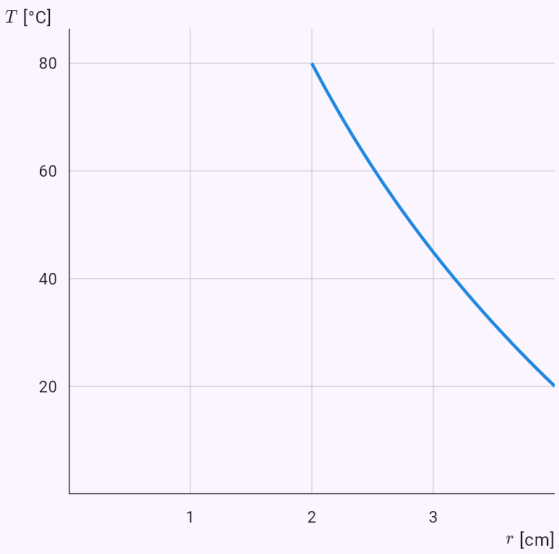
Výsledek

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Postup

- Hledáme P; zadáno
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Převedeme jednotky:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Válcová stěna – izolace trubky o vnitřním poloměru r_1, vnějším r_2 a délce L. Teplo prochází válcovými plochami rostoucího obsahu, proto teplota klesá logaritmicky.
  Rovnice modelu: $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Ustálený stav bez zdrojů tepla – každou vrstvou prochází stejný výkon: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- Výpočet integrálu
  $$P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $$T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$
- Dosadíme
  $$P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Gravitační zrychlení v polovině cesty ke středu Země.

Zadání: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

Výsledek

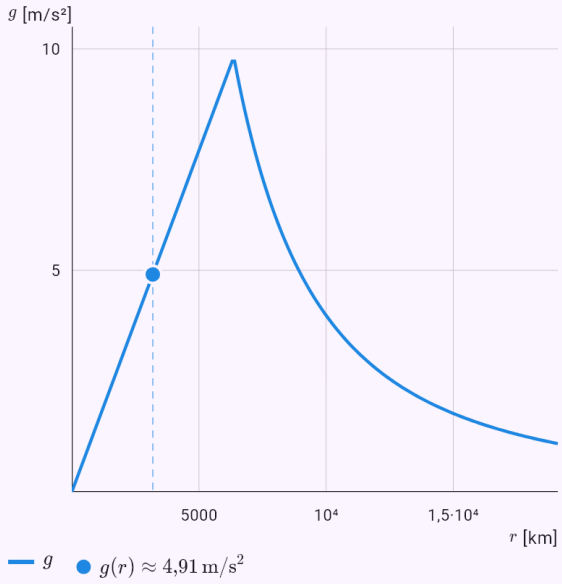
$$g \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$$

Postup

- Hledáme g; zadáno
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad r = 3186\,\mathrm{km}$
- Převedeme jednotky
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r = 3186\,\mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Homogenní koule (planeta se stálou hustotou). Uvnitř gravitační zrychlení roste lineárně se vzdáleností od středu. Rovnice modelu: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\mathrm{in}}$
- Souměrnost: pole míří radiálně a na každé soustředné sféře má stejnou velikost. Gaussovou plochou zvolíme sféru o poloměru r – pole je na ní rovnoběžné s normálou a stálé.
- Výpočet integrálu: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- Uzavřená hmotnost
  $M_{\mathrm{in}} = M\frac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Vyjádříme hledanou veličinu:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\mathrm{in}} \Rightarrow g = \frac{G M_{\mathrm{in}}}{r^2}$
- Dosadíme
  $g = \frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$

- Tentýž zákon v diferenciálním tvaru (z Gaussovy věty):
  $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Známá omezení

- Extrémy jen u funkce dvou proměnných, vázané s jednou vazbou. Dvojný integrál jen přes omezenou oblast, jejíž hranice je v jedné proměnné nejvýš kvadratická; plochu z = f(x, y) ve 3D kreslí zatím jen u dvojného integrálu. Vektorová pole jen v proměnných x, y (z), ostatní písmena jsou konstanty; šipky kreslí jen u rovinného pole. Potenciál hledá integrací složek – když integrál není elementární, nenajde ho. Křivkové integrály: Greenovu větu ověří jen u kružnice, elipsy a konvexního mnohoúhelníku, uzavřená křivka složená z grafu a úsečky se zadá jen jako lomená čára nebo parametricky po částech. Trojný integrál jen přes omezené těleso, které je normální vzhledem k jedné proměnné (jedna dolní a jedna horní plocha nad celým průmětem) a jehož nerovnice jsou v ní nejvýš kvadratické; sférické souřadnice jen u tělesa, jehož úhly θ a φ tvoří obdélník.
- Plošné integrály: Gaussovu větu ověří jen u předvoleb (sféra, uzavřená polosféra, válec, kužel), Stokesovu jen u toku rotace zadaného jako curl nebo ∇ × F; graf z = g(x, y) jen nad oblastí, kterou umí dvojný integrál; sféru s jinou mezí než z ≥ 0 zadejte jako graf nebo parametricky.

- Fyzikální aplikace integrálních vět počítají jen souměrné případy (koule, nekonečná přímka a rovina, dlouhá cívka, rovnoměrné pole), kde se integrál změní v součin; obecné rozložení náboje nebo proudu zadejte jako křivkový či plošný integrál. Posuvný proud v Ampérově–Maxwellově zákoně zanedbávají, materiály uvažují jen relativní permitivitou kondenzátoru.

29. Taylorův polynom

Aplikace sestaví Taylorův (pro bod 0 Maclaurinův) polynom zadaného stupně: tabulku derivací v bodě, dosazení do vzorce a zbytek v Lagrangeově tvaru. Stupeň umí najít i sama – nejmenší, při kterém chyba v zadaném bodě nebo na intervalu nepřekročí zadanou mez. V grafu je funkce a polynom; posuvníkem měníte stupeň a vidíte, jak se aproximace zlepšuje.

Vysoké stupně (až kolem 1000) počítá přesně a v postupu i grafu je zkracuje; posuvník stupně je pak logaritmický. Funkce, jejichž derivace rychle bobtnají (tg x), počítá dělením řad a chybu odhadne Cauchyho odhadem v komplexní rovině, případně odhadem alternující řady. Když ani to nejde, vysvětlí proč a poradí.

Jak zadat

`taylor(sin x, 0, 5)`	Funkce, bod a stupeň.
`maclaurin(e^x, 4)`	Maclaurinův polynom – bod je 0.
`taylor(e^x, 0, chyba=0.001, x=0.5)`	Stupeň podle chyby v bodě x (na intervalu místo x zadejte r=…).
`ln(1 + x)`	Funkce s čipem „Taylorův polynom“ – bod, stupeň nebo přesnost vyplníte tam.

Ukázky

Polynom 4. stupně se zbytkem.

Zadání: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Výsledek

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Postup

- Maclaurinův polynom (Taylorův polynom v bodě 0):

  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$

- Derivace funkce a jejich hodnoty v bodě a

  $f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$

  $f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$

  $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$

  $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$

  $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$

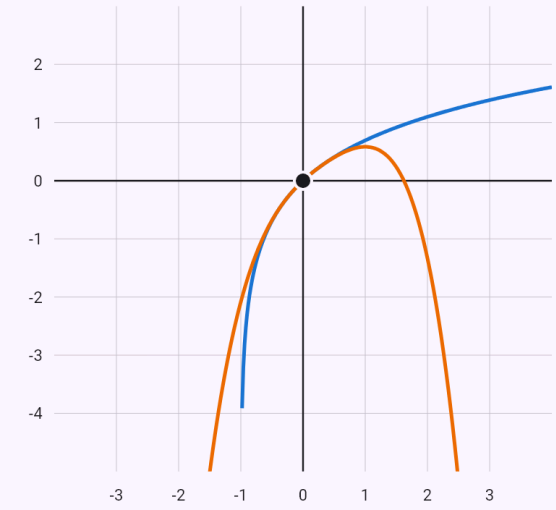
- Dosadíme hodnoty derivací

  $$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
  $$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- Zbytek (chyba aproximace) v Lagrangeově tvaru, ξ leží mezi a a x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$

Graf

Stupeň: 4



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Bod, v jehož okolí polynom funkci aproximuje:

- $[0; 0]$

Posuvníkem nad grafem zvolíš stupeň polynomu – s vyšším stupněm polynom funkci v okolí bodu aproximuje lépe a na širším okolí.

Stupeň podle požadované přesnosti – přibližná hodnota e^0,5.

Zadání: `taylor(e^x, 0, chyba=0.001, x=0.5)`

Výsledek

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Postup

- Maclaurinův polynom (Taylorův polynom v bodě 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Derivace funkce a jejich hodnoty v bodě a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Dosadíme hodnoty derivací

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Zbytek (chyba aproximace) v Lagrangeově tvaru, ξ leží mezi a a x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!}x^5$

- Hledáme nejmenší stupeň n, pro který odhad zbytku v bodě x nepřekročí zadanou chybu

$$M_k = \max_{t \in \langle 0;\, 0{,}5 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

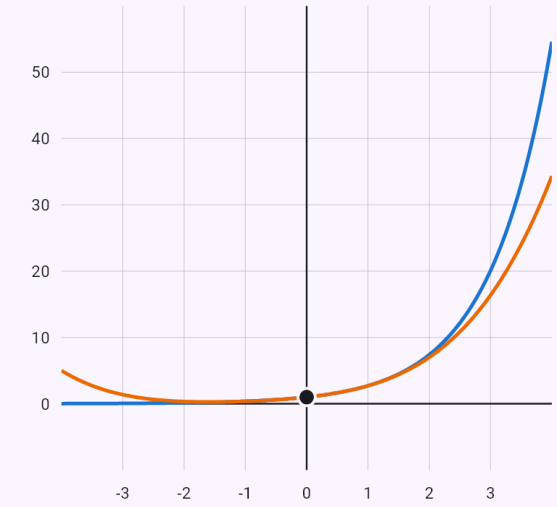
$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- Přibližná hodnota: $f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$

Graf

Stupeň: 4



$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Bod, v jehož okolí polynom funkci aproximuje:

- $[0; 1]$

Posuvníkem nad grafem zvolíš stupeň polynomu – s vyšším stupněm polynom funkci v okolí bodu aproximuje lépe a na širším okolí.

Stupeň 999 – vysoký stupeň se v postupu zkrátí.

Zadání: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Výsledek

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

Postup

- Maclaurinův polynom (Taylorův polynom v bodě 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- Derivace funkce a jejich hodnoty v bodě a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x+1) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) &= 2 \\
&\vdots \\
f^{(998)}(x) &= -\frac{997!}{(x+1)^{998}} & f^{(998)}(0) &= -997! \\
f^{(999)}(x) &= \frac{998!}{(x+1)^{999}} & f^{(999)}(0) &= 998!
\end{aligned}$$

- Zbytek (chyba aproximace) v Lagrangeově tvaru, ξ leží mezi a a x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

- Hledáme nejmenší stupeň n, pro který odhad zbytku v bodě x nepřekročí zadanou chybu

$$M_k = \max_{t \in \langle 0;1 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$

$$n = 0: \quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3}$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3}$$

$$\dots$$

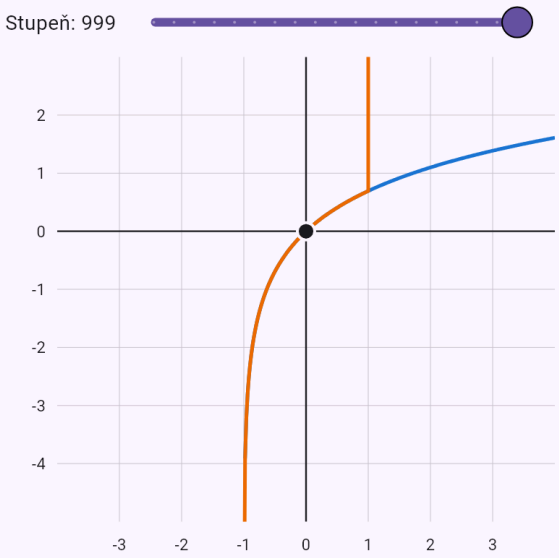
$$n = 998: \quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3}$$

$$n = 999: \quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}$$

- Přibližná hodnota: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Graf

Stupeň: 999



$y = \ln(1 + x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$

Bod, v jehož okolí polynom funkci aproximuje:

- $[0; 0]$

Posuvníkem nad grafem zvolíš stupeň polynomu – s vyšším stupněm polynom funkci v okolí bodu aproximuje lépe a na širším okolí.

Tangens – koeficienty z řad, chyba Cauchyho odhadem.

Zadání: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Výsledek

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Postup

- Maclaurinův polynom (Taylorův polynom v bodě 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- Derivace funkce a jejich hodnoty v bodě a

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Koeficienty počítáme aritmetikou řad, vzorce vyšších derivací by byly obrovské

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- Derivace jsou příliš velké, proto použijeme Cauchyho odhad na kružnici v komplexní rovině

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- Přibližná hodnota: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Známá omezení

- Stupeň nad 1000 aplikace nepočítá; bod na hranici oboru konvergence nebo za ní se Cauchyho odhadem odhadnout nedá.

30. Neurčitý integrál

Aplikace integruje metodami, které se učí ve škole, a u každého kroku řekne, co dělá. Výsledek ověří zkouškou – derivuje ho člen po členu podle pravidel a součet upraví na integrovanou funkci (společný jmenovatel, vzorce jako sin²x + cos²x = 1) – a nakreslí integrovanou funkci a primitivní funkci.

Odmocniny z mocnin proměnné (∛(x⁴), √(x³)) přepíše na mocniny s racionálním exponentem; absolutní hodnotu (|cos x|, √(1 − sin²x)) zapíše pomocí znaménka sgn.

Nemá-li integrál elementární primitivní funkci (třeba e^(−x²)), aplikace to řekne a uvede ji pomocí vyšší funkce (erf, Si, …).

Jak zadat

`int(x e^x, x)`	Integrál s proměnnou – meze nebo aplikaci (plocha, objem, …) můžete doplnit do polí pod zadáním.
`int(x^2 sin x)`	Bez proměnné, když je jen jedna.
`∫ x^2 dx`	Se znakem integrálu, i z fotky.
`x e^x`	Funkce s čipem „Integrovat“.

Základní integrály a substituce

Integrál součtu po členech, konstanta před integrál, tabulkové integrály (i s lineární vnitřní funkcí) a substituce, když je v integrálu funkce i derivace jejího vnitřku.

Ukázky

Po členech podle tabulky.

Zadání: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

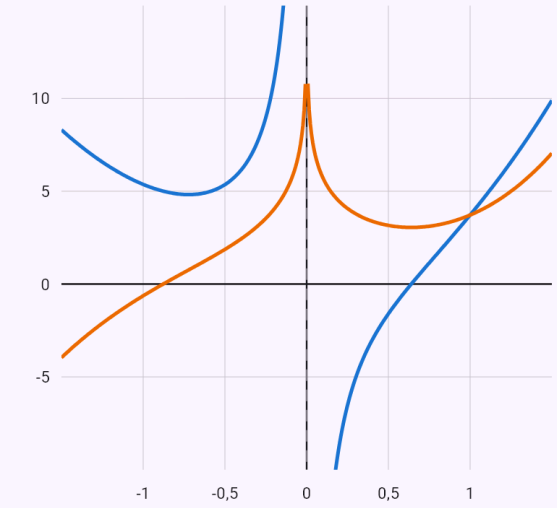
Výsledek

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Postup

- Integrál součtu je součet integrálů
  $$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx + \int -\frac{2}{x}$$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int e^x\,dx = e^x$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $$\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce:
  $$\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

Graf



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Substituce t = x².

Zadání: `int(2x cos(x^2))`

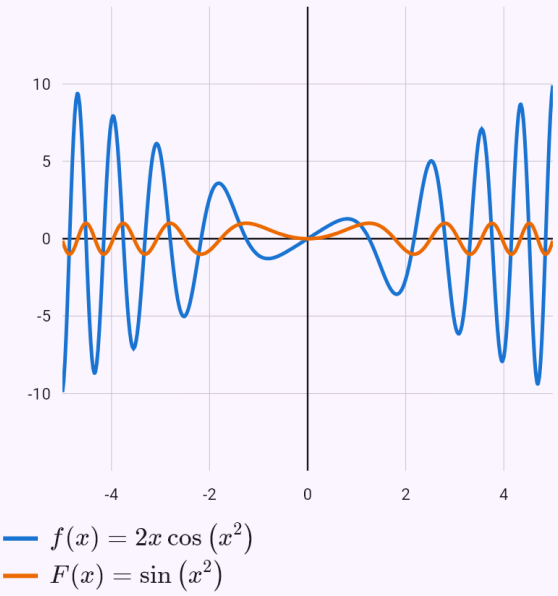
Výsledek

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Postup

- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Substituce $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$:
  $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Vrátíme se k původní proměnné: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce
  $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Graf



Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Integrál s konstantami a, b.

Zadání: `int(1/(a - bx)^3)`

Výsledek

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Podmínky: $b \neq 0$

Postup

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce
  $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-}$

Per partes

Součin polynomu a exponenciály, goniometrické funkce nebo logaritmu aplikace integruje per partes, podle potřeby opakovaně; integrály typu $e^x \sin x$ cyklickým per partes.

Ukázky

Per partes dvakrát po sobě.

Zadání: `int(x^2 e^x)`

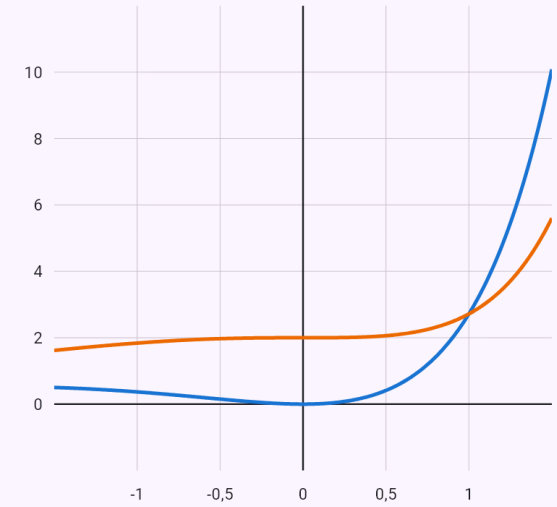
Výsledek

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Postup

- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, tedy $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int 2xe^x \, dx = 2 \int xe^x \, dx$
- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, tedy $u' = 1$, $v = e^x$: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int e^x \, dx = e^x$
- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce: $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $\left(x^2e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2e^x + 2xe^x$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $(-2xe^x)' = -2 \cdot (e^x \cdot x + e^x) = -2xe^x - 2e^x$
- Sečteme a upravíme $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Graf



Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Racionální funkce

Racionální funkci aplikace případně vydělí, jmenovatel rozloží a funkci rozloží na parciální zlomky, které integruje na logaritmy a arkustangenty.

Jmenovatel, který nad racionálními čísly rozložit nejde ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$), rozloží nad reálnými čísly – každá dvojice komplexně sdružených kořenů dá kvadratický činitel bez reálných kořenů.

Ukázky

Rozklad na parciální zlomky.

Zadání: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

Výsledek

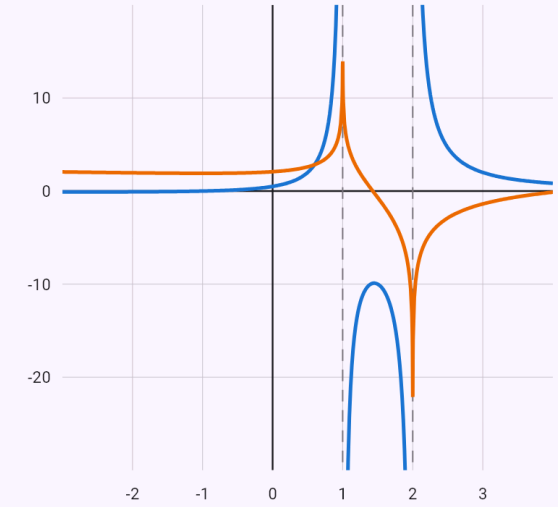
$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Postup

- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky: $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$
- Integrál součtu je součet integrálů $\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce: $(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$
- Sečteme a upravíme

$$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Graf



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Rozklad jmenovatele x⁴ + 1 nad reálnými čísly.

Zadání: `int(1/(x^4 + 1))`

Výsledek

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \text{-}\right.\right.$$

Postup

- Jmenovatel rozložíme na součin nad $\mathbb{R}$: jeho komplexní kořeny tvoří komplexně sdružené dvojice r, r̄ a každá dvojice dává kvadratický činitel $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2\cdot\mathrm{Re}\, r\cdot x + |r|^2$, který už reálné kořeny nemá:
$$x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

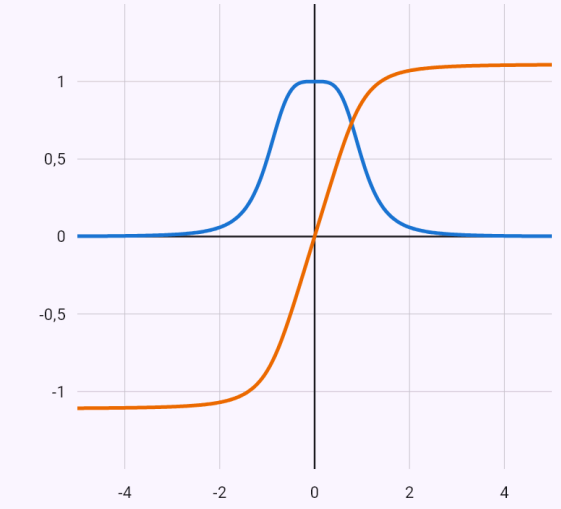
- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky
$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$

- Integrál součtu je součet integrálů
$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int \text{-}$$

- Jmenovatel nemá reálné kořeny: z čitatele oddělíme násobek derivace jmenovatele (vede na ln), zbytek po doplnění jmenovatele na čtverec vede na arctg
$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \text{-}$$

- Jmenovatel nemá reálné kořeny: z čitatele oddělíme násobek derivace jmenovatele (vede na ln), zbytek po doplnění jmenovatele na čtverec vede na arctg
$$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

Graf



$f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \sqrt{2}\,\mathrm{arc}$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Zkouška parciálních zlomků přes společného jmenovatele.

Zadání: `int(1/(x^3 + 1))`

Výsledek

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-$$

Postup

- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right) dx$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right) dx = \int \frac{2-x}{3(x^2-x+$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

- Jmenovatel nemá reálné kořeny: z čitatele oddělíme násobek derivace jmenovatele (vede na ln), zbytek po doplnění jmenovatele na čtverec vede na arctg

$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$

- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2\sqrt{}}{3}$$

- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(-\frac{\ln(x^2-x+1)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$

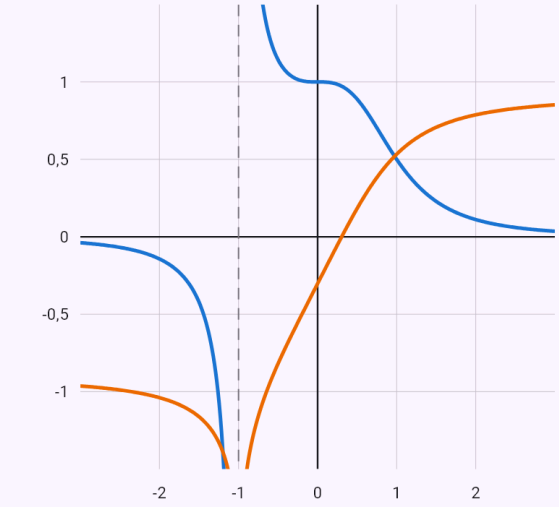
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$

- Sečteme a upravíme

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$

Graf



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-}{6}$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Goniometrické funkce

Přednostně vzorce (sin²x = (1 − cos 2x)/2, součiny na součty), u liché mocniny substituce t = sin x nebo t = cos x, u racionální funkce sinu a kosinu substituce podle parity, univerzální substituce t = tg(x/2) až nakonec.

Ukázky

Lichá mocnina sinu – substituce t = cos x.

Zadání: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

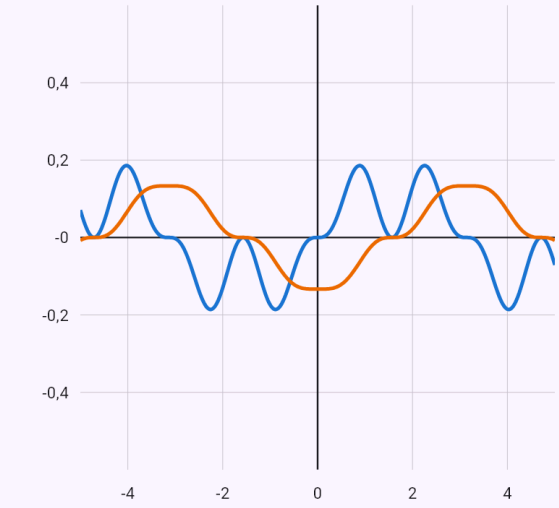
Výsledek

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \, .$$

Postup

- Lichá mocnina – substituce $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- Integrál součtu je součet integrálů:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Vrátíme se k původní proměnné:
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce: $\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$
- Sečteme a upravíme podle vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Graf



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Zkouška: derivace po členech a úprava vzorcem 1 + tg²x = 1/cos²x.

Zadání: `int(1/cos(x)^4)`

Výsledek

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

Postup

- Funkce se nezmění při současné změně znaménka sinu i kosinu – substituce $t = \operatorname{tg} x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$
- Integrál součtu je součet integrálů:
  $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1\,dt = t$
- Vrátíme se k původní proměnné:
  $t = \operatorname{tg} x:\quad \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$

- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce
  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl
  $\left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$
- Sečteme a upravíme podle vzorce $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos}$

Hyperbolické funkce

Tabulkové integrály (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tgh x + C, …), ∫tgh x dx přes logaritmus derivace, per partes (x sinh x, argsinh x), druhé mocniny vzorci sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tgh²x = 1 − 1/cosh²x; ostatní z definice přes exponenciály.

Ukázky

Vzorec sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Zadání: `int(sinh(x)^2)`

Výsledek

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Postup

- Použijeme vzorec $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$

- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce: $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \sinh^2 x$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl
  $\left(\frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$
- Sečteme a upravíme podle vzorce $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$

Odmocniny

Integrály s odmocninou z lineární lomené funkce substitucí, s odmocninou z kvadratického trojčlenu Eulerovou substitucí a binomické integrály podle Čebyševových podmínek – když žádná neplatí, aplikace řekne, že integrál není elementární.

Ukázky

Eulerova substituce.

Zadání: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Výsledek

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Postup

- Eulerova substituce (1. typu) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – integrál přejde na racionální funkci proměnné t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- Vrátíme se k původní proměnné

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Zkouška – derivace výsledku (primitivní funkce) je integrovaná funkce

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

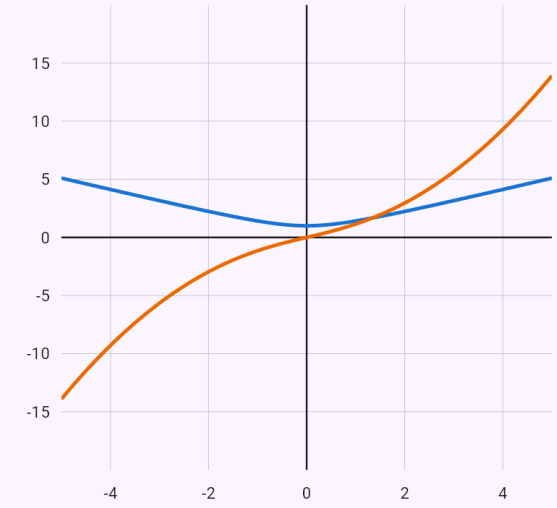
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Sečteme a upravíme

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Graf



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro C = 0 (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Známá omezení

- U některých integrálů najdeme výsledek bez postupu – aplikace to v postupu uvede.

- Výpočet bez postupu, který trvá příliš dlouho, aplikace přeruší a řekne to.
- Zkoušku u dlouhých výsledků, kde by úprava na integrovanou funkci nebyla čitelná (několik členů s odmocninami čísel, třeba $\int 1/(x^4 + 1)\,dx$), aplikace vynechá.

31. Určitý integrál a jeho aplikace

Určitý integrál aplikace spočítá Newtonovou–Leibnizovou formulí a nakreslí plochu pod grafem – část nad osou x jinou barvou než pod ní. Umí i nevlastní integrály a aplikace: plochu, délku křivky, objem a plášť rotačního tělesa, i pro křivky zadané parametricky a v polárních souřadnicích.

Určitý integrál

Primitivní funkci aplikace najde stejně jako u neurčitého integrálu a dosadí meze. Při substituci meze rovnou přepočítá. Na intervalu souměrném podle nuly využije symetrii: lichá část integrálu je nula bez hledání primitivní funkce a $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ pozná jako plochu půlkruhu. Nemá-li integrál elementární primitivní funkci, dá přesný tvar s vyšší funkcí (třeba 2 Si(π)) a číslo k němu spočítá z mocninné řady s odhadem chyby; když přesný tvar nenajde, spočítá hodnotu numericky a řekne kterou metodou.

Písmena v zadání ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,dx$ od $-r$ do r) bere jako kladné parametry: výsledek je vzorec ($\pi r^2/2$), ověřený numericky pro různé hodnoty parametrů, a graf má posuvník pro každé písmeno.

Jak zadat

`int(x^2, x, 0, 3)`	Integrál s proměnnou a mezemi.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	Z fotky nebo v zápisu LaTeX.
`x^2`	Funkce s čipem „Integrovat“ – meze vyplníte do polí.

Ukázky

Substituce s přepočtem mezí.

Zadání: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Výsledek

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

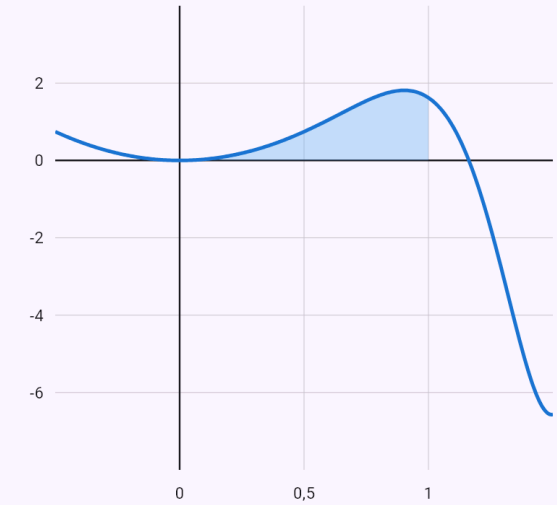
Řešit numerickou metodou:

Σ Simpson | Σ Lichoběžník | Σ Romberg

Postup

- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Substituce $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme: $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

Graf



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Lichá část na souměrném intervalu je nula, zbytek je plocha půlkruhu – výsledek π.

Zadání: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Výsledek

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx =$$

Řešit numerickou metodou:

Σ Simpson | Σ Lichoběžník | Σ Romberg

Postup

- Interval je souměrný podle nuly, integrál rozdělíme na lichou část a zbytek

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

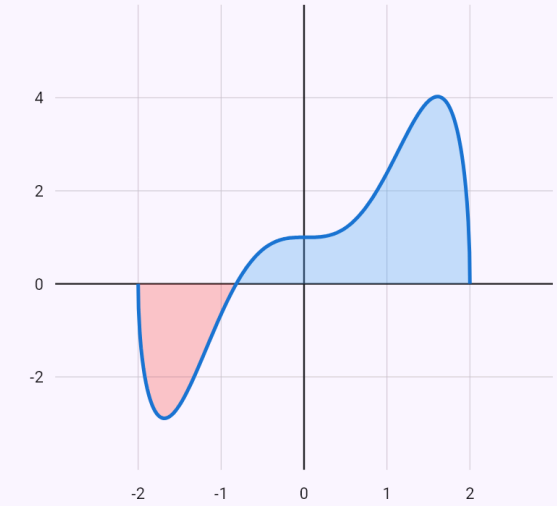
- Funkce $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ je lichá (f(−x) = −f(x)): na intervalu ⟨−2; 2⟩ se plocha nad osou a pod osou odečtou, integrál je nula bez hledání primitivní funkce:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 0$$

- Graf √(r² − x²) je horní půlkružnice o poloměru r = 2, integrál je plocha půlkruhu πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Graf



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Primitivní funkce není elementární: přesně 2 Si(π), hodnota z mocninné řady.

Zadání: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Výsledek

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

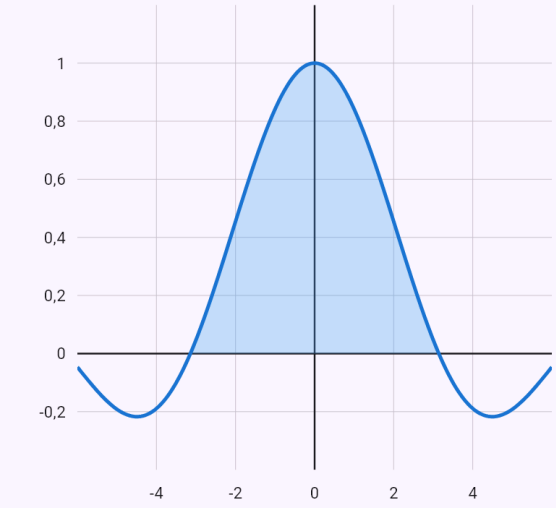
Číslo k přesnému tvaru spočítá i numerická metoda:

Σ Simpson | Σ Lichoběžník | Σ Romberg

Postup

- Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je sudá (f(−x) = f(x)), graf je souměrný podle osy y, takže integrál přes $\langle -\pi;\,\pi\rangle$ je dvojnásobek integrálu přes $\langle 0;\,\pi\rangle$: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$
- Primitivní funkce není elementární, je to vyšší funkce – přesný výsledek zapíšeme pomocí ní $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$
- Číslo k přesnému tvaru spočítáme z mocninné řady vyšší funkce: $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Pro t = π sečteme 6 členů. Řada je alternující, chyba je menší než první vynechaný člen, $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ (odhad alternující řady): $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Graf



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Integrál s parametrem r – plocha půlkruhu, πr²/2; posuvníkem v grafu měníte r.

Zadání: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Výsledek

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Postup

- Písmena jiná než proměnnou bereme jako kladné parametry: $r > 0$
- Odmocnina z rozdílu čtverců – goniometrická substituce $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, odmocnina $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$: $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Integrál součtu je součet integrálů $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme: $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

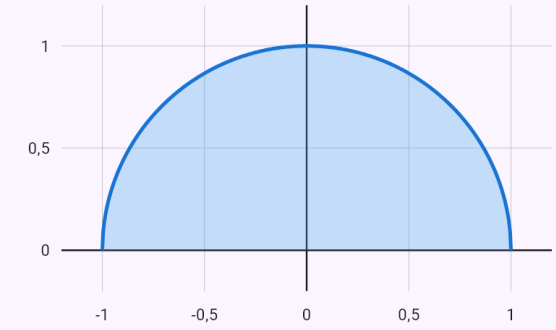
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

Hodnoty parametrů

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Graf



Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Nevlastní integrál

Nekonečnou mez nebo neomezenou funkci aplikace řeší limitou primitivní funkce a řekne, zda integrál konverguje, nebo diverguje. Když limita primitivní funkce nejde spočítat, rozhodne srovnávacím kritériem.

Integrály ∫₀^∞ x^(s − 1) lnᵏx/(xⁿ + aⁿ)^m dx (0 < s < mn, k = 0 až 3) spočítá přesně i bez primitivní funkce: jako k-tou derivaci integrálu s parametrem I(s) podle s. I(s) najde substitucí t = xⁿ/(xⁿ + aⁿ) přes betafunkci a větu o doplňku (čip „Betafunkce“), nebo po klíčové dírce kolem kladné poloosy přes rezidua (čip „Rezidua“). Kde primitivní funkce existuje, zůstává výchozí Newtonova–Leibnizova formule (čip „Primitivní funkce“). Hodnotu vždy ověří numericky.

Jiný nevlastní integrál bez primitivní funkce aplikace na každém konci (u nekonečné meze i u bodu, kde funkce roste nade všechny meze) porovná s 1/x^α limitním srovnávacím kritériem. Teprve když na všech koncích konverguje, spočítá hodnotu numericky (≈); divergentní integrál ohlásí jako divergentní.

Ukázky

Nekonečná horní mez.

Zadání: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Výsledek

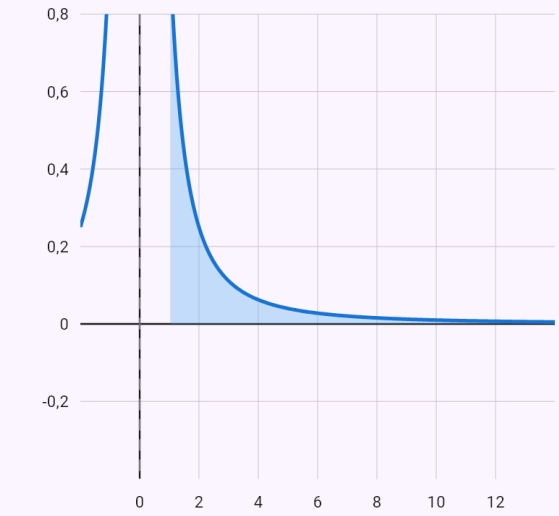
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Postup

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Graf



$f(x) = \frac{1}{x^2}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Funkce neomezená u dolní meze.

Zadání: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Výsledek

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Řešit numerickou metodou:

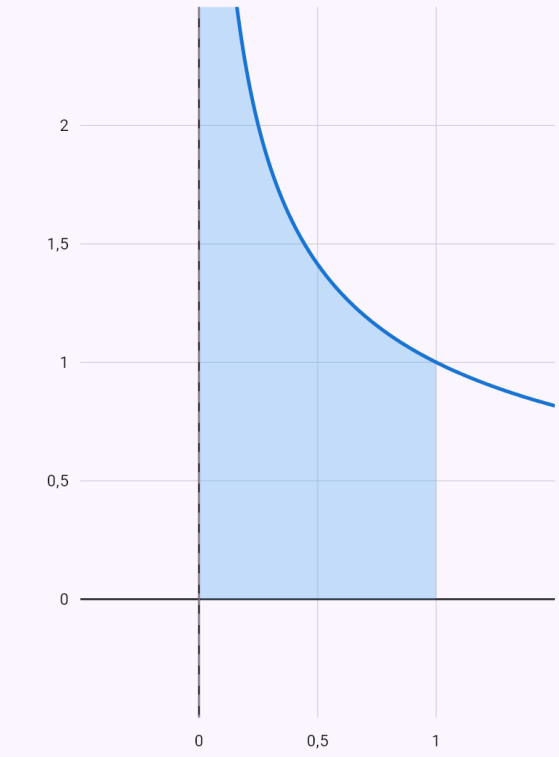
Σ Simpson | Σ Lichoběžník | Σ Romberg

Postup

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Graf



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I″(4) přes betafunkci – 5√3π³/972.

Zadání: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Výsledek

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Postup

- Logaritmus vznikne derivováním podle parametru s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2} x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Zadaný integrál je proto derivace integrálu s parametrem $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, který konverguje pro $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. I(s) spočítáme pro obecné s, zderivujeme a dosadíme.
- Substitucí přejde integrál na ⟨0; 1⟩ a vyjde Eulerova betafunkce B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^{7}}}$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Betafunkci vyjádříme gamafunkcí, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), a použijeme větu o doplňku Γ(p)Γ(1 − p) = π/sin πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

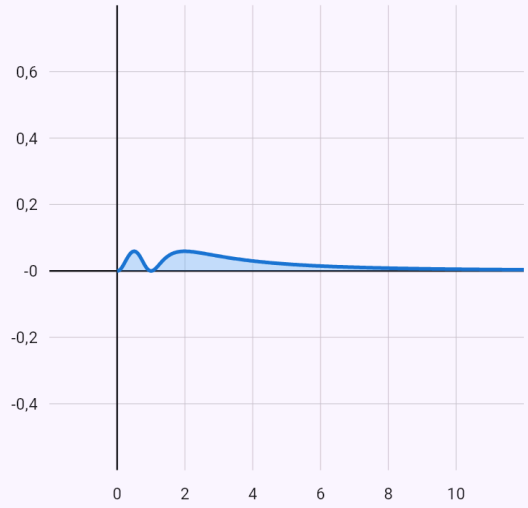
- Derivace podle parametru s (řádu 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Dosadíme s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Graf



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Tentýž integrál po klíčové dírce přes rezidua.

Zadání: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Rezidua

Výsledek

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Postup

- Logaritmus vznikne derivováním podle parametru s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Zadaný integrál je proto derivace integrálu s parametrem $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, který konverguje pro $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. I(s) spočítáme pro obecné s, zderivujeme a dosadíme.
- Mocninu z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) bereme s argumentem z v intervalu (0; 2π) a integrujeme po klíčové dírce C kolem kladné reálné poloosy. Na horním břehu je z^(s − 1) = x^(s − 1), na dolním x^(s − 1)·e^(2πis); velká i malá kružnice v limitě nepřispívají, protože $0 < s < 6$. Uvnitř leží póly $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ řádu 1 a podle reziduové věty (pro s, které není celé číslo)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Póly jsou jednoduché, reziduum je podíl čitatele a derivace jmenovatele v pólu; použijeme $z^n = -a^n$

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Dosadíme mocniny pólů, sečteme geometrickou řadu a výsledek zjednodušíme. Vzorec jsme odvodili pro s, které není celé číslo (jinak je 1 − e^(2πis) = 0). Obě strany jsou ale v s spojité, takže platí i pro s = 4 – limitou s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

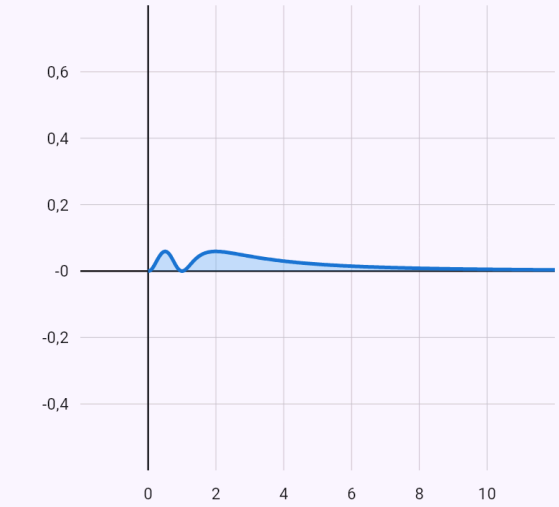
- Derivace podle parametru s (řádu 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Dosadíme s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Graf



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Bez primitivní funkce: konvergence srovnáním s 1/x³, pak hodnota numericky.

Zadání: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

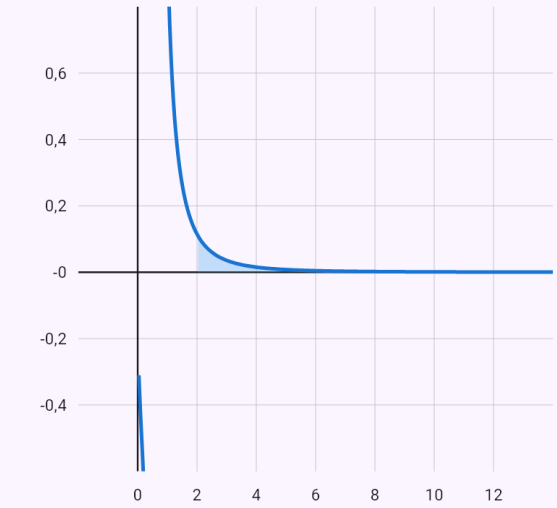
Výsledek

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\,dx \approx 0{,}1197$$

Postup

- Pro $x \to \infty$ porovnáme integrand s $\frac{1}{x^3}$ (limitní srovnávací kritérium): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. Limita je kladné číslo, integrál se tam tedy chová stejně jako integrál z $\frac{1}{x^3}$, a ten pro $\alpha = 3 > 1$ konverguje.
- Integrál na všech koncích konverguje, jeho hodnota: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\,dx \approx 0{,}1197$
- Přesný tvar se najít nepodařilo, hodnotu nevlastního integrálu jsme spočítali numericky adaptivní Gaussovou–Kronrodovou kvadraturou.

Graf



$f(x) = \frac{1}{x^3 + \ln x}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Plocha pod křivkou a mezi křivkami

Plochu mezi grafem a osou x nebo mezi dvěma křivkami aplikace počítá jako integrál absolutní hodnoty rozdílu – části nad i pod se sčítají kladně. Meze nemusíte zadávat: najde je jako průsečíky křivek.

Jak zadat

`plocha(x^2, x)`	Plocha mezi dvěma křivkami, meze z průsečíků.
`plocha(sin x, 0, pi)`	Plocha mezi křivkou a osou x na intervalu.
`x^2`	Funkce s čipem „Integrovat“ → „Plocha mezi křivkami“; druhou křivku a meze vyplníte do polí.

Ukázky

Plocha mezi parabolou a přímkou.

Zadání: `x^2` Plocha mezi křivkami, druhá křivka x

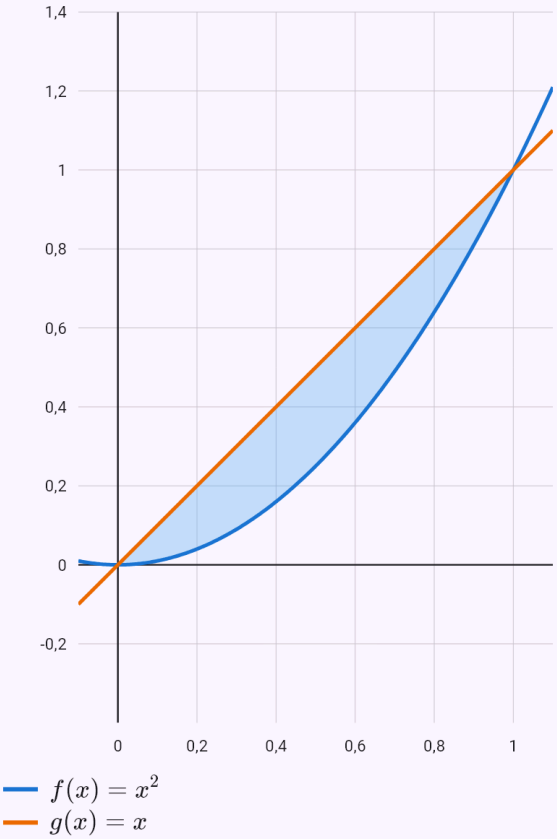
Výsledek

$$S = \frac{1}{6}$$

Postup

- Meze jsou průsečíky křivek: $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- Obsah plochy mezi křivkami (části nad i pod se počítají kladně), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$: $S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- Výraz v absolutní hodnotě na intervalu nemění znaménko – absolutní hodnotu odstraníme podle něj: $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- Integrál součtu je součet integrálů: $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a) $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Graf



Vybarvená plocha – její obsah je výsledek (části nad i pod osou se počítají kladně).

Délka křivky

Délku grafu funkce na intervalu aplikace počítá vzorcem l = ∫√(1 + f′²) dx. Odmocninu se snaží zjednodušit (u půlkružnice vyjde arkussinus); kde integrál nemá elementární primitivní funkci, je výsledek numerický.

Jak zadat

`delka(x^(3/2), 0, 4)`	Délka křivky na intervalu (i „délka“).

Ukázky

Délka půlkružnice.

Zadání: `sqrt(1 - x^2)` Délka křivky, meze −1 a 1

Výsledek

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Postup

- Délka křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

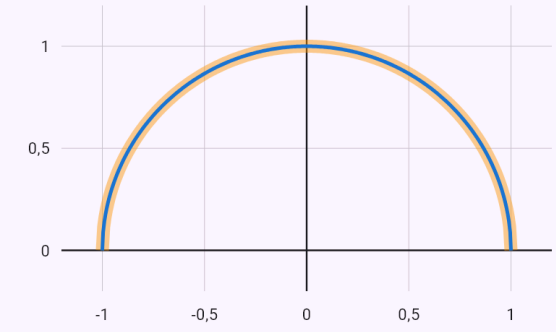
- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Graf



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Zvýrazněný oblouk – jeho délka je výsledek.

Objem rotačního tělesa

Objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x aplikace počítá vzorcem V = π∫f² dx (mezi dvěma křivkami jako mezikruží), kolem osy y metodou válcových slupek. Těleso ukáže i ve 3D – otáčíte jím prstem.

Jak zadat

`objem(sqrt(x), 0, 4)`	Objem tělesa rotací kolem osy x.
`objem(x^2, 0, 2, y)`	Rotace kolem osy y.

Ukázky

Rotační paraboloid.

Zadání: `sqrt(x)` Objem tělesa, meze 0 a 4

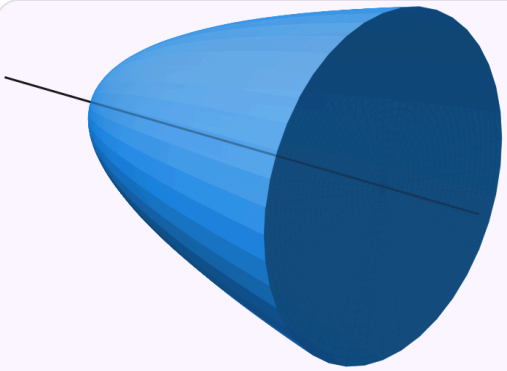
Výsledek

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Postup

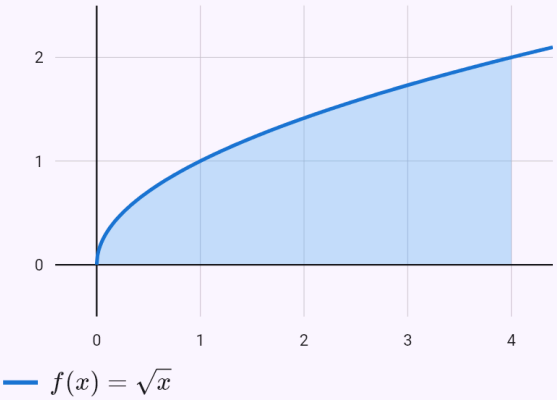
- Objem rotačního tělesa kolem osy x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a): $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním: $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy x – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



Plášť rotačního tělesa

Obsah pláště aplikace počítá vzorcem S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; součin pod odmocninou se často zjednoduší (u koule vyjde konstanta).

Jak zadat

`povrch(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	Plášť tělesa rotací kolem osy x.

Ukázky

Povrch koule o poloměru 2.

Zadání: `sqrt(4 - x^2)` Povrch tělesa, meze −2 a 2

Výsledek

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Postup

- Obsah pláště rotačního tělesa kolem osy x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

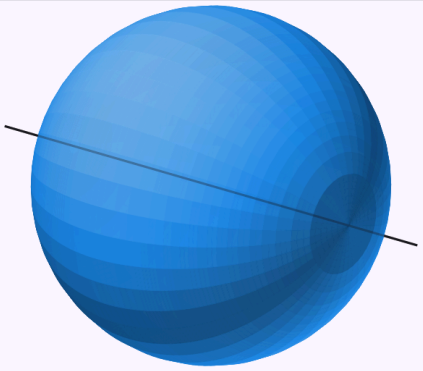
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 2\,dx = 2x$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a):

$$\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$$

- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním:

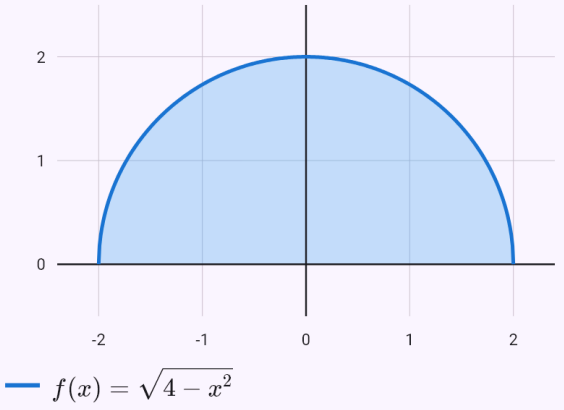
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy x – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



Aplikace s parametry

Každé písmeno kromě x je kladný parametr a výsledek je vzorec, například objem koule 4πr³/3. Číselné kontroly běží s dosazenými hodnotami. Graf a 3D těleso mají posuvník každého parametru.

Jak zadat

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Objem koule o poloměru r.

Ukázky

Objem koule o poloměru r.

Zadání: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Výsledek

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Postup

- Písmena jiná než proměnnou bereme jako kladné parametry: $r > 0$
- Objem rotačního tělesa kolem osy x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

  $$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

- Integrál součtu je součet integrálů:

  $$\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $$\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

  $$\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$$

- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním:

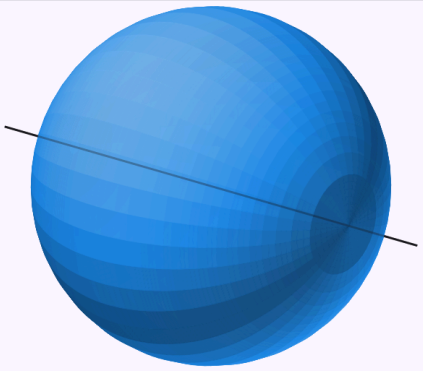
  $$V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Hodnoty parametrů

$r = 1$

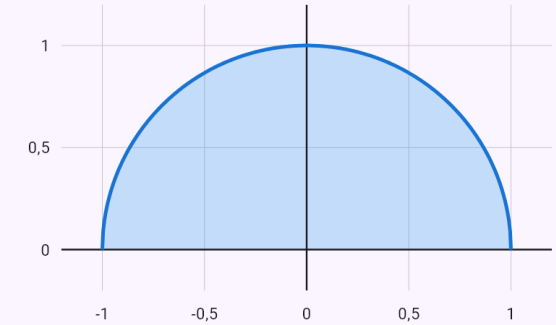
$V \approx 4{,}189$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy x – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Komolý kužel s poloměry a, b a výškou h.

Zadání: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Výsledek

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Postup

- Písmena jiná než proměnnou bereme jako kladné parametry: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- Objem rotačního tělesa kolem osy x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Hodnoty parametrů

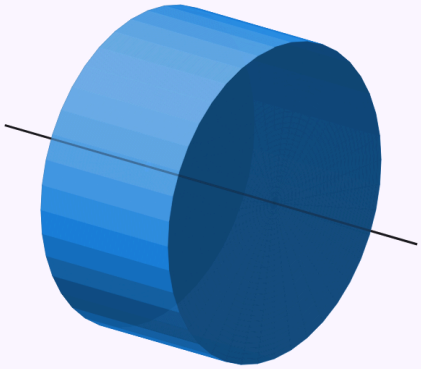
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

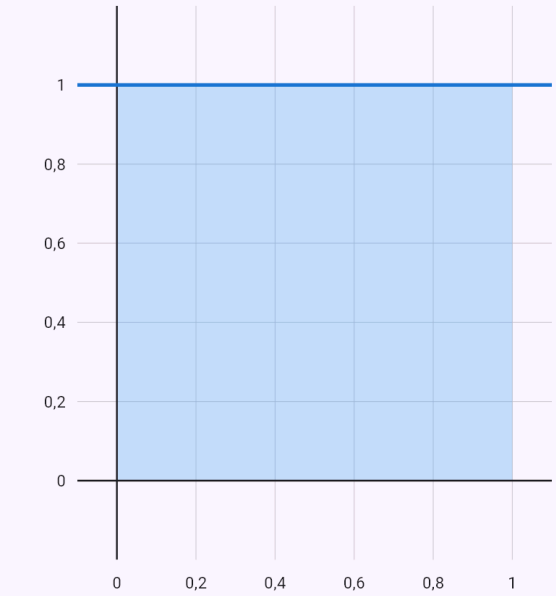
$V \approx 3{,}142$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy x – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



Těžiště

Těžiště oblasti pod křivkou nebo mezi dvěma křivkami, oblouku a rotačního tělesa počítá z integrálů s celým postupem; výsledek vyznačí v grafu. Písmena fungují jako parametry.

Jak zadat

`teziste(x^2, 0, 1)`	Oblast pod křivkou; zadejte i druhou funkci pro oblast mezi křivkami.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	Poslední slovo oblouk nebo teleso volí oblouk nebo rotační těleso.

Ukázky

Těžiště půlkruhu 4r/(3π).

Zadání: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Výsledek

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Postup

- Písmena jiná než proměnnou bereme jako kladné parametry: $r > 0$
- Těžiště počítáme z integrálů
  $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$
  $y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$
- Spočítáme integrál: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Odmocnina z rozdílu čtverců – goniometrická substituce $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, odmocnina $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($
- Spočítáme integrál: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Substituce $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$:
  $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme:
  $x = -r \Rightarrow t = 0, \quad x = r \Rightarrow t = 0$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^0 = 0-0=0$$

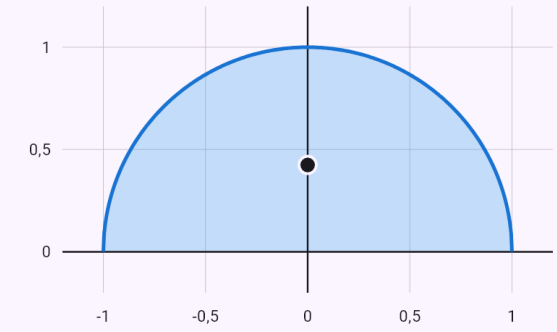
- Spočítáme integrál: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$
- Integrál součtu je součet integrálů:
  $\int\left(r^2-x^2\right)dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int r^2\,dx = r^2x$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3}-\left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Souřadnice těžiště jsou podíly integrálů
  $x_T = \frac{M_y}{S} = 0$
  $y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$

Hodnoty parametrů

$r = 1$

$T \approx [0;\,0{,}424]$

Graf



$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

Bod T je těžiště.

Těžiště kužele ve 3/4 výšky od vrcholu.

Zadání: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Výsledek

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Postup

- Písmena jiná než proměnnou bereme jako kladné parametry: $h > 0,\ r > 0$
- Těžiště počítáme z integrálů

  $$x_T = \frac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$

  $$y_T = 0$$

- Spočítáme integrál: $J = \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2}\, dx$
- Konstantu vytkneme před integrál:

  $$\int \frac{r^2 x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2} \int x^2\, dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

  $$\int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2 x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$$

- Spočítáme integrál: $M_y = \int_0^h \frac{r^2 x^3}{h^2}\, dx$
- Konstantu vytkneme před integrál:

  $$\int \frac{r^2 x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2} \int x^3\, dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

  $$\int_0^h \frac{r^2 x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2 x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2 r^2}{4} - 0 = \frac{h^2 r^2}{4}$$

- Souřadnice těžiště jsou podíly integrálů

  $$x_T = \frac{M_y}{J} = \frac{3h}{4}$$

  $$y_T = 0$$

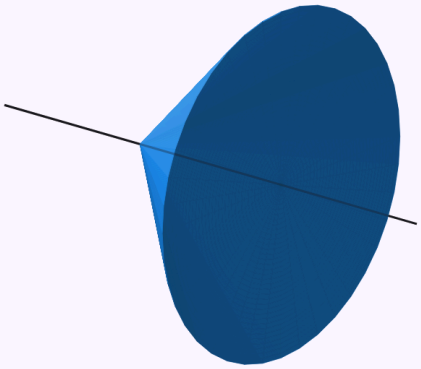
Hodnoty parametrů

$h = 1$

$r = 1$

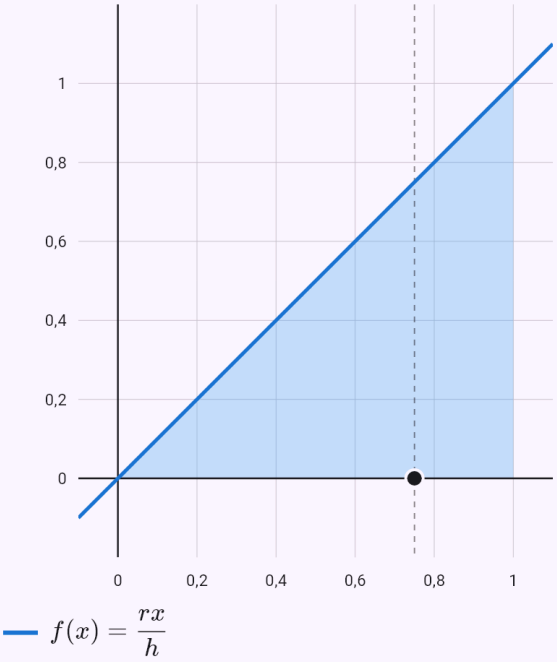
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy x – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



$f(x) = \frac{rx}{h}$

Bod T je těžiště.

Křivky zadané parametricky a v polárních souřadnicích

Křivku x = φ(t), y = ψ(t) napište na dva řádky, křivku v polárních souřadnicích jako r = ρ(φ). Aplikace pak u čipu „Integrovat“ nabídne plochu, délku, objem a plášť; meze parametru jsou nepovinné (bez nich od 0 do 2π). Graf vybarví plochu a objem a plášť ukáže jako 3D těleso. Rotovat lze kolem osy x i y, u osy y přidejte poslední argument y.

Jak zadat

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Parametrická křivka na dva řádky.
`r = 1 + cos(phi)`	Křivka v polárních souřadnicích (i r^2 = … pro lemniskátu).
`delka(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	Psaný zápis s parametrem a mezemi.

Ukázky

Plocha pod obloukem cykloidy.

Zadání: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Plocha

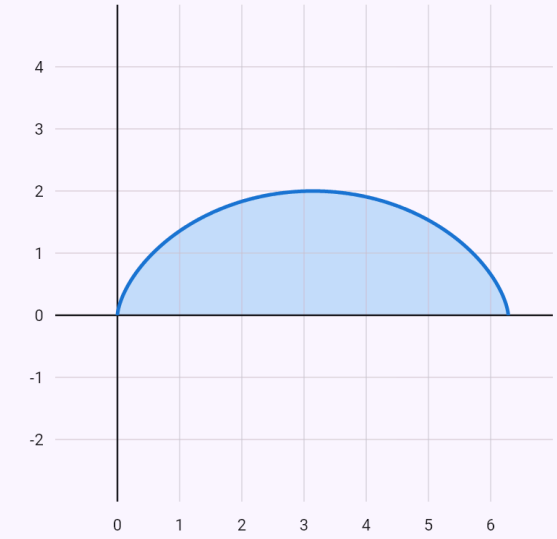
Výsledek

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Postup

- Derivace podle parametru:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- Obsah plochy pod parametricky zadanou křivkou (u uzavřené křivky obsah uvnitř) pro $t \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,
  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$:
  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt \right|$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1\, dt = t$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -2\cos t\, dt = -2 \int \cos t\, dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4} \right.$

Graf



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

Křivka zadaná parametricky (nebo v polárních souřadnicích) nakreslená pro zvolené meze parametru.

Délka kardioidy.

Zadání: `r = 1 + cos(phi)` Délka křivky

Výsledek

$$l = 8$$

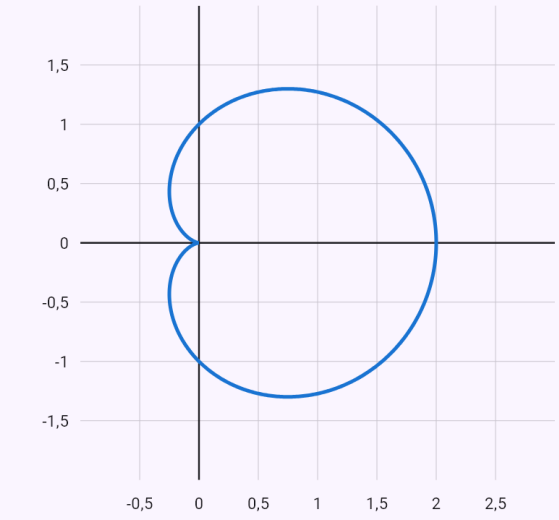
Postup

- Derivace podle parametru: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- Délka křivky v polárních souřadnicích pro $\varphi \in \langle 0;\, 2\pi \rangle$,
  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$
  $l = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\right.\right.$
- Interval rozdělíme v nulových bodech výrazů v absolutní hodnotě (π) a v každé části absolutní hodnotu odstraníme podle znaménka
  $\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_{0}^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos$
- Konstantu vytkneme před integrál
  $\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{0}^{\pi} = 4 - 0 = 4$
- Konstantu vytkneme před integrál
  $\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)

$\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) =$

- Hodnoty částí sečteme:
  $\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$

Graf



$r = \cos\varphi + 1$

Křivka zadaná parametricky (nebo v polárních souřadnicích) nakreslená pro zvolené meze parametru.

Astroida otočená kolem osy y.

Zadání: `x = cos(t)^3`

```
y = sin(t)^3
```

Výsledek

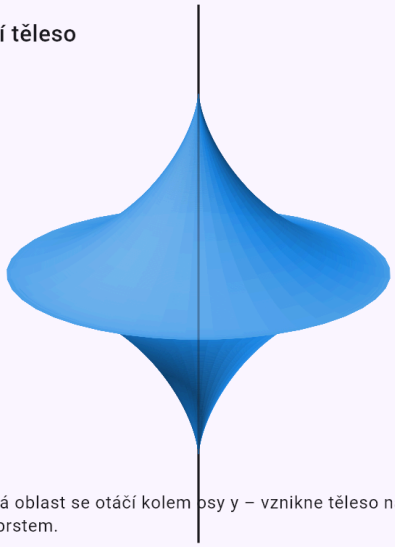
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Postup

- Derivace podle parametru:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- Těleso vytvoří rotací část křivky vpravo od osy y (x ≥ 0)
  $t \in \left\langle 0;\ \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2};\ 2\pi \right\rangle$
- Objem rotačního tělesa kolem osy y pro $t \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,
  $V = \pi \left| \int_\alpha^\beta x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Lichá mocnina – substituce $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -3w^4\, dw = -3 \int w^4\, dw$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) - F(a)
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3} \right) \right.$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Lichá mocnina – substituce $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$

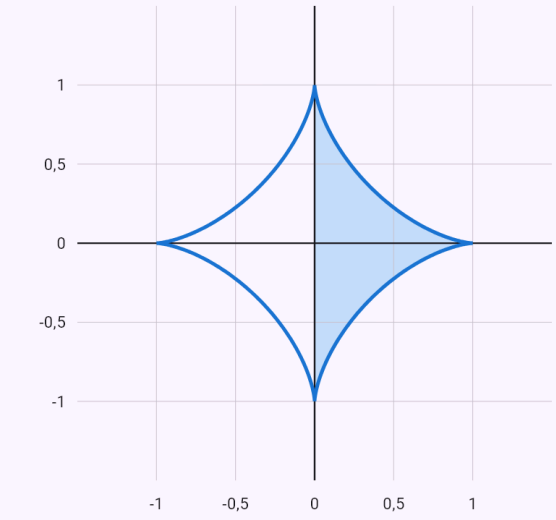
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme: $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním: $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy y – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

Křivka zadaná parametricky (nebo v polárních souřadnicích) nakreslená pro zvolené meze parametru.

Křivky zadané rovnicí

U rovnice s x a y (x³ + y³ = 3xy) nabídne čip „Integrovat“ plochu, délku, objem a plášť. Bez mezí počítá s celou uzavřenou křivkou: kružnici a elipsu zapíše parametricky přes cos a sin, smyčku procházející počátkem (Descartův list) pomocí přímek y = tx – plochu smyčky pak spočítá přesně z výsečí, délku, objem a plášť numericky. S mezemi v x použije horní větev y = f(x).

Jak zadat

`x^3 + y^3 = 3xy`	Uzavřená křivka – čip „Integrovat“ bez mezí.
`y^2 = x^3`	Neuzavřená křivka – čip „Integrovat“ s mezemi v x (horní větev y = x^(3/2)).

Ukázky

Plocha smyčky Descartova listu – přes přímky y = tx a výseče, S = 3/2.

Zadání: `x^3 + y^3 = 3xy` Integrovat → Plocha

Výsledek

$$S = \frac{3}{2}$$

Postup

- Smyčku procházející počátkem zapíšeme parametricky pomocí přímek y = tx – dosadíme do rovnice a vyjádříme x

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- Obsah smyčky sečteme z výsečí od počátku: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, a na přímce y = tx je x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Substituce $u = t^3+1,\ du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

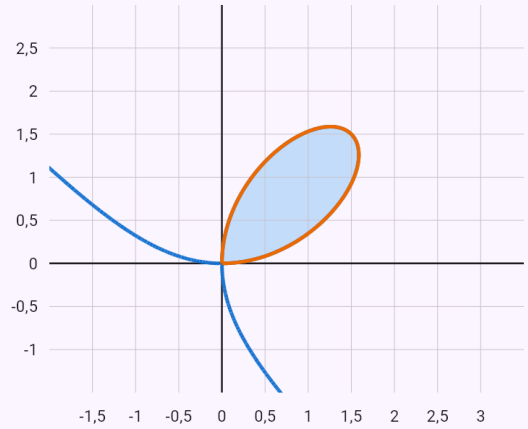
$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Vrátíme se k původní proměnné: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce.

Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Graf



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\ y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Celá křivka zadaná rovnicí; zvýrazněná je část, se kterou se počítá.

Plocha lemniskáty – přes polární souřadnice.

Zadání: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

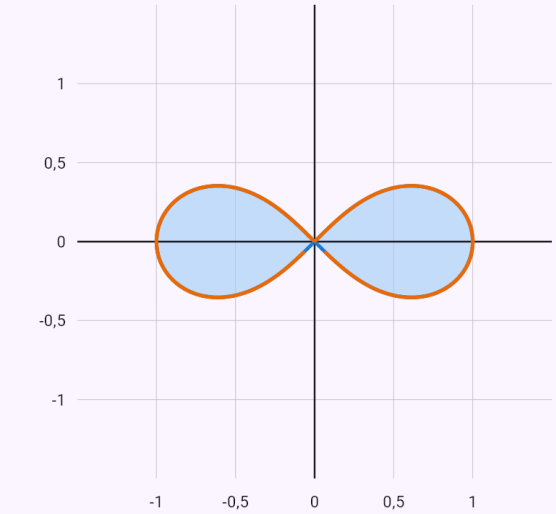
Výsledek

$$S = 1$$

Postup

- Křivku převedeme do polárních souřadnic
  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$
- Obsah plochy ohraničené křivkou v polárních souřadnicích (sečteme výseče z počátku) pro
  $\varphi \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle, S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$
  $$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $$\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$
- Křivka má shodné smyčky (2), hodnotu jedné vynásobíme jejich počtem: $2 \cdot 1$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním:
  $$S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Graf



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Celá křivka zadaná rovnicí; zvýrazněná je část, se kterou se počítá.

Pootočená elipsa s členem xy.

Zadání: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Výsledek

$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Postup

- Křivka je pootočená elipsa – osy najdeme z úhlu otočení a zapíšeme ji parametricky

  $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos t$

- Derivace podle parametru:

  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$

- Obsah plochy pod parametricky zadanou křivkou (u uzavřené křivky obsah uvnitř) pro $t \in \langle 0;\, 2\pi \rangle$,

  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$

  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) d$

- Integrál součtu je součet integrálů

  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) dt = \int -$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int \cos^2 t\, dt$

- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:

  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$

- Integrál součtu je součet integrálů

  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:

  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $\int -\frac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\frac{4}{3} \int \cos t \cdot \sin t\, dt$

- Použijeme vzorec $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:

  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \sin(2t)\, dt$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:

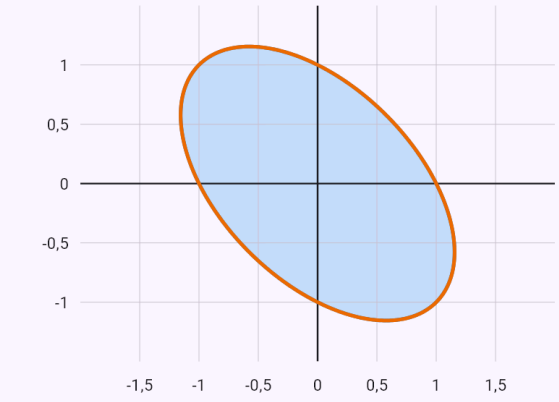
  $\int \sin(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int \sin^2 t\, dt$

- Použijeme vzorec $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\,dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\,dt$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{2}\,dt = \frac{t}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt$$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $$\int \cos(2t)\,dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- Newtonova–Leibnizova formule, F(b) − F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$$
- Integrál vyšel záporně (křivka se probíhá zprava doleva) – vezmeme jeho absolutní hodnotu:
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Graf



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Celá křivka zadaná rovnicí; zvýrazněná je část, se kterou se počítá.

Známá omezení

- Délku křivky y = ∛x (a podobných) umíme jen numericky – vede na eliptický integrál, který nemá elementární primitivní funkci.
- Rotace kolem osy y jen pro oblast na jedné straně osy.
- Vzorec s parametry je jen tam, kde výsledek nezávisí na vztahu mezi parametry; když se znaménko funkce mění podle jejich hodnot, aplikace vzorec nedá.
- U implicitních křivek bez mezí umíme kuželosečky (i s členem xy), smyčku počátkem a křivky se dvěma homogenními částmi (lemniskáta).
- Určitý integrál s parametrem zatím jen s konečnými mezemi.
- Když limitní srovnávací kritérium nerozhodne (integrand v nekonečnu osciluje, třeba cos x/(x + ln x)), aplikace hodnotu bez důkazu konvergence nedá a integrál ohlásí jako zatím nevyřešený.

32. Nekonečné řady

U číselné řady aplikace nejdřív ověří nutnou podmínku konvergence a pak zvolí jedno kritérium podle tvaru řady – geometrická řada, Σ $1/n^p$, podílové, odmocninové, limitní srovnávací, integrální nebo Leibnizovo kritérium; u řady se střídavými znaménky rozliší absolutní a neabsolutní konvergenci. Kde to jde, řadu sečte. V grafu jsou členy a částečné součty.

Číselné řady

Součet aplikace najde u geometrické a teleskopické řady, u řad Σ $P(n)q^n$ a u známých řad (Σ $1/n^2 = \pi^2/6$); jinak ho spočítá numericky. Konečný součet sečte jako ve škole – teleskopický, aritmetický, geometrický, jinak člen po členu. Vyřeší i rovnici se součtem geometrické řady a ověří podmínku konvergence $|q| < 1$.

Součet s proměnnou horní mezí (suma(k^2, k, 1, n)) sečte podle vzorců pro součty mocnin, geometrický součet vzorcem a racionální člen rozkladem na parciální zlomky (teleskopicky); výsledek ověří na prvních členech.

Jak zadat

`suma(1/n^2)`	Obecný člen; index n od 1 (i sum, řada).
`suma(1/n^2, n, 1, oo)`	S indexem a počátečním členem.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	Z fotky nebo v zápisu LaTeX.
`1/n^2`	Obecný člen s čipem „Řada“ – počáteční index vyplníte do pole.
`suma(2k+1, k, 1, 100)`	Konečný součet – s indexem, dolní a horní mezí.
`suma(k^2, k, 1, n)`	Součet do n – vzorec pro součet.

Ukázky

Řada Σ 1/n² – konverguje, součet π²/6.

Zadání: `sum(1/n^2)`

Výsledek

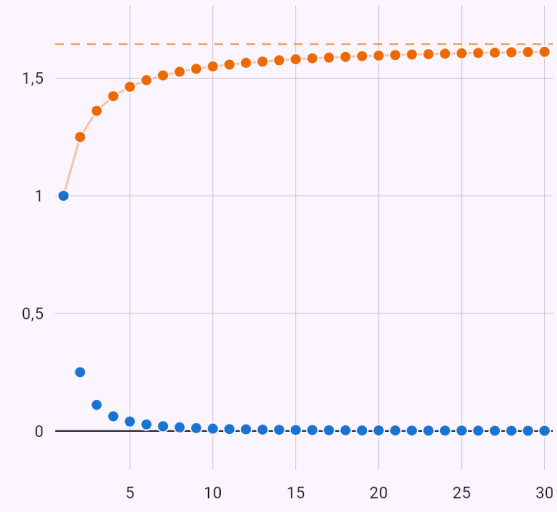
Řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Postup

- Nutná podmínka konvergence je splněna (sama o konvergenci nerozhoduje): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je typu Σ 1/n^p s p = 2 > 1 – konverguje.
- Součet známé řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Graf



členy a_n částečné součty s_n součet řady

Body jsou členy řady a_n a částečné součty s_n = a_1 + … + a_n. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Leibnizovo kritérium – konverguje neabsolutně.

Zadání: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Výsledek

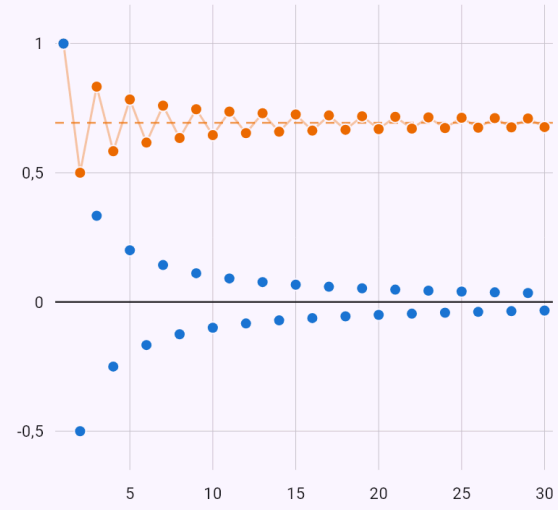
Řada konverguje, ale ne absolutně.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Postup

- Nutná podmínka konvergence je splněna (sama o konvergenci nerozhoduje): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Řada má členy různých znamének – nejdřív vyšetříme absolutní konvergenci
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
- Harmonická řada diverguje – členy seskupíme po mocninách dvou, každá skupina je aspoň 1/2
  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$
- Leibnizovo kritérium: $|a_n| = \frac{1}{n}$ klesá a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – řada konverguje.
- Závěr: řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale ne absolutně (podle Leibnizova kritéria).
- Součet známé řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Graf



Body jsou členy řady a_n a částečné součty s_n = a_1 + … + a_n. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Podílové kritérium a součet.

Zadání: `sum(n/2^n)`

Výsledek

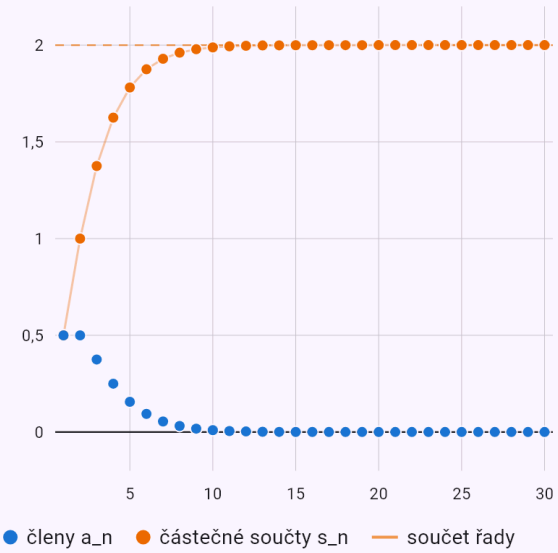
Řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Postup

- Nutná podmínka konvergence je splněna (sama o konvergenci nerozhoduje): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Podílové (d'Alembertovo) kritérium – řada konverguje.
  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$
- Řadu typu Σ P(n)·qⁿ sečteme derivováním geometrické řady: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Graf



Body jsou členy řady a_n a částečné součty s_n = a_1 + … + a_n. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Není splněna nutná podmínka – řada diverguje.

Zadání: `sum(n/(n+1))`

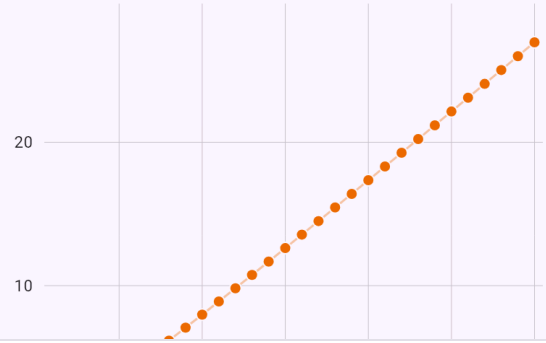
Výsledek

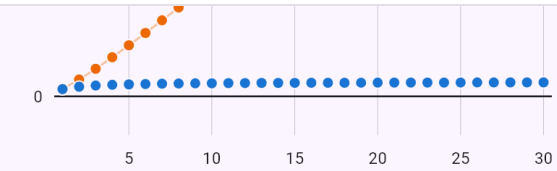
Řada diverguje.

Postup

- Nutná podmínka konvergence není splněna:
  $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Graf





Body jsou členy řady a_n a částečné součty s_n = a_1 + … + a_n. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Teleskopický součet – zbude první a poslední člen.

Zadání: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Výsledek

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Postup

- Teleskopický součet – sousední členy se navzájem odečtou, zbude jen první a poslední: $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Rovnice se součtem geometrické řady.

Zadání: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Výsledek

$$x = -1$$

Postup

- Řada je geometrická s kvocientem q = 2^x a konverguje pro $|2^x| < 1$; její součet: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Vyřešíme: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \;\Rightarrow\; x = -1$
- $x = -1$ splňuje podmínku konvergence: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Součet druhých mocnin podle vzorce.

Zadání: `sum(k^2, k, 1, n)`

Výsledek

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Postup

- Použijeme vzorce pro součty mocnin: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Součet: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Teleskopický součet do n – parciální zlomky.

Zadání: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Výsledek

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Postup

- Člen rozložíme na parciální zlomky – jejich části se v součtu postupně odečtou (teleskopický součet): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- Součet: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Mocninné řady

U mocninné řady aplikace najde poloměr konvergence podílovým kritériem, krajní body vyšetří jako číselné řady a uvede obor konvergence; kde to jde, i součet. Graf ukáže částečné součty s posuvníkem počtu členů.

Ukázky

Obor konvergence ⟨−1; 1).

Zadání: `sum(x^n/n)`

Výsledek

$$x \in \langle -1;\ 1)$$

Postup

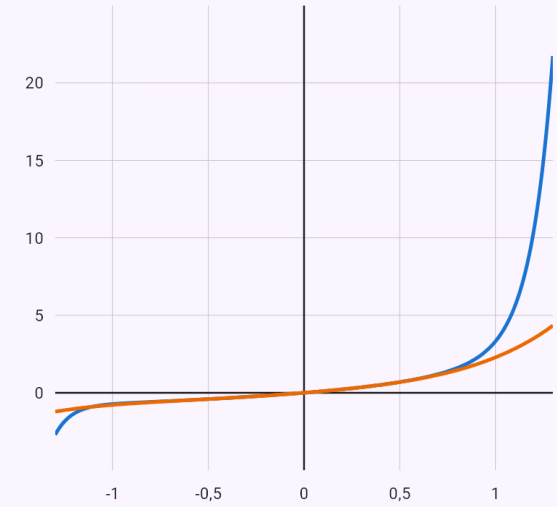
- Poloměr konvergence R = 1 podílovým kritériem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$

- Krajní bod $x = -1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale ne absolutně (podle Leibnizova kritéria).
- Krajní bod $x = 1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje podle seskupení členů harmonické řady.
- Obor konvergence: $x \in \langle -1;\ 1)$

Graf

Členů: 5



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Posuvníkem zvolíš počet sčítaných členů – částečné součty se k součtu řady blíží jen uvnitř oboru konvergence.

Taylorova řada

Taylorovu řadu funkce aplikace odvodí ze známých rozvojů (e^x, sin x, ln(1 + x), …) dosazením a určí její obor konvergence.

Jak zadat

`taylor(e^x, 0, oo)`	Funkce, bod a oo místo stupně; nebo čip „Taylorův polynom“ → „Řada“.

Ukázky

Řada ln(1 + x) a její obor konvergence.

Zadání: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Výsledek

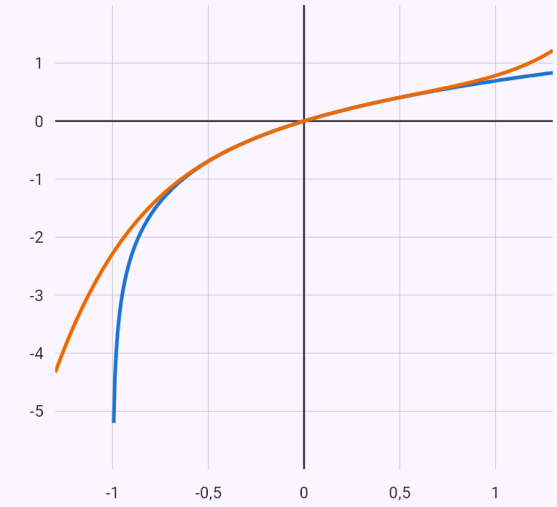
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Postup

- Ze známého rozvoje $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ dosazením $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Poloměr konvergence R = 1 podílovým kritériem $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- Krajní bod $x = -1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverguje podle seskupení členů harmonické řady.
- Krajní bod $x = 1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale ne absolutně (podle Leibnizova kritéria).
- Obor konvergence: $x \in (-1;\ 1\rangle$

Graf

Členů: 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Posuvníkem zvolíš počet sčítaných členů – částečné součty se k součtu řady blíží jen uvnitř oboru konvergence.

33. Fourierovy řady

Aplikace sestaví Fourierovu řadu funkce na intervalu jako jedné periodě (bez zadání na $\langle -\pi; \pi \rangle$), nebo sinovou či kosinovou řadu funkce na $\langle 0; L \rangle$. Funkci lze zadat i po částech.

Koeficienty počítá integrály s celým postupem (per partes s parametrem n), dosadí $\sin n\pi = 0$ a $\cos n\pi = (-1)^n$, u sudé a liché funkce využije symetrii. V bodech nespojitosti určí součet řady podle Dirichletovy věty a dosazením bodu a Parsevalovou rovností z řady odvodí součty číselných řad (třeba $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$). Graf ukáže periodické rozšíření funkce a částečné součty s posuvníkem.

Čipem „Komplexní“ (nebo zápisem fourierc) ukáže řadu i v komplexním tvaru: koeficienty c_n, jejich vztah k a_n a b_n a amplitudové a fázové spektrum.

Jak zadat

`fourier(x^2, -pi, pi)`	Funkce a interval.
`fouriersin(x, 0, pi)`	Sinová řada (fouriercos – kosinová).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Funkce po částech po řádcích, s čipem „Fourierova řada“.
`x^2`	Funkce s čipem „Fourierova řada“ – druh řady a interval vyberete tam.

Ukázky

Sudá funkce – jen kosiny; součty Σ 1/n² a Σ 1/n⁴.

Zadání: `fourier(x^2)`

Výsledek

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad x$$

Postup

- Interval $\langle -\pi;\ \pi \rangle$ bereme jako jednu periodu: $T = 2\pi$, polovina periody $l = \pi$. Hledáme řadu s koeficienty

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Funkce je sudá, $f(-x) = x^2 = f(x)$, takže koeficienty u sinů jsou nulové a zbylé stačí počítat přes polovinu intervalu

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- Koeficient a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Dosadíme meze: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- Koeficient a_n: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$
- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, tedy u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, tedy u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:

  $$\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Pro celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Dosadíme meze

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- Dosadíme koeficienty do řady

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Periodické rozšíření funkce je spojité, takže podle Dirichletovy věty je součet řady roven f(x) pro $x \in \langle -\pi;\, \pi \rangle$
- Dosazením $x = 0$ dostaneme součet číselné řady

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Dosazením $x = \pi$ dostaneme součet číselné řady

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

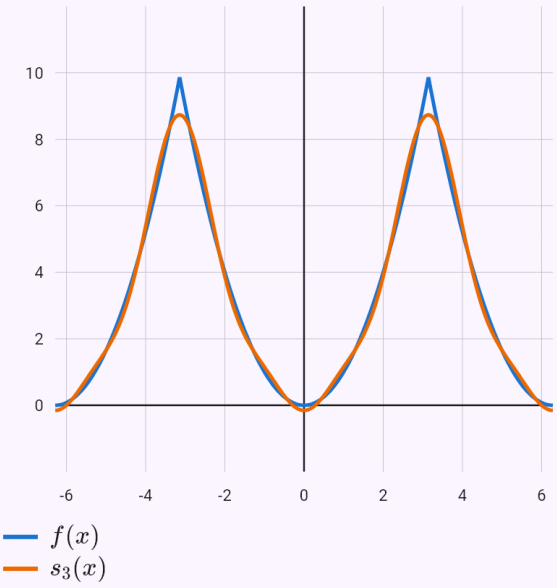
- Z Parsevalovy rovnosti dostaneme

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Graf

Členy do n = 3



Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku překmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Funkce po částech – skoky a Gibbsův jev.

Zadání: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Fourierova řada

Výsledek

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Postup

- Interval $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ bereme jako jednu periodu: $T = 2\pi$, polovina periody $l = \pi$. Hledáme řadu s koeficienty

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Funkce je lichá, $f(-x) = -f(x)$, takže absolutní člen i koeficienty u kosinů jsou nulové a koeficienty u sinů stačí počítat přes polovinu intervalu

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Koeficient b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:

$$\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Pro celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Dosadíme meze

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- Dosadíme koeficienty do řady:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Členy se sudým n jsou nulové, sčítáme jen lichá n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Podle Dirichletovy věty je součet řady roven f(x) pro $x \in (-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi)$; v bodě nespojitosti je průměrem jednostranných limit

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme součet číselné řady

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

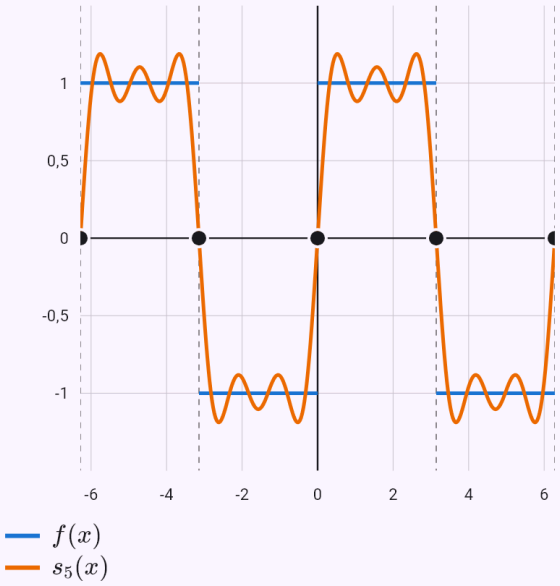
- Z Parsevalovy rovnosti dostaneme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Graf

Členy do n = 5



Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku překmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Sinová řada a součet 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Zadání: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Výsledek

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

Postup

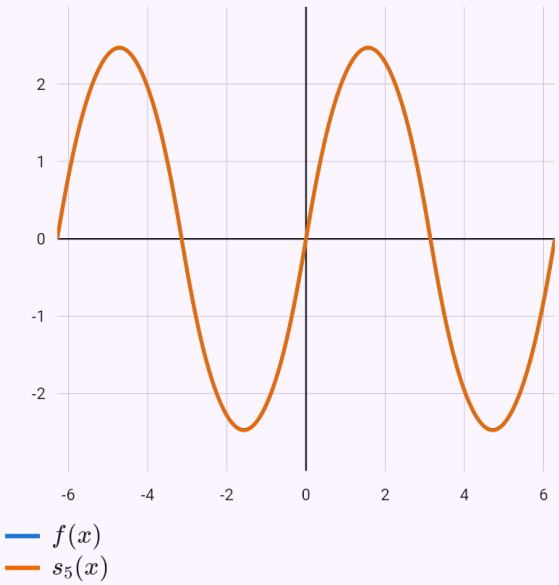
- Funkci z intervalu $\langle 0;\ \pi\rangle$ rozšíříme lichě a pak periodicky $(T = 2\pi)$ – vznikne sinová řada $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, kde
  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$
- Koeficient b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$
- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, tedy u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$
  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$
- Konstantu vytkneme před integrál
  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$
- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, tedy u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$
  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:
  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Pro celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Dosadíme meze
  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$
- Dosadíme koeficienty do řady:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$
- Členy se sudým n jsou nulové, sčítáme jen lichá n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Periodické rozšíření funkce je spojité, takže podle Dirichletovy věty je součet řady roven f(x) pro $x \in \langle 0;\ \pi\rangle$
- Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme součet číselné řady
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
- Z Parsevalovy rovnosti $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ dostaneme
  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Graf

Členy do n = 5



Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku překmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Komplexní tvar se spektrem.

Zadání: `fourierc(x, -pi, pi)`

Výsledek

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Postup

- Interval $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ bereme jako jednu periodu: $T = 2\pi$, polovina periody $l = \pi$. Hledáme řadu s koeficienty

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Funkce je lichá, $f(-x) = -x = -f(x)$, takže absolutní člen i koeficienty u kosinů jsou nulové a koeficienty u sinů stačí počítat přes polovinu intervalu

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Koeficient b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, tedy u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné:

  $$\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Pro celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Dosadíme meze

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- Dosadíme koeficienty do řady:

  $$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

- Podle Dirichletovy věty je součet řady roven f(x) pro $x \in (-\pi;\ \pi)$; v bodě nespojitosti je průměrem jednostranných limit:

  $$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

- Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme součet číselné řady

  $$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Z Parsevalovy rovnosti dostaneme

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Komplexní tvar řady: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$, kde $c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-inx}\,dx$. Vztah k reálnému tvaru

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Dosadíme koeficienty reálného tvaru

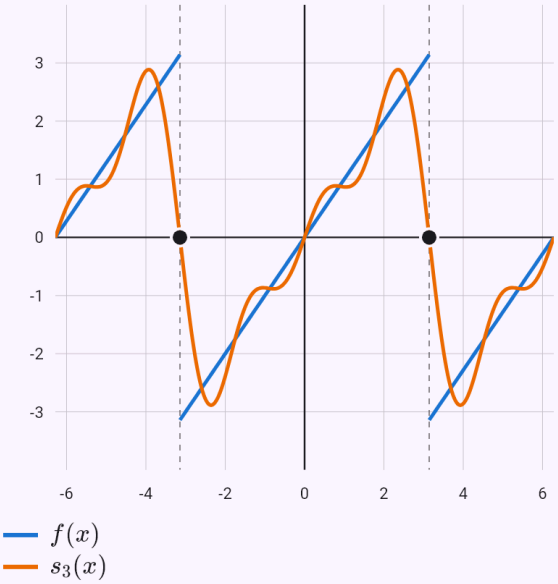
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

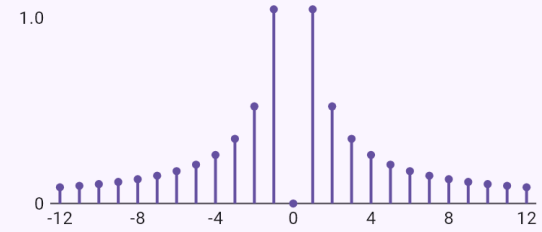
Graf

Členy do n = 3

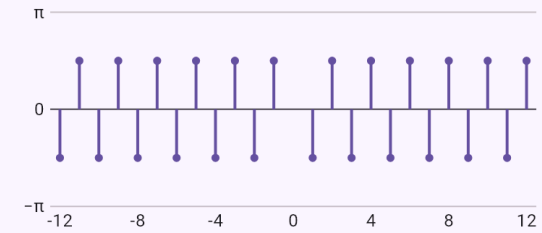


Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku překmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Amplitudové spektrum $|c_n|$



Fázové spektrum arg c_n



Na vodorovné ose je n. Výška ukazuje velikost, respektive úhel koeficientu c_n; nulové koeficienty fázi nemají.

Známá omezení

- Funkci neomezenou u kraje intervalu (ln x na ⟨0; 2π⟩) rozvineme s numericky spočítanými koeficienty; v bodě, kde roste nade všechny meze, Dirichletova věta neplatí. Funkci s pólem (1/x) nerozvineme – není integrovatelná.
- Když koeficienty vedou na integrál bez elementární primitivní funkce (ln x na ⟨1; 3⟩), jsou vyjádřeny pomocí integrálního sinu a kosinu.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace