Mathtrace – příručka

IV. Diferenciální rovnice a pokročilá analýza

Obsah

IV. Diferenciální rovnice a pokročilá analýza

34. Funkcionální analýza

35. Funkce komplexní proměnné

36. Diferenciální rovnice

37. Variační počet

38. Parciální diferenciální rovnice

39. Rekurence a vytvořující funkce

40. Numerické metody

34. Funkcionální analýza

> *„Lineární funkcionální analýza je vlastně lineární algebra v nekonečné dimenzi.“*
>
> – prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., na úvodní přednášce

Výpočetní část lineární funkcionální analýzy. Normu vektoru zapíšete ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ nebo jiné číslo; bez indexu aplikace spočítá všechny tři), normu posloupnosti v prostoru ℓ^p ||1/n||_2 – aplikace sečte řadu $\Sigma|a_n|^p$, a když diverguje, posloupnost v prostoru neleží. Normu funkce v L^p zapíšete ||x^2||_{L^2(0; 1)}: absolutní hodnotu aplikace odstraní rozdělením integrálu v nulových bodech funkce. Supremová norma ||f||_{C⟨a; b⟩} je největší hodnota |f| ze stacionárních a krajních bodů. dist(f, g, ⟨a; b⟩) dá vzdálenost dvou funkcí v supremové normě i v L^2, holder(...) a minkowski(...) ověří Hölderovu a Minkowského nerovnost na zadaných funkcích nebo vektorech.

Posloupnost funkcí convergence(x^n, ⟨0; 1⟩) (česky i konvergence(...), nebo f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) aplikace rozebere ve třech krocích: bodová limita po částech intervalu (mocnina q^n jde k nule pro |q| < 1), stejnoměrná konvergence podle $s_n = \sup |f_n - f|$ ze stacionárního bodu x_n (nespojitá limita spojitých funkcí stejnoměrná být nemůže) a konvergence v L^2 podle $\int (f_n - f)^2$. Kde vzorec nejde, odhadne suprémum i integrál numericky. Graf má posuvník přes členy f_1 až f_{20}.

Skalární součin v L^2 s vahou inner(f, g, ⟨a; b⟩) (volitelně w = ...) dá i normy a úhel funkcí. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) provede Gramův–Schmidtův proces a pozná klasické polynomy: Legendreovy, Čebyševovy s vahou $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ nebo $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerreovy s e^(−x) na ⟨0; ∞) a Hermiteovy s e^(−x²); funguje i pro vektory. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) najde nejlepší aproximaci polynomem stupně n jako ortogonální průmět, s chybou a Besselovou nerovností. Parsevalovu rovnost (a odvození $\Sigma 1/n^2 = \pi^2/6$) najdete u Fourierových řad.

Normy matic zapíšete ||[1 2; 3 4]||_1 (také _2, _oo a _F pro Frobeniovu; bez indexu aplikace spočítá všechny), číslo podmíněnosti cond([1 2; 3 4]) (volitelně p = 1). Normu integrálního operátoru s jádrem K(x, t) spočítá opnorm(x t, ⟨0; 1⟩): na C⟨a; b⟩ jako maximum $\int|K|\,dt$, v L^2 přesně pro degenerované jádro, jinak odhadem Hilbertovou–Schmidtovou normou. fnorm(g, ⟨a; b⟩) dá normu funkcionálu $\varphi(u) = \int u \cdot g$ na C a na L^2 (Rieszova věta), s p = ... na L^p.

Integrální rovnici 2. druhu napište tak, jak ji vidíte: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholmova) nebo u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterrova); jde to i z fotky, případně příkazy fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) a volterra(K; f; λ; a). Degenerované jádro aplikace převede na soustavu lineárních rovnic; s parametrem λ najde charakteristická čísla, vlastní funkce a rozhodne podle Fredholmovy alternativy. Jiné jádro řeší Neumannovou řadou a Nyströmovou metodou, Volterrovu rovnici s jádrem k(x − t) Laplaceovou transformací.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) ověří předpoklady Banachovy věty o pevném bodě (g zobrazuje interval do sebe, q = max |g′| < 1), spočítá apriorní počet kroků a iteruje s aposteriorním odhadem chyby (volitelně eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) totéž pro soustavu x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) dá Picardovy postupné aproximace s intervalem, kde je operátor kontrakcí, a odhadem chyby. Funkcionální rovnice Cauchyho typu – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), Jensenovu a d'Alembertovu – aplikace vyřeší i s odvozením.

Jak zadat

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normy vektoru, posloupnosti (ℓ^p) a funkce (L^p, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	Vzdálenost dvou funkcí v supremové normě a v L^2.
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Hölderova a Minkowského nerovnost.
`konvergence(f_n, ⟨a; b⟩)`	Bodová, stejnoměrná a L^2 konvergence posloupnosti funkcí.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Skalární součin, normy a úhel funkcí.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Gramův–Schmidtův proces pro funkce i vektory.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Nejlepší aproximace polynomem stupně n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Normy matice 1, 2, ∞, Frobeniova a číslo podmíněnosti.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	Norma integrálního operátoru a funkcionálu $\int u \cdot g$.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Fredholmova a Volterrova integrální rovnice 2. druhu.
`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	Banachova věta o pevném bodě a Picardovy aproximace.
`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Funkcionální rovnice Cauchyho typu.

Ukázky

Normy 1, 2 a ∞ jednoho vektoru.

Zadání: `||(1; -2; 3)||`

Výsledek

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Postup

- Tři nejběžnější normy vektoru $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: součet absolutních hodnot složek ($\|\cdot\|_1$), eukleidovská délka ($\|\cdot\|_2$) a největší absolutní hodnota složky ($\|\cdot\|_\infty$)
  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$
  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$
  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

‖1/n‖₂ = π/√6 – Basilejský problém.

Zadání: `||1/n||_2`

Výsledek

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Postup

- Norma posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$ v prostoru ℓ^2 pro p = 2: sečteme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ a výsledek odmocníme
  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

Harmonická řada diverguje – 1/n v ℓ¹ neleží.

Zadání: `||1/n||_1`

Výsledek

Posloupnost (funkce) v tomto prostoru neleží – její norma je nekonečná.

Postup

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ – posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$ nemá konečnou normu, v prostoru ℓ^2 pro p = 1 neleží.

Absolutní hodnota odstraněná rozdělením integrálu.

Zadání: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Výsledek

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Postup

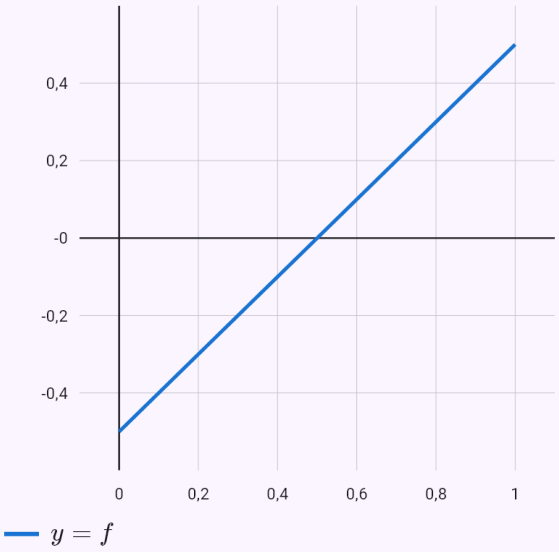
- Absolutní hodnotu odstraníme tak, že integrál rozdělíme v nulových bodech funkce $x = \frac{1}{2}$ – na každém úseku má funkce stálé znaménko

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- Norma v prostoru L⓪ pro p = 3: integrál $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, a tedy

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}31$$

Graf



Funkce na zadaném intervalu.

Supremová norma ze stacionárních a krajních bodů.

Zadání: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Výsledek

$$\|f\|_\infty = 18$$

Postup

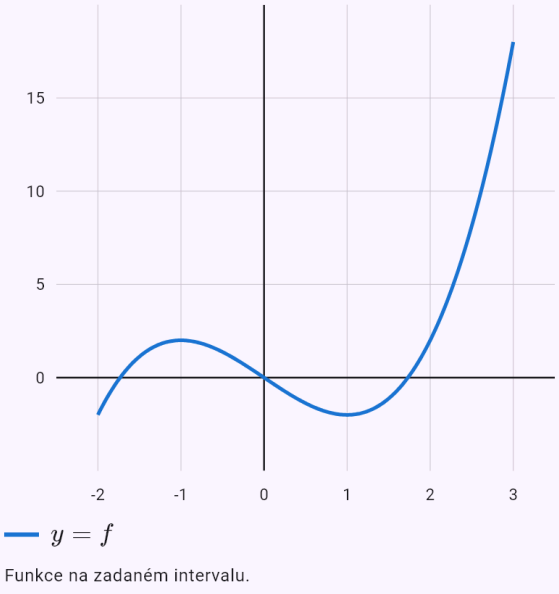
- Supremová norma spojité funkce na uzavřeném intervalu je největší hodnota |f|. Hledáme ji v krajních bodech a ve stacionárních bodech uvnitř: derivace $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, stacionární body $x = -1,\ x = 1$

- Hodnoty |f| v těchto bodech

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- Největší z nich je supremová norma $\|f\|_\infty = \max_{x \in \langle -2; 3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Graf



Funkce na zadaném intervalu.

Vzdálenost v supremové normě a v L².

Zadání: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Postup

- Vzdálenost dvou funkcí je norma jejich rozdílu: $f - g = x(1-x)$
- Supremová norma spojité funkce na uzavřeném intervalu je největší hodnota |f|. Hledáme ji v krajních bodech a ve stacionárních bodech uvnitř: derivace $(f-g)'(x) = 1 - 2x$, stacionární body $x = \frac{1}{2}$
- Hodnoty |f| v těchto bodech

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

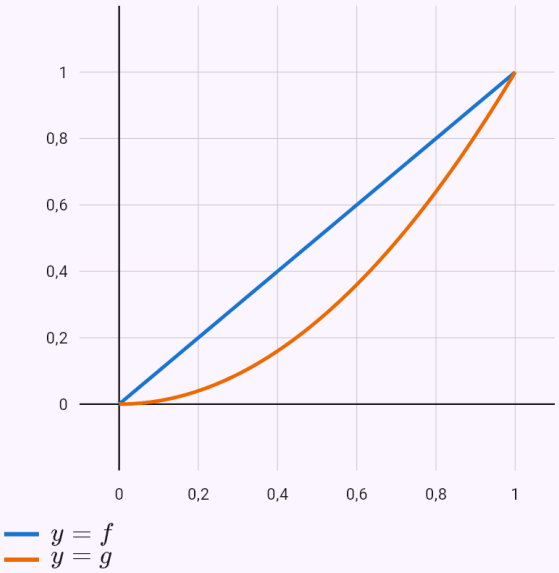
- Největší z nich je supremová norma

$$\|(f-g)\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

- Norma v prostoru L² pro p = 2: integrál $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, a tedy

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Graf



Obě funkce na zadaném intervalu.

Hölderova nerovnost se sdruženým exponentem q = 3/2.

Zadání: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

$$\left|\int_0^1 f g \, dx\right| = \frac{1}{6} \leq \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Postup

- Hölderova nerovnost pracuje se sdruženým exponentem q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- Norma v prostoru L⓪ pro p = 3: integrál $\int_0^1 |x|^3 \, dx = \frac{1}{4}$, a tedy

  $$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3 \, dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$$

- Norma v prostoru L⓪ pro p = $\frac{3}{2}$: integrál $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{5}$, a tedy

  $$\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}} \, dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$$

- Levá strana $\left|\int_0^1 f g \, dx\right| = \frac{1}{6}$, pravá strana $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – Hölderova nerovnost platí.

x^n – bodově ano, stejnoměrně ne, v L^2 ano.

Zadání: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

Posloupnost funkcí konverguje bodově, ale ne stejnoměrně.

Postup

- O limitě rozhoduje mocnina q^n se základem $q = x$: pro $|q| < 1$ jde $q^n \to 0$ (rychleji než roste jakákoli mocnina n), pro $|q| > 1$ roste nade všechny meze. Body, kde $|q| = 1$, počítáme zvlášť.
- Bodová limita: pro každé pevné x je $f_n(x) = x^n$ posloupnost čísel, spočítáme její limitu pro $n \to \infty$

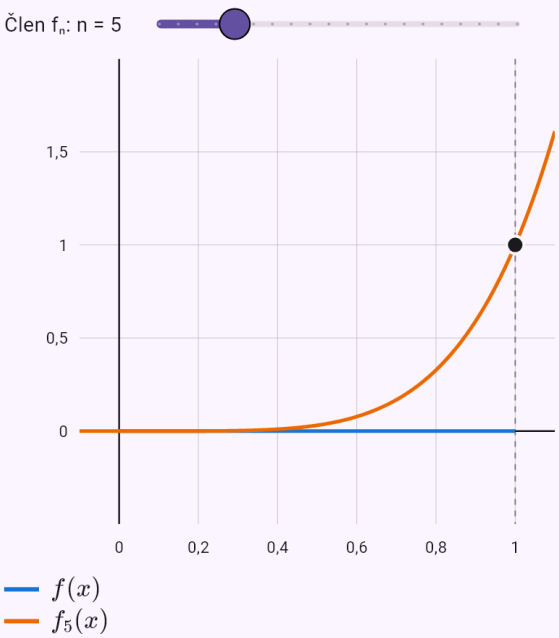
$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- Limitní funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Všechny funkce f_n jsou spojité, limitní funkce v bodě $x = 1$ spojitá není. Stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá – konvergence proto stejnoměrná není.
- Konvergence v L^2: $\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – posloupnost konverguje v L^2.

Graf



Limitní funkce f a zvolený člen f_n – posuvníkem sledujte, jak se f_n k f blíží.

Stejnoměrná konvergence: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Zadání: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Výsledek

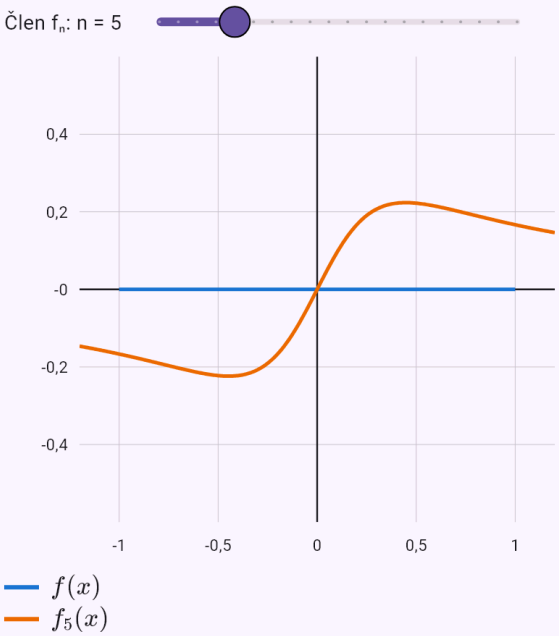
Posloupnost funkcí konverguje stejnoměrně.

Postup

- Bodová limita: pro každé pevné x je $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ posloupnost čísel, spočítáme její limitu pro n → ∞
  $x \in \langle -1;\, 1\rangle : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- Limitní funkce: $f(x) = 0$
- Stejnoměrnost posoudíme podle $s_n = \sup |f_n - f|$. Rozdíl $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ má derivaci $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; kandidáti na největší hodnotu jsou $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, konvergence je stejnoměrná.
- Konvergence v L² – integrál $\|f_n - f\|_2^2$ spočítáme numericky. Hodnoty klesají k nule – posloupnost konverguje v L².

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Graf



Limitní funkce f a zvolený člen f_n – posuvníkem sledujte, jak se f_n k f blíží.

Putující hrb – bodově k nule, s_n i $\|f_n\|_2$ ale rostou.

Zadání: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

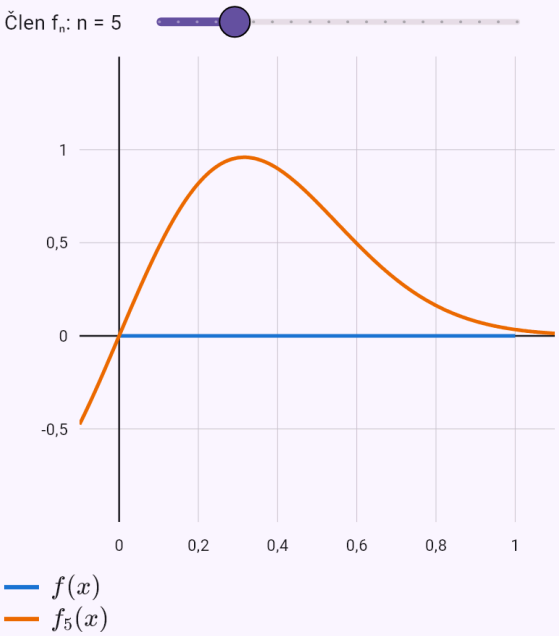
Posloupnost funkcí konverguje bodově, ale ne stejnoměrně.

Postup

- O limitě rozhoduje mocnina q^n se základem $q = e^{-x^2}$: pro $|q| < 1$ jde $q^n \to 0$ (rychleji než roste jakákoli mocnina n), pro $|q| > 1$ roste nade všechny meze. Body, kde $|q| = 1$, počítáme zvlášť.
- Bodová limita: pro každé pevné x je $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ posloupnost čísel, spočítáme její limitu pro $n \to \infty$
  $x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- Limitní funkce: $f(x) = 0$
- Stejnoměrnost posoudíme podle $s_n = \sup |f_n - f|$. Rozdíl $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ má derivaci $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; kandidáti na největší hodnotu jsou $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Protože $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (ne 0), konvergence stejnoměrná není.
  $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$
- Konvergence v L^2 – integrál $\|f_n - f\|_2^2$ spočítáme numericky. Hodnoty k nule neklesají – posloupnost v L^2 nekonverguje.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Graf



Limitní funkce f a zvolený člen f_n – posuvníkem sledujte, jak se f_n k f blíží.

Skalární součin, normy a úhel dvou funkcí.

Zadání: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

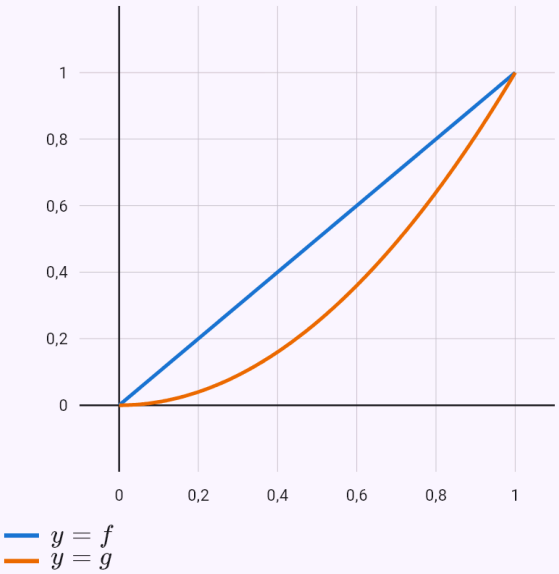
Postup

- Skalární součin v prostoru L²: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$
- Normy obou funkcí dané skalárním součinem

  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$
- Úhel mezi funkcemi (Cauchyho–Schwarzova nerovnost zaručuje |cos φ| ≤ 1)

  $\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$

Graf



Obě funkce na zadaném intervalu.

Legendreovy polynomy z 1, x, x², x³.

Zadání: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Výsledek

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Postup

- Gramův–Schmidtův proces – první funkci ponecháme: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Krok 2: od funkce odečteme její průměty do předchozích: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Potřebné skalární součiny: $\langle f_2, e_1 \rangle = 0$
- Krok 3: od funkce odečteme její průměty do předchozích: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Potřebné skalární součiny: $\langle f_3, e_1 \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle f_3, e_2 \rangle = 0$
- Krok 4: od funkce odečteme její průměty do předchozích: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Potřebné skalární součiny

  $\langle f_4, e_1 \rangle = 0$, $\langle f_4, e_2 \rangle = \frac{2}{5}$, $\langle f_4, e_3 \rangle = 0$

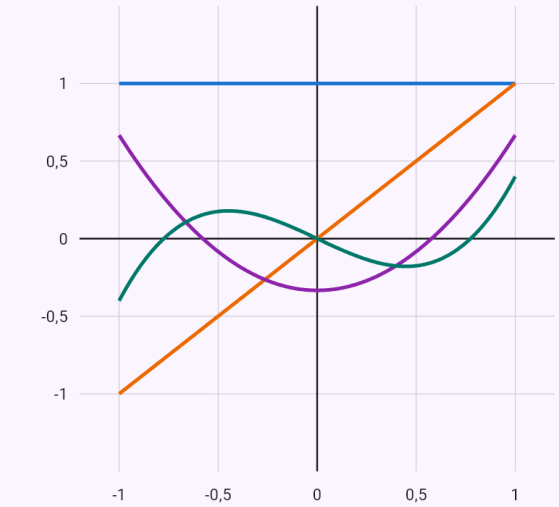
- Vydělením normami dostaneme ortonormální systém

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, $\hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}}$, $\hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$

- Jde o Legendreovy polynomy – v obvyklém tvaru s $P_k(1) = 1$

  $$P_0(x) = 1$$
  $$P_1(x) = x$$
  $$P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$
  $$P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Graf



Ortogonální funkce na zadaném intervalu.

Čebyševovy polynomy – integrály z momentů váhy.

Zadání: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Výsledek

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Postup

- Skalární součiny polynomů s vahou $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ spočítáme z momentů váhy $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x) dx$

  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$

- Gramův–Schmidtův proces – první funkci ponecháme: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$
- Krok 2: od funkce odečteme její průměty do předchozích: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Potřebné skalární součiny: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Krok 3: od funkce odečteme její průměty do předchozích: $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Potřebné skalární součiny

  $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$

- Krok 4: od funkce odečteme její průměty do předchozích: $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$, $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Potřebné skalární součiny

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

- Vydělením normami dostaneme ortonormální systém

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$

- Jde o Čebyševovy polynomy 1. druhu, $T_k(\cos t) = \cos kt$

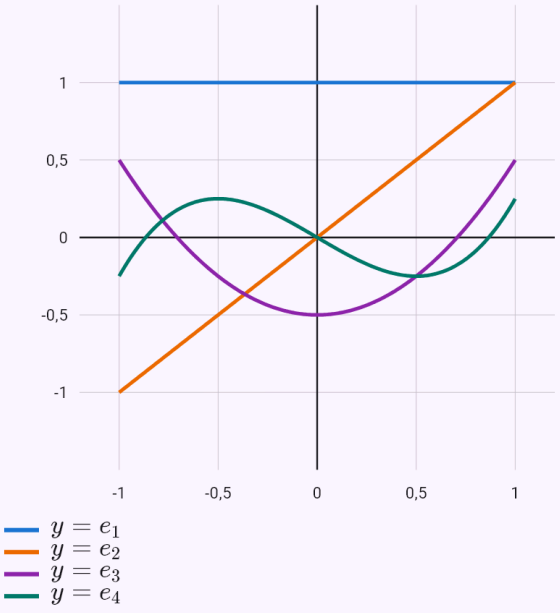
  $T_0(x) = 1$

  $T_1(x) = x$

  $T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$

  $T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$

Graf



Ortogonální funkce na zadaném intervalu.

Nejlepší kvadratická aproximace e^x na $\langle -1; 1\rangle$.

Zadání: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

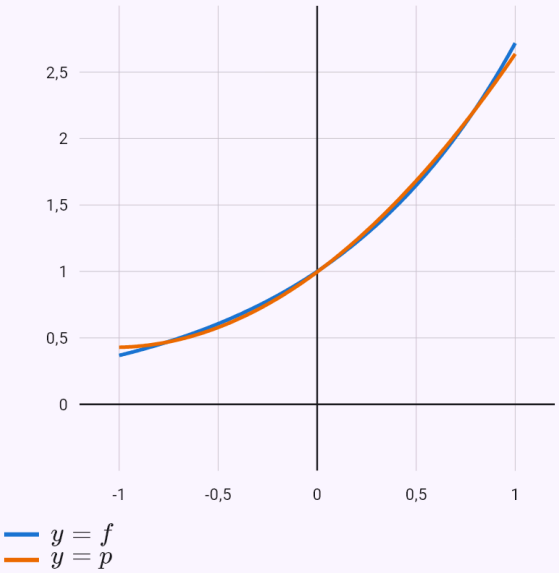
Výsledek

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Postup

- Nejlepší aproximace v L^2 je ortogonální průmět do polynomů stupně nejvýš n. Ortogonální bázi dá Gramův–Schmidtův proces z 1, x, x^2, …:
  $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$;
  $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Koeficienty průmětu
  $$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$
  $$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$
  $$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$
- Nejlepší aproximace
  $$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11 - e^2}{4e}$$
- Chyba podle Pythagorovy věty: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Besselova nerovnost: $\sum c_k^2\|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Pro úplný systém ($n \to \infty$) přejde v rovnost – Parsevalovu rovnost.
  $$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2\|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Graf



Funkce f a její nejlepší aproximace p.

Normy 1, 2, ∞ a Frobeniova jedné matice.

Zadání: `||[1 2; 3 4]||`

Výsledek

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15 + \sqrt{221}} \doteq 5,$$

Postup

- Matice
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
- Sloupcová norma je největší ze součtů absolutních hodnot prvků ve sloupcích:
  $s_1 = 1 + 3 = 4, \quad s_2 = 2 + 4 = 6$, tedy
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- Spektrální norma je odmocnina z největšího vlastního čísla matice. Vlastní čísla tedy
  $$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$
  $$\lambda_1 = 15 + \sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15 - \sqrt{221} \doteq 0{,}133$$
  $$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15 + \sqrt{221}} \doteq 5{,}465$$
- Řádková norma je největší ze součtů absolutních hodnot prvků v řádcích: $r_1 = 1 + 2 = 3, \quad r_2 = 3 + 4 = 7$, tedy
  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- Frobeniova norma je odmocnina ze součtu čtverců všech prvků
  $$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$$

Skoro singulární matice – κ ≈ 4·10⁴.

Zadání: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Výsledek

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Postup

- Matice

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$$

- Spektrální norma je odmocnina z největšího vlastního čísla matice. Vlastní čísla tedy

  $$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$$

  $$\lambda_1 = \frac{400020001 + 20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$$

  $$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001 + 20001\sqrt{400000001}}{200000000}},\quad \sigma_{\min} =$$

- Číslo podmíněnosti. Udává, kolikrát se může zvětšit relativní chyba vstupu; při řešení soustavy se může ztratit asi $4{,}6$ platných číslic – matice je špatně podmíněná.

  $$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}{\frac{400020001-20001\sqrt{400}}{200000000}}}$$

Jádro mění znaménko – integrál rozdělený v t = x.

Zadání: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Postup

- Norma integrálního operátoru na prostoru C⟨a; b⟩ je největší hodnota funkce φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. Jádro $K(x,t) = x - t$ mění znaménko tam, kde K = 0 – integrál v tomto bodě rozdělíme

  $$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- Supremová norma spojité funkce na uzavřeném intervalu je největší hodnota |f|. Hledáme ji v krajních bodech a ve stacionárních bodech uvnitř: derivace $\varphi'(x) = 2x - 1$, stacionární body $x = \frac{1}{2}$

- Hodnoty |f| v těchto bodech

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Největší z nich je supremová norma

  $$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in \langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- Jádro je degenerované, $K(x,t) = -t + x$. Normu v L² pak dají Gramovy matice funkcí a⃗(x) a b⃗(t). Pro srovnání Hilbertova–Schmidtova norma je vždy větší nebo rovna.

  $$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

  $$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G_b G_a)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

  $$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

Norma funkcionálu na C a na L² (Rieszova věta).

Zadání: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

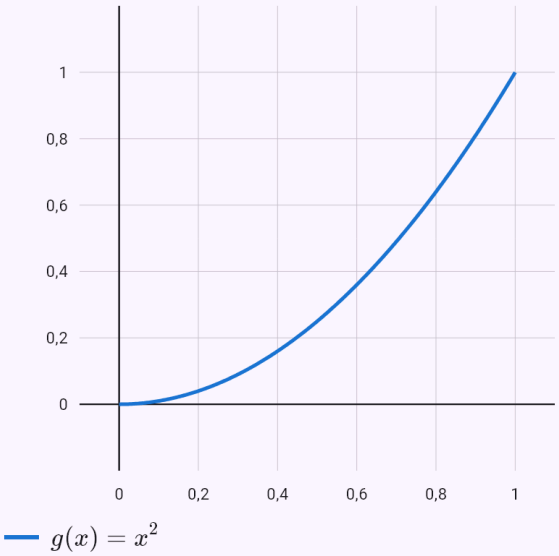
Výsledek

$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Postup

- Funkcionál φ(u) = ∫u·g na prostoru $C\langle 0;\,1\rangle$ se supremovou normou: jeho norma je integrál z |g|, hodnotě se blíží spojité funkce u ≈ sgn g:
  $$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_1$$
- Norma v prostoru L1 pro p = 1: integrál $\int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$, a tedy $\|g\|_1 = \int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$
- Na prostoru $L^2\langle 0;\,1\rangle$ je funkcionál φ(u) = ∫u·g skalárním součinem s funkcí g (Rieszova věta). Podle Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti je jeho norma ‖g‖₂, dosažená pro u = g/‖g‖₂: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_2$
- Norma v prostoru L2 pro p = 2: integrál $\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{1}{5}$, a tedy
  $$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Graf



Funkce na zadaném intervalu.

Degenerované jádro s parametrem λ.

Zadání: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Výsledek

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Podmínky: $\lambda \neq 3$

Postup

- Fredholmova integrální rovnice 2. druhu (meze integrálu jsou pevné): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\,u(t)\,dt$, jádro $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jádro je degenerované – součin funkce proměnné x a funkce proměnné t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Integrály s neznámou funkcí jsou čísla – označíme je jako neznámé konstanty $c = \int_0^1 t\,u(t)\,dt$. Řešení má proto tvar $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Dosazením tohoto tvaru do definic konstant dostaneme soustavu lineárních rovnic s koeficienty

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}$

  $c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$

- Soustava má jediné řešení, pokud je její determinant nenulový: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Jeho kořeny jsou charakteristická čísla jádra: $\lambda_1 = 3$
- Pro $\lambda \neq 3$ má soustava řešení $c = \frac{1}{3-\lambda}$, a tedy $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Pro $\lambda_1 = 3$ má homogenní rovnice nenulová řešení – vlastní funkce $\varphi_1(x) = x$
- Fredholmova alternativa pro $\lambda_1 = 3$: soustava je neřešitelná ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), rovnice pro toto λ řešení nemá (vlastní funkce $\varphi(x) = x$).

Charakteristická čísla a vlastní funkce.

Zadání: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Výsledek

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Postup

- Fredholmova integrální rovnice 2. druhu (meze integrálu jsou pevné): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\,u(t)\,dt$, jádro $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jádro je degenerované – součet 2 součinů funkce proměnné x a funkce proměnné t: $K(x,t) = t + x$
- Integrály s neznámou funkcí jsou čísla – označíme je jako neznámé konstanty $c_1 = \int_0^1 t\,u(t)\,dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\,dt$. Řešení má proto tvar $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Dosazením tohoto tvaru do definic konstant dostaneme soustavu lineárních rovnic s koeficienty

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

  $c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$

  $c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$

- Soustava má jediné řešení, pokud je její determinant nenulový: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Jeho kořeny jsou charakteristická čísla jádra: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282, \; \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Pro $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ má homogenní rovnice nenulová řešení – vlastní funkce $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Pro $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ má homogenní rovnice nenulová řešení – vlastní funkce $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Nedegenerované jádro – Neumannova řada a Nyströmova metoda.

Zadání: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Výsledek

$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Postup

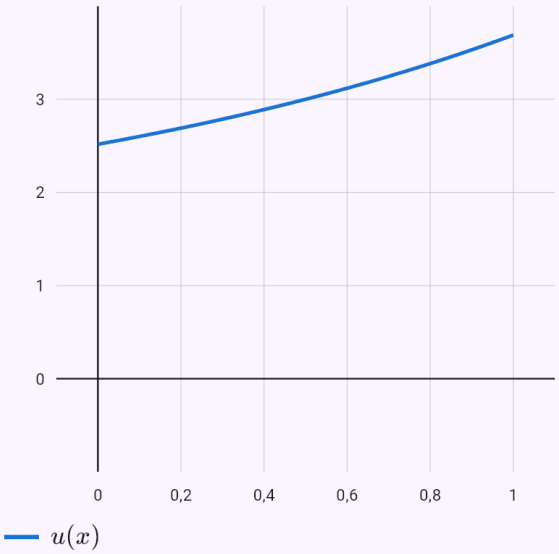
- Fredholmova integrální rovnice 2. druhu (meze integrálu jsou pevné): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\,dt$, jádro $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- Jádro není degenerované. Neumannova řada – postupné aproximace $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – konverguje, protože

$$|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$$

- Nyströmova metoda: integrál nahradíme Gaussovou kvadraturou s 32 uzly, rovnice v uzlech dá lineární soustavu a hodnoty mezi uzly dopočteme z rovnice samotné.Srovnání s polovičním počtem uzlů ukazuje přesnost asi 10^{-8}. Hodnoty řešení

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$u(x)$	2,517	2,7372	2,9997	3,3134	3,6894

Graf



Řešení integrální rovnice.

Volterrova rovnice Laplaceovou transformací – cos x.

Zadání: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

Výsledek

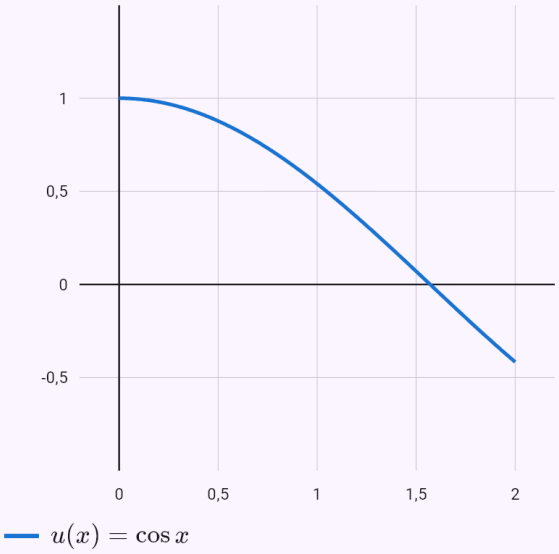
$$u(x) = \cos x$$

Postup

- Volterrova integrální rovnice 2. druhu (horní mez je x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$, jádro $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- Jádro závisí jen na rozdílu x − t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – integrál je konvoluce a Laplaceova transformace z ní udělá součin. Obrazy. Rovnice pro obrazy $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\,U(s)$, odtud $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Zpětnou transformací $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

Graf



Řešení integrální rovnice.

Pevný bod cos x s apriorním a aposteriorním odhadem.

Zadání: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Výsledek

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Postup

- Banachova věta o pevném bodě potřebuje, aby $g(x) = \cos x$ zobrazovala interval $I = \langle 0;\ 1\rangle$ do sebe. Obor hodnot (z krajních a stacionárních bodů) je $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – leží v I.
- Supremová norma spojité funkce na uzavřeném intervalu je největší hodnota |f|. Derivace $g''(x) = -\cos x$ uvnitř intervalu nulový bod nemá – stačí krajní body.
- Hodnoty |f| v těchto bodech

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- Největší z nich je supremová norma

$$\|g'\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$$

- Podle Lagrangeovy věty je |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y|, kde q je největší hodnota |g'|:
$q = \max_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g je kontrakce.
- Apriorní odhad: začneme z
$x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. Ze vztahu pro
$\varepsilon = 10^{-6}$ a $q = \sin 1$ vychází n ≥ 86 kroků.

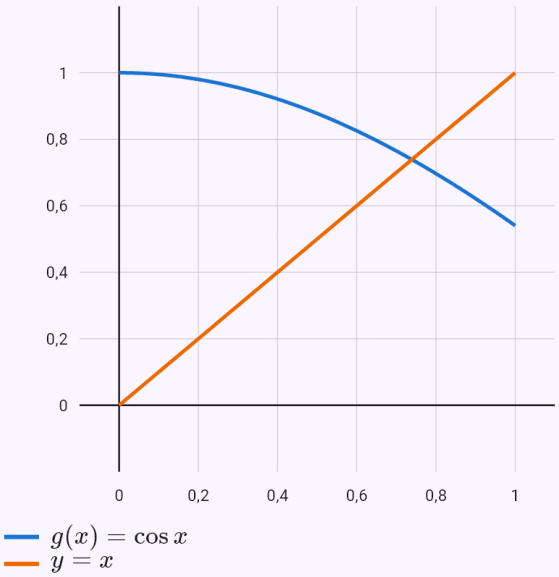
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1-x_0|}}{\ln q}$$

- Iterujeme $x_{n+1} = g(x_n)$; poslední sloupec je aposteriorní odhad chyby a výpočet končí, jakmile klesne pod ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145 \cdot 10^{-6}$	$6{,}075 \cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710 \cdot 10^{-7}$	$4{,}092 \cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193 \cdot 10^{-7}$	$2{,}757 \cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498 \cdot 10^{-7}$	$1{,}857 \cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356 \cdot 10^{-7}$	$1{,}251 \cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587 \cdot 10^{-7}$	$8{,}426 \cdot 10^{-7}$

- Pevný bod:
$x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426 \cdot 10^{-7}$. Stačilo 38 kroků místo 86 podle apriorního odhadu – aposteriorní odhad bývá mnohem přesnější.

Graf



Funkce g a přímka y = x – pevný bod je jejich průsečík.

Soustava x = Ax + b, kontrakce v normě ∞.

Zadání: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Výsledek

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Postup

- Soustava ve tvaru pro iteraci

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- Sloupcová norma je největší ze součtů absolutních hodnot prvků ve sloupcích tedy

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- Řádková norma je největší ze součtů absolutních hodnot prvků v řádcích tedy $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- Zobrazení x ↦ Ax + b je kontrakce, je-li některá norma matice A menší než 1. Volíme tu nejmenší:

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- Apriorní odhad: začneme z $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Ze vztahu pro $\varepsilon = 10^{-6}$ a $q = 0{,}6$ vychází n ≥ 31 kroků.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Iterujeme $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; poslední sloupec je aposteriorní odhad chyby a výpočet končí, jakmile klesne pod ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- Pevný bod. Stačilo 28 kroků místo 31 podle apriorního odhadu – aposteriorní odhad bývá mnohem přesnější.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Pro kontrolu přesný pevný bod z lineární soustavy

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Picardovy aproximace a přesné řešení.

Zadání: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Výsledek

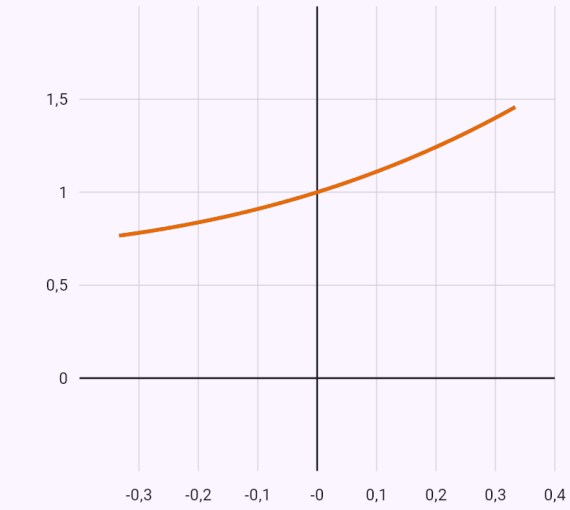
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Postup

- Úlohu $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ přepíšeme na integrální rovnici y = T(y); Picardovy postupné aproximace jsou iterace operátoru T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- 1. aproximace: $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- 2. aproximace
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- 3. aproximace
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^$
- Kde je T kontrakcí (Picardova–Lindelöfova věta): na obdélníku $R: \ |x| \le 1, \ |y-1| \le 1$ je $M = \max_R |f| \doteq 3$ a. Na intervalu s $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$ zůstávají aproximace v obdélníku a $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- Odhad chyby poslední aproximace pro $|x| \le 0{,}3333$:
  $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$
- Přesné řešení pro srovnání: $y(x) = -x + 2e^x - 1$;

skutečná chyba na kraji intervalu
$|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Graf



Picardova aproximace a přesné řešení (je-li známé).

Cauchyho rovnice – f(x) = cx.

Zadání: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Výsledek

$$f(x) = c\,x$$

Postup

- Cauchyho funkcionální rovnice pro aditivní funkci:
  $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Předpokládáme, že funkce f je spojitá. Bez tohoto předpokladu má Cauchyho rovnice i nespojitá „patologická“ řešení (sestrojená pomocí Hamelovy báze).
- Dosazení: $x = y = 0:\quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- Dosazení y = −x ukáže, že funkce je lichá:
  $y = -x:\quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Indukcí pro přirozená n:
  $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Pro racionální čísla r = m/n
  $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Racionální čísla jsou hustá a funkce je spojitá, vztah proto platí pro všechna reálná x:
  $f(x) = \lim_{r \to x} f(r) = \lim_{r \to x} c\,r = c\,x$
- Všechna spojitá řešení (a, b, c jsou libovolné konstanty):
  $f(x) = c\,x$
- Zkouška dosazením: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

d'Alembertova rovnice – cos a cosh.

Zadání: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Výsledek

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Postup

- d'Alembertova funkcionální rovnice:
  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y),\ x, y \in \mathbb{R}$
- Předpokládáme, že funkce f je spojitá. Bez tohoto předpokladu má Cauchyho rovnice i nespojitá „patologická" řešení (sestrojená pomocí Hamelovy báze).
- Dosazení
  $x = y = 0: \quad 2f(0) = 2f(0)^2 \ \Rightarrow\ f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- Dosazení x = 0 ukáže, že funkce je sudá:
  $x = 0: \quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \ \Rightarrow\ f(-y) = f(y)$
- Spojitá řešení jsou hladká; dvojím derivováním podle y v bodě y = 0 dostaneme diferenciální rovnici
  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}: \quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \ \Rightarrow\ f'' = k\,f,\ f(0)$
- Podle znaménka konstanty k:
  $k = -c^2:\ \cos(cx), \qquad k = 0:\ 1, \qquad k = c^2:\ \cosh(cx)$
- Všechna spojitá řešení (a, b, c jsou libovolné konstanty):
  $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Zkouška dosazením:
  $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Známá omezení

- Bodovou limitu aplikace hledá u posloupností, kde o limitě rozhoduje mocnina q^n nebo racionální výraz v n; u složitějších (sin nx bez dělení n) může úlohu odmítnout.
- Konvergenci zkoumá na uzavřeném omezeném intervalu; nekonečný interval zatím ne.
- Gramův–Schmidtův proces nejvýš pro 6 funkcí, aproximace polynomem nejvýš 5. stupně.
- Degenerované jádro nejvýš se 4 členy; s parametrem λ jen degenerované, nedegenerované řeší numericky pro číselné λ. Volterrovu rovnici přesně jen s jádrem k(x − t) od nuly nebo a(x)·b(t), jinak postupnými aproximacemi a numericky.
- Matice nejvýš 6 × 6, Picardových aproximací nejvýš 6. Funkcionální rovnice jen uvedených typů (a Cauchyho s polynomiálním členem navíc), vždy se spojitými řešeními.

35. Funkce komplexní proměnné

Cauchyho–Riemannovy podmínky funkce f(z) ověříte zápisem cr(z^2 + 3z); funkci můžete napsat v z, $\bar{z}$ (conj(z)), |z|, Re z, Im z nebo přímo v x a y. Aplikace rozepíše f = u + iv, spočítá parciální derivace a dosadí do u_x = v_y, u_y = −v_x. Platí-li všude, je funkce analytická a výsledkem je derivace f'(z) zapsaná v z; jinak aplikace vypíše, kde podmínky platí (body nebo křivku), a funkce analytická není. K harmonické funkci harmonic(u = x^2 - y^2) dopočítá harmonicky sdruženou funkci integrací z podmínek a celou funkci f(z) dosazením x = z, y = 0; zadat jde i imaginární část, harmonic(v = 2xy).

Hodnoty elementárních funkcí v $\mathbb{C}$: hlavní hodnota logaritmu ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w se všemi hodnotami lišícími se o 2kπi, mocnina s komplexním exponentem i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh a cosh komplexního čísla součtovými vzorci. Argument je ve stejném intervalu jako u komplexních čísel (čip „Hlavní hodnota argumentu“). Rovnice sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 aplikace řeší substitucí w = e^(iz) (e^z) a kvadratickou rovnicí, e^z = 1 + i zlogaritmováním; výsledkem je obecné řešení s k ∈ $\mathbb{Z}$ a několik řešení v Gaussově rovině. Rovnice v x s reálným oborem bez řešení (sin x = 2) nabídne tlačítko komplexního řešení.

Singularity a rezidua: singularities(f) najde kořeny jmenovatele a podstatné singularity (e^(1/z), sin(1/z)), určí jejich typ – odstranitelná, pól řádu m, podstatná – a spočítá rezidua: v jednoduchém pólu g(a)/q'(a), v pólu vyššího řádu derivací (z − a)^m f(z), v podstatné singularitě z Laurentovy řady. Res(f, z = a) spočítá jedno reziduum. Laurentovu řadu racionální funkce v mezikruží laurent(f, 1 < |z| < 2) (nebo |z| > 1, 0 < |z − a| < r, kolem bodu laurent(f, z = a)) aplikace sestaví z parciálních zlomků nad $\mathbb{C}$ a geometrické řady každého zlomku – podle toho, zda jeho pól leží uvnitř, nebo vně mezikruží. Integrál po kružnici oint(f, |z − a| = r) (z fotky \oint_{|z−a|=r}) počítá reziduovou větou; bez singularit uvnitř je nulový, singularitu na kružnici aplikace ohlásí.

Rezidua v reálné analýze: nevlastní integrál racionální funkce přes celou osu, s cos ax nebo sin ax (Jordanovo lemma) a od 0 do ∞ u sudé funkce; integrál racionální funkce cos t a sin t přes ⟨0; 2π⟩ substitucí z = e^(it). Integrály s kosinem a sinem a přes ⟨0; 2π⟩ jdou rovnou přes rezidua, u ostatních vyberete čip „Přes rezidua“ (zpět „Obvyklý výpočet“). Stejně čipem u řady sečtete Σ R(n) od 1 (od 0 nebo jiného celého čísla) jádrem π cotg πz, alternující řadu jádrem π/sin πz; součet přes všechna celá čísla od −∞ jde rovnou. Inverzní Laplaceovu transformaci racionální funkce invlaplace(F) (z fotky \mathcal{L}^{-1}\{F\}) aplikace spočítá jako součet reziduí F(s)e^(st).

Rouchého věta rouche(p, |z| < r) určí počet kořenů polynomu v kruhu podle členu, který na kružnici převažuje nad součtem ostatních, v mezikruží r < |z| < R jako rozdíl dvou kruhů; kořeny ukáže v Gaussově rovině. Konformní zobrazení w = f(z) rozepíše na u a v, určí, kde je konformní (f' ≠ 0), u Möbiovy transformace (αz + β)/(γz + δ) najde samodružné body a obrazy reálné a imaginární osy a jednotkové kružnice. Graf ukáže obraz mřížky přímek x = c a y = c.

Fourierovu transformaci racionální funkce ftransform(1/(1 + t^2)) (z fotky \mathcal{F}\{f\}) aplikace spočítá přes rezidua – pro ω > 0 uzavře cestu v dolní polorovině, pro ω < 0 v horní – a výsledek u sudé (liché) funkce zapíše přes |ω|. Pro hustotu v x dá charakteristickou funkci rozdělení až na znaménko ω, u souměrného Cauchyho rozdělení přímo e^(−|t|). Inverzní Z-transformaci invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) spočítá jako součet reziduí $F(z)z^{n-1}$ s počáteční hodnotou x[0] = lim F(z) pro z → ∞. Použití ve filtrech, regulaci a optice ukazuje kapitola Aplikace komplexní analýzy.

Jak zadat

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Cauchyho–Riemannovy podmínky a derivace.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	Harmonicky sdružená funkce k reálné (imaginární) části.
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logaritmus, mocnina, goniometrické funkce a rovnice v $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Reziduum v bodě, všechny singularity.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Laurentova řada v mezikruží nebo kolem bodu.
`oint(f, |z - a| = r)`	Integrál po kružnici reziduovou větou.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Reálné integrály přes rezidua.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	Součet řady přes rezidua.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	Počet kořenů polynomu v kruhu nebo mezikruží.
`w = (z - i)/(z + i)`	Konformní zobrazení, Möbiova transformace.
`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	Inverzní Laplaceova transformace přes rezidua.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Fourierova transformace přes rezidua.
`invz(z/(z - 1/2))`	Inverzní Z-transformace přes rezidua.

Ukázky

Analytická funkce – podmínky platí všude, derivace v z.

Zadání: `cr(z^2 + 3z)`

Výsledek

$$f'(z) = 2z + 3$$

Postup

- Funkci rozepíšeme na reálnou a imaginární část, f = u + iv, kde z = x + iy: $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Parciální derivace u a v podle x a y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Dosadíme do Cauchyho–Riemannových podmínek $u_x = v_y, u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Obě podmínky platí v celé rovině a parciální derivace jsou spojité – funkce je analytická v celém $\mathbb{C}$.
- Derivace analytické funkce, zapsaná v z:
  $f'(z) = u_x + i\, v_x = 2z + 3$

Podmínky platí jen na přímce y = x – funkce není analytická.

Zadání: `cr(x^2 + i y^2)`

Výsledek

Funkce není analytická – Cauchyho–Riemannovy podmínky neplatí na žádné oblasti.

Postup

- Funkci rozepíšeme na reálnou a imaginární část, f = u + iv, kde z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- Parciální derivace u a v podle x a y
  $u_x = 2x,\ u_y = 0$
  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Dosadíme do Cauchyho–Riemannových podmínek $u_x = v_y, u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$
  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Obě podmínky platí jen tam, kde $2(x - y) = 0$. Tam má funkce derivaci, žádné okolí bodu ale celé nesplňuje podmínky – funkce není analytická nikde.

Harmonicky sdružená funkce a f(z) = z² + z.

Zadání: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Výsledek

$$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$$

Postup

- Zadaná je reálná část u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Ověříme, že je harmonická – její Laplaceův operátor je nulový: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Z první Cauchyho–Riemannovy podmínky $v_y = u_x$ dostaneme v integrací podle y – „konstanta“ může záviset na x:
  $v_y = u_x = 2x + 1 \;\Rightarrow\; v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- Funkci C(x) určíme z druhé podmínky $v_x = -u_y$:
  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \;\Rightarrow\; C'(x) = 0,\; C(x) = 0 + C$
- Harmonicky sdružená funkce: $v = 2xy + y + C$
- Funkci f(z) = u + iv zapíšeme v z – stačí dosadit x = z a y = 0: $f = u + i\,v,\; x = z,\; y = 0 :\; f(z) = z^2 + z + iC$

Hlavní hodnota logaritmu a všechny jeho hodnoty.

Zadání: `ln(1 + i)`

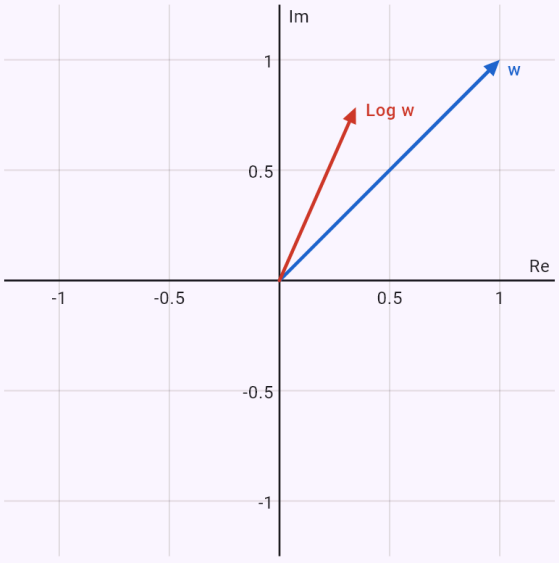
Výsledek

$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Postup

- Hlavní hodnota logaritmu je $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w$, argument v intervalu $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w$
- Absolutní hodnota a hlavní argument čísla:
  $|1+i| = \sqrt{2},\; \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- Exponenciála je periodická s periodou 2πi, proto má logaritmus nekonečně mnoho hodnot – liší se o násobky 2πi
  $\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\; k \in \mathbb{Z}$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

i^i je reálné číslo e^(−π/2).

Zadání: `i^i`

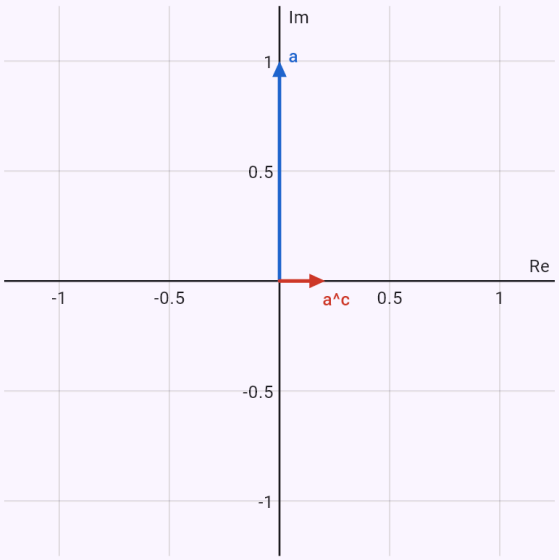
Výsledek

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

Postup

- Mocninu s komplexním exponentem definujeme přes hlavní hodnotu logaritmu (argument v intervalu $\langle 0; 2\pi)$)
  $a^c = e^{c\,\mathrm{Log}\,a}, \quad \mathrm{Log}\,(i) = \frac{\pi}{2}i$
- Exponent rozepíšeme na reálnou a imaginární část:
  $c\,\mathrm{Log}\,a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- Hlavní hodnota mocniny, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$:
  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- S ostatními hodnotami logaritmu dostaneme všechny hodnoty mocniny: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

Graf



Gaussova rovina – zadaná čísla modře, výsledek červeně, argument φ obloukem od kladné reálné poloosy.

Rovnice sin z = 2 – substituce w = e^(iz) a kvadratická rovnice.

Zadání: `sin z = 2`

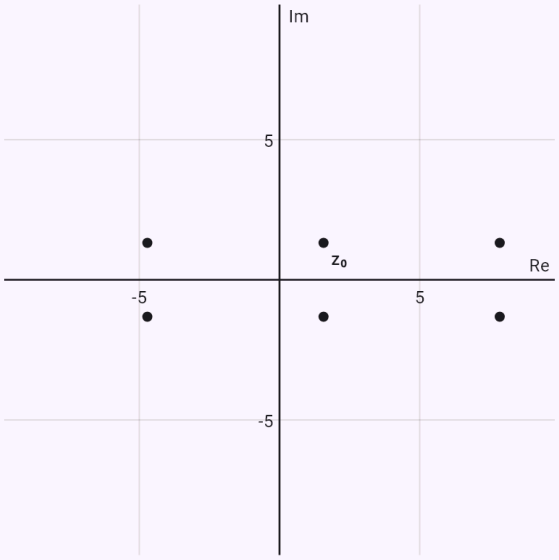
Výsledek

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Funkci vyjádříme exponenciálami a zavedeme substituci:
  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Rovnici vynásobíme w a dostaneme kvadratickou rovnici:
  $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Její kořeny:
  $D = -12,\ w_1 = \left(2 + \sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)i$
- Vrátíme se k z: $iz = \log w$, tedy
  $z = -i \log w = \mathrm{Arg}\,w + 2k\pi - i \ln |w|$ (argument v intervalu $\langle 0; 2\pi)$):
  $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Graf



Gaussova rovina – řešení rovnice jako body: na vodorovné ose reálná část, na svislé imaginární.

Pól nižšího řádu díky nule čitatele a jednoduchý pól.

Zadání: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

Výsledek

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, f = 0, \quad \mathrm{Res}_{z=1}\, f = \sin 1$$

Postup

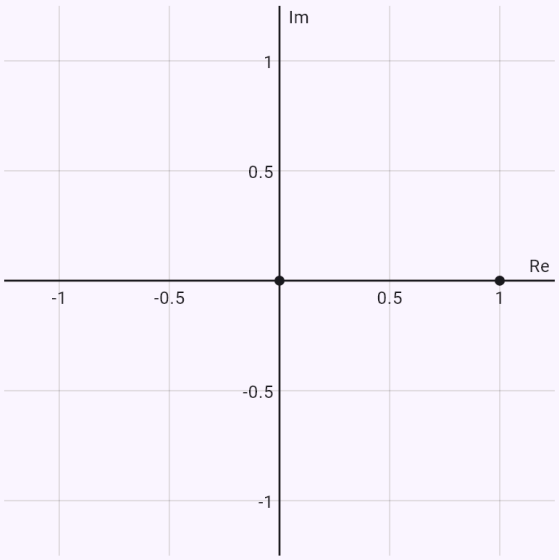
- Singulární body – kořeny jmenovatele: $z^4 - z^3 = 0 : \; z_1 = 0, \; z_2 = 1$
- V bodě 0 má jmenovatel kořen násobnosti 3, čitatel násobnosti 1 – je to pól řádu 2
- Reziduum v pólu řádu 2

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, f = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 f(z) \right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)}, \; \mathrm{I}$$

- V bodě 1 má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1}\, f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z, \; q' = 4z^$$

Graf



Gaussova rovina – singulární body funkce.

Podstatná singularita – reziduum z Laurentovy řady.

Zadání: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Výsledek

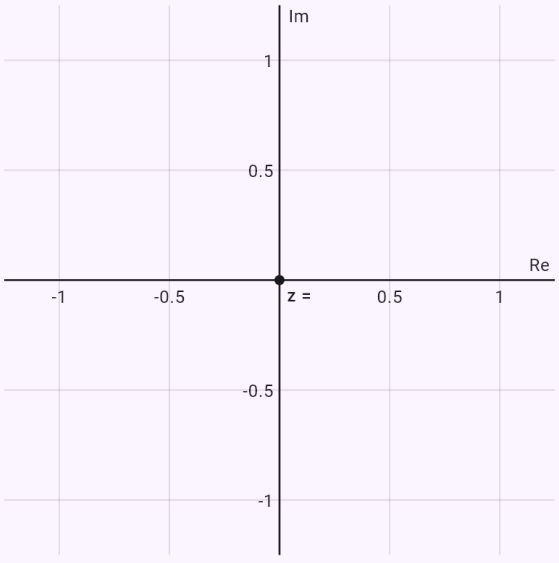
$$\mathrm{Res}_{z=0}\, f = \frac{1}{6}$$

Postup

- V bodě 0 je podstatná singularita – exponent (argument) má v bodě pól a hlavní část Laurentovy řady je nekonečná.
- Reziduum je koeficient c_{-1} u $\frac{1}{z-a}$ v Laurentově řadě kolem bodu 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Graf



Gaussova rovina – singulární body funkce.

Laurentova řada v mezikruží 1 < |z| < 2 – jeden zlomek v mocninách 1/z, druhý v mocninách z.

Zadání: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

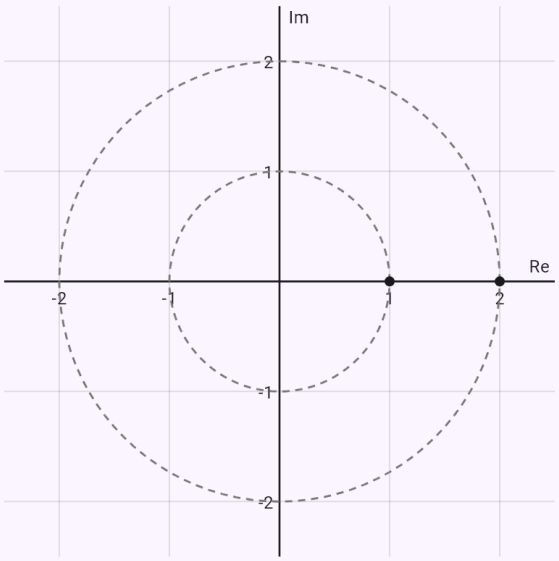
Výsledek

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Postup

- Singulární body: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Laurentovu řadu hledáme v mezikruží $1 < |z| < 2$ – žádný singulární bod v něm neleží.
- Funkci rozložíme na parciální zlomky (nad $\mathbb{C}$):
  $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- Pól zlomku leží uvnitř vnitřní kružnice – vytkneme $\frac{1}{z-c}$ a použijeme geometrickou řadu v mocninách $\frac{1}{z-c}$
  $$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$
- Pól zlomku leží vně mezikruží – vytkneme konstantu a použijeme geometrickou řadu v mocninách z – c
  $$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$
- Sečteme řady člen po členu
  $$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$$
- Obecný člen: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$

Graf



Gaussova rovina – mezikruží Laurentovy řady (čárkovaně) a singulární body.

Reziduová věta u pólu 2. řádu.

Zadání: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Výsledek

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

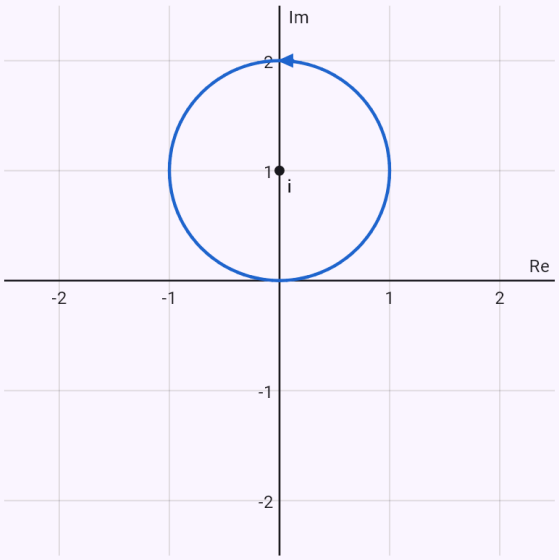
Postup

- Integrujeme po kružnici se středem i a poloměrem 1, proti směru hodinových ručiček: $|z-i|=1$
- Uvnitř kružnice leží singulární body $z_0 = i$, vně $\emptyset$
- V bodě i má jmenovatel kořen násobnosti 2, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 2
- Reziduum v pólu řádu 2

  $\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right], \quad (z-i)^2 f(z) = $
- Podle reziduové věty

  $\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f = 2\pi i\left(e^i\right) = 2\pi i\, e^i$

Graf



Gaussova rovina – kružnice, po které integrujeme (šipka ukazuje směr), a singulární body.

Nevlastní integrál s kosinem – Jordanovo lemma.

Zadání: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Výsledek

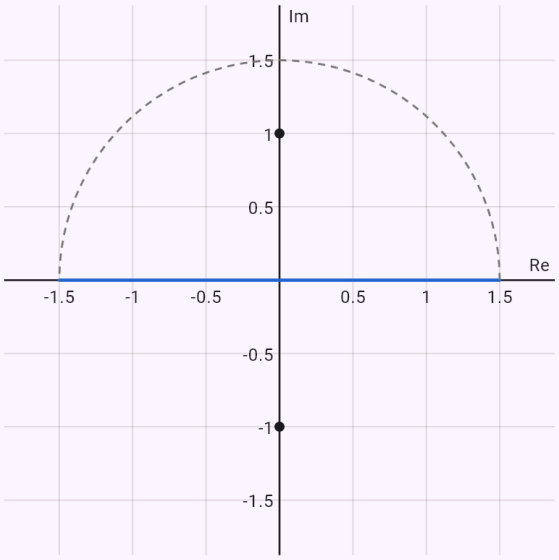
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

Postup

- Pro integrál s kosinem nebo sinem stačí $\deg Q \geq \deg P + 1$ a Q bez reálných kořenů – integrál po půlkružnici pak jde k nule podle Jordanova lemmatu: $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Kosinus je reálná část e^{iax}
- Uzavřeme reálnou osu velkou půlkružnicí v horní polorovině. Uvnitř leží póly $z_0 = i$, integrál po půlkružnici jde k nule.
- V bodě i má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

  $\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$
- Podle reziduové věty je integrál 2πi krát součet reziduí v horní polorovině: $2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$

Graf



Gaussova rovina – reálná osa uzavřená půlkružnicí v horní polorovině (čárkovaně) a póly integrandu.

Integrál přes ⟨0; 2π⟩ jako integrál po jednotkové kružnici.

Zadání: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

Výsledek

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Postup

- Integrál přes ⟨0; 2π⟩ převedeme na integrál po jednotkové kružnici substitucí

  $z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$

- Po dosazení a úpravě dostaneme integrál racionální funkce po kružnici |z| = 1: $\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$

- Uvnitř kružnice leží singulární body $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, vně $z_0 = -2 - \sqrt{3}$

- V bodě $-2 + \sqrt{3}$ má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1

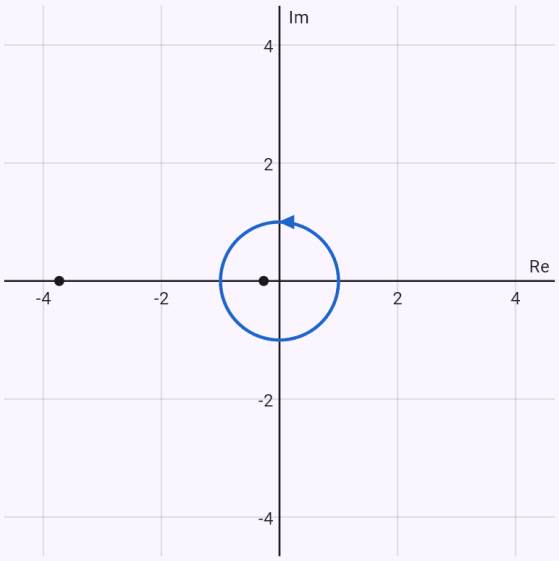
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

  $\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3}, \quad g =$

- Podle reziduové věty

  $\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Graf



Gaussova rovina – jednotková kružnice z = e^(it) a póly integrandu.

Σ 1/n² = π²/6 – reziduum v nule, kde má pól i jádro.

Zadání: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Přes rezidua

Výsledek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Výpočet integrálu nebo součtu

Obvyklý výpočet ✓ Přes rezidua

Postup

- Funkce π cotg πz má v každém celém čísle n jednoduchý pól s reziduem 1. Integrál po velkém čtverci jde k nule, proto součet řady je minus součet reziduí v pólech R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^}$$

- Podmínka $\deg Q \geq \deg P + 2$ platí: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Singulární body – kořeny jmenovatele: $z^2 = 0 :\ z_0 = 0$
- V bodě 0 má pól jak R, tak jádro – reziduum je koeficient u 1/z jejich součinu

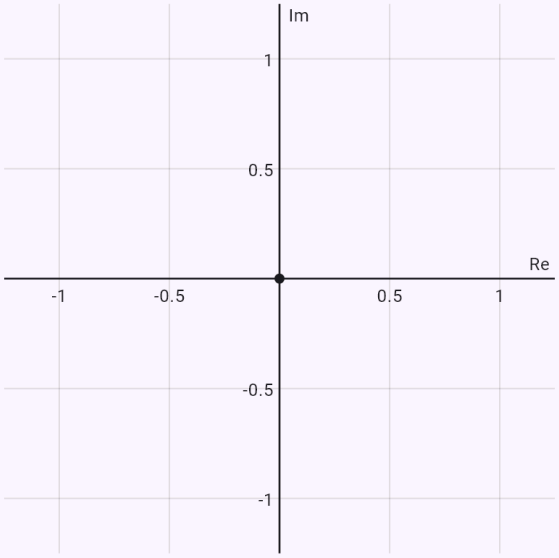
$$\pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- Součet přes všechna celá čísla:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R je sudá, R(−n) = R(n), proto součet od 1 je polovina (bez členu n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Graf



Gaussova rovina – póly R(z); jádro π cotg πz má navíc póly ve všech celých číslech.

Rouchého věta – čtyři kořeny v mezikruží 1 < |z| < 2.

Zadání: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

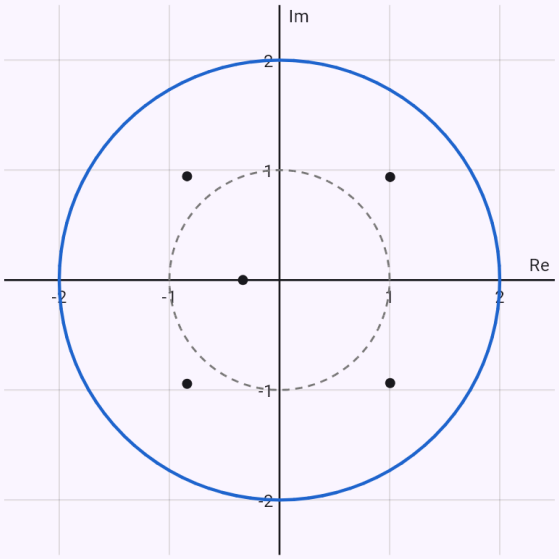
Výsledek

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Postup

- Na kružnici |z| = 2 převažuje člen z^5 nad součtem ostatních – podle Rouchého věty má polynom v kruhu tolik kořenů jako z^5, tedy 5: $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32, \quad 32 > 7$
- Na kružnici |z| = 1 převažuje člen $3z$ nad součtem ostatních – podle Rouchého věty má polynom v kruhu tolik kořenů jako $3z$, tedy 1: $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1, \quad 3 > 2$
- V mezikruží je rozdíl počtů kořenů ve větším a menším kruhu: $5 - 1 = 4$
- Pro kontrolu kořeny numericky $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Graf



Gaussova rovina – kružnice a kořeny polynomu (spočítané numericky).

Möbiova transformace – horní polorovina na jednotkový kruh.

Zadání: `w = (z - i)/(z + i)`

Výsledek

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Postup

- Zobrazení zapíšeme po složkách

  $w = u + iv, \quad u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}, \; v = -\frac{2x}{x^2 + y^2 +}$

- Zobrazení je konformní všude kromě pólu $z_0 = -i$:

  $f'(z) = \frac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$

- Je to Möbiova transformace $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

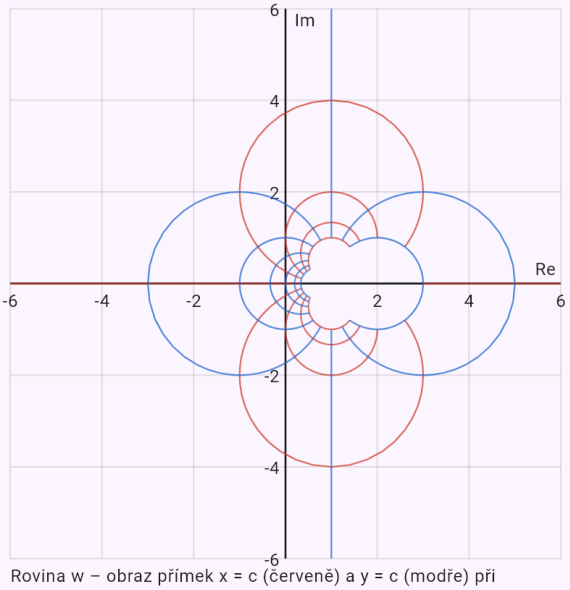
  $\alpha = 1, \; \beta = -i, \; \gamma = 1, \; \delta = i, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$

- Samodružné body řešíme z rovnice f(z) = z

  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0 : \; z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i, \; z$

- Reálná osa se zobrazí na $|w| = 1$
- Imaginární osa se zobrazí na $\mathrm{Im}\, w = 0$
- Jednotková kružnice se zobrazí na $\mathrm{Re}\, w = 0$
- V grafu je obraz mřížky – přímek x = c (červeně) a y = c (modře) pro |c| ≤ 2 s krokem $0{,}5$

Graf



Rovina w – obraz přímek x = c (červeně) a y = c (modře) při zobrazení w = f(z).

Inverzní Laplaceova transformace jako součet reziduí.

Zadání: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Výsledek

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Postup

- Inverzní Laplaceova transformace racionální funkce je součet reziduí $F(s)\,e^{st}$ ve všech pólech F

  $$f(t) = \sum \mathrm{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Singulární body – kořeny jmenovatele:
  $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0: \; s_1 = -1, \; s_2 = -2i, \; s_3 = 2i$
- V bodě -1 má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

  $$\mathrm{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- V bodě $-2i$ má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

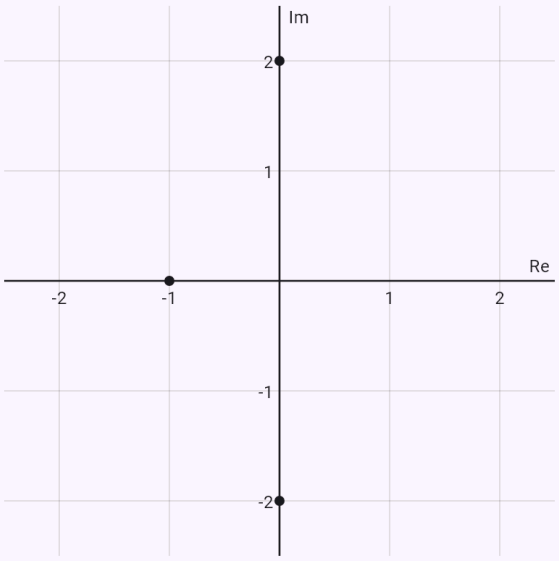
  $$\mathrm{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- V bodě $2i$ má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

  $$\mathrm{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- Sečteme rezidua a upravíme na reálný tvar:
  $$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Fourierova transformace Lorentzovy funkce: π·e^(−|ω|).

Zadání: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Výsledek

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Postup

- Fourierova transformace racionální funkce: integrál uzavřeme velkou půlkružnicí (Jordanovo lemma) a sečteme rezidua

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Singulární body – kořeny jmenovatele: $t^2 + 1 = 0: \; t_1 = -i, \; t_2 = i$
- V bodě $-i$ má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw}, \; q' =$$

- V bodě i má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw}, \; q' = 2t$$

- Pro ω > 0 uzavřeme cestu v dolní polorovině (záporný směr, −2πi)

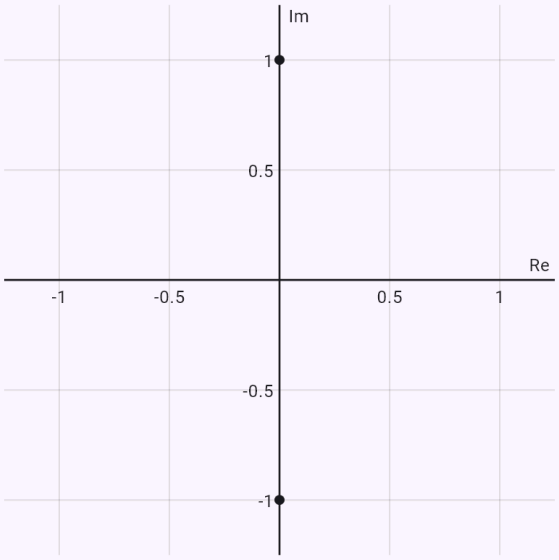
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Pro ω < 0 uzavřeme cestu v horní polorovině (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Výsledek – Fourierova transformace: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Charakteristická funkce Cauchyho rozdělení e^(−|t|).

Zadání: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Výsledek

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Postup

- Fourierova transformace racionální funkce: integrál uzavřeme velkou půlkružnicí (Jordanovo lemma) a sečteme rezidua

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Singulární body – kořeny jmenovatele: $\pi x^2 + \pi = 0: \; x_1 = -i, \; x_2 = i$
- V bodě $-i$ má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q$$

- V bodě i má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q' = 2$$

- Pro ω > 0 uzavřeme cestu v dolní polorovině (záporný směr, −2πi)

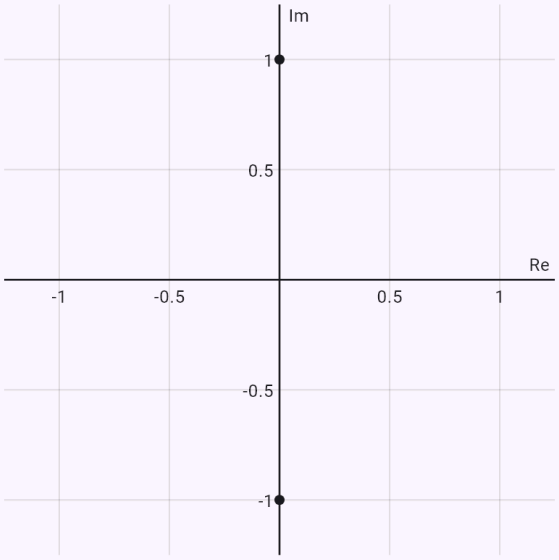
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k < 0} \mathrm{Res} = e^{-\omega}$$

- Pro ω < 0 uzavřeme cestu v horní polorovině (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k > 0} \mathrm{Res} = e^{\omega}$$

- Výsledek – Fourierova transformace: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Inverzní Z-transformace se dvěma póly: x[n] = 2 − 2⁻ⁿ.

Zadání: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Výsledek

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Postup

- Inverzní Z-transformace je součet reziduí F(z)z^{n−1} v pólech F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Singulární body – kořeny jmenovatele:
$2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2}, \; z_2 = 1$
- V bodě $\frac{1}{2}$ má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

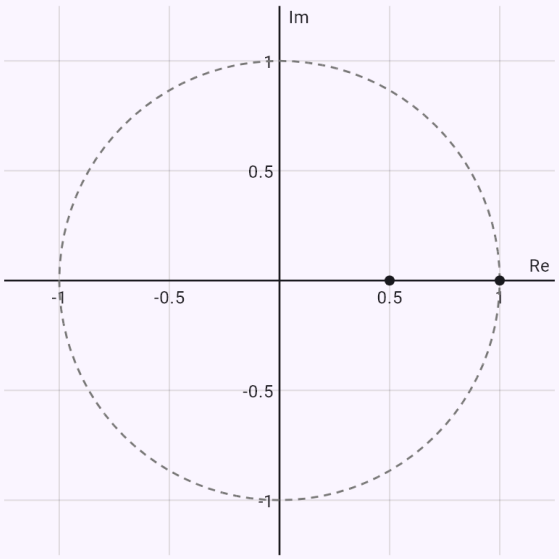
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4$$

- V bodě 1 má jmenovatel kořen násobnosti 1, čitatel násobnosti 0 – je to pól řádu 1
- Reziduum v jednoduchém pólu, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4z - 3$$

- Počáteční hodnotu dá limita pro z → ∞:
$x[0] = \lim_{z \to \infty} F(z) = 1$
- Sečteme rezidua: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Známá omezení

- Singularity aplikace hledá u funkcí s polynomem ve jmenovateli (a u podstatných singularit e^h, sin h, cos h); jmenovatel jako sin z (nekonečně mnoho pólů) zatím neumí.
- Laurentovu řadu v mezikruží umí u racionálních funkcí, u podstatné singularity jen kolem bodu, když funkce jinou singularitu nemá.
- Integrály po jiných křivkách než kružnici (čtverec, elipsa), hlavní hodnotu integrálu s pólem na ose a obecný argumentový princip zatím neumí.
- Součet řady od 1 přes rezidua jde jen pro sudou racionální funkci R; póly R v celých číslech kromě nuly aplikace nepřipustí.
- Konformní zobrazení ukáže obraz mřížky; obraz zadané oblasti (polorovina, pás) zatím jen u os a jednotkové kružnice Möbiovy transformace.
- Fourierovu transformaci umí u racionálních funkcí bez pólů na reálné ose, inverzní Z-transformaci u racionálních funkcí bez pólu v nule.

36. Diferenciální rovnice

Aplikace řeší obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu: separovatelné, lineární, exaktní, homogenní ($y' = f(y/x)$), Bernoulliovy a rovnice $y' = f(ax + by + c)$. Typ pozná sama a postup ukáže tak, jak se počítá ve škole – separace proměnných, variace konstanty nebo integrační faktor, substituce, kmenová funkce exaktní rovnice. Integrály v postupu mají vlastní kroky. Řešení ověří zkouškou: řešení a jeho derivaci dosadí do rovnice a obě strany upraví na stejný tvar.

Rovnice vyšších řádů: lineární s konstantními koeficienty libovolného řádu přes charakteristickou rovnici (i násobné a komplexní kořeny), partikulární řešení podle speciální pravé strany (i rezonance a součet pravých stran) nebo variací konstant, počáteční úlohu v nule i Laplaceovou transformací (volba čipem „Metoda“). Dále Eulerovu rovnici substitucí $x = e^t$, rovnici $y^{(n)} = f(x)$ postupnou integrací a snížení řádu – když v rovnici chybí y ($p = y'$) nebo x ($y' = p(y)$).

Rovnici $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ převede substitucí $z = \ln y$ na lineární. Lineární rovnici 2. řádu s nekonstantními koeficienty vyřeší, když jedno řešení uhodne (x^k, e^{cx}, …): druhé najde snížením řádu (d'Alembert), pravou stranu variací konstant. Řád sníží i o víc než jedna ($p = y^{(m)}$ s rovnicí 2. řádu pro p). U rovnice s parametry rozliší případy – tlumený oscilátor podle znaménka $\delta^2 - \omega^2$ (nadkritické, kritické a podkritické tlumení), rezonanci ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ pro $\omega = 2$) a znaménko konstanty, na kterém závisí integrál ($y'' = 2yy'$). Laplaceovou transformací řeší i počáteční úlohu v jiném bodě než 0 (posunutím $\tau = t - t_0$) a s parametry.

Riccatiho rovnici $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ vyřeší, když zná jedno partikulární řešení y_1: zadané na dalším řádku (y1 = 1/x), nebo uhodnuté v jednoduchém tvaru (konstanta, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a). Substituce $y = y_1 + 1/z$ ji pak převede na lineární. Rovnice, které nejsou lineární v y': Clairautovu $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – přímky $y = Cx + \psi(C)$ a singulární řešení (jejich obálku) – a Lagrangeovu $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ s parametrickým řešením (parametr $p = y'$).

Výsledkem je obecné řešení s konstantou C, u vyšších řádů s konstantami C_1, C_2, … (explicitně, a kde to nejde, implicitně), s podmínkami řešení, které je splňuje – počáteční i okrajové, včetně případů „žádné řešení“ a „nekonečně mnoho řešení“. Konstantní řešení ztracená dělením aplikace dohledá. Každé řešení ověří dosazením do rovnice. Graf u 1. řádu ukáže směrové pole a řešení pro různá C, u vyšších řádů řešení pro různé konstanty; u autonomní rovnice 2. řádu (bez x) přepínač ukáže i fázovou rovinu (y, y'). Pod grafem můžete zadat vlastní hodnoty konstant a přidat k nim křivku; přepínač „Výchozí křivky“ skryje ty, které vybrala aplikace. Ťuknutím do grafu se dokreslí řešení, které prochází tím bodem – u lineární rovnice 2. řádu navíc posuvníkem nastavíte směrnici tečny v bodě.

Soustavu dvou lineárních rovnic s konstantními koeficienty ($x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$, i dx/dt) vyřeší přes vlastní čísla a vlastní vektory matice – reálná, komplexní i dvojnásobná – s počátečními podmínkami x(0), y(0). Stacionární bod [0; 0] zařadí (uzel, sedlo, ohnisko, střed) a ukáže fázovou rovinu.

Oscilaci lineární rovnice 2. řádu (každé řešení má nekonečně mnoho nulových bodů) zkoumá příkaz oscillation(y" + x y = 0) (česky i oscilace(...)), i pro rovnici v samoadjungovaném tvaru (x y')' + y/x = 0 nebo s y′ (aplikace ji do tohoto tvaru převede). Postup: přesně pro konstantní q a Eulerovu rovnici y″ + (k/x²)y = 0 s hranicí k = 1/4, Leightonovo–Wintnerovo a Kneserovo kritérium (v kritickém případě i srovnání s Riemannovou–Weberovou rovnicí), Riccatiho substituce w = r y′/y, Prüferova transformace a numerický počet nulových bodů na intervalu (zadejte ho za středníkem: ; ⟨1; 50⟩) se Sturmovým odhadem jejich vzdálenosti. Pololineární rovnici (|y'| y')' + q |y| y = 0 (obecně exponent |y'|^(p−2)) posoudí s kritickou konstantou ((p − 1)/p)^p, diskrétní obdobu Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (i Δ(r_n Δy_n)) podle zobecněných nulových bodů. Graf ukáže řešení s nulovými body a Prüferův úhel φ.

Asymptotiku řešení nelineární rovnice s p-Laplaciánem (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y s kladnými a, b zkoumá příkaz asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (česky i asymptotika(...)); |y'|^k y' a |y|^k y jde psát i se sgn, lichou mocninou (y')³, y³ a pro α = 1 jako (a y')' nebo y". Řešení rozdělí do tříd M^+ (|y| roste) a M^- (|y| klesá) podle limit y a kvaziderivace y^[1] = a|y′|^α sgn y′. U pololineární rovnice (β = α) spočítá integrály J_1, J_2, Y_1, Y_2 (Symjou, jinak srovnáním mocninného a logaritmického chování), určí jeden z případů C1–C8 a neprázdné třídy podle Věty 3.1 z práce Z. Došlé a M. Mariniho Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020) a ukáže reciproční rovnici. U rovnice Emdenova–Fowlerova typu s β ≠ α použije věty z článku M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): superlineární a sublineární případ, silně a slabě rostoucí a regulárně klesající řešení. Graf ukáže numerická řešení neprázdných tříd (M^- střelbou) a pod nimi jejich kvaziderivace. Počátek intervalu zadejte za středníkem (; x ≥ 1). U rovnice se záporným q nabídne oscilace čip Asymptotika řešení a asymptotika naopak čip Oscilace rovnice.

Jak zadat

`y' = x*y`	Derivace čárkou.
`dy/dx = x y^2`	Leibnizův zápis – určí i proměnnou (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Zápis z fotky.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	Tvar M dx + N dy = 0 (exaktní rovnice).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Počáteční podmínka za čárkou nebo na dalším řádku.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	Funkce a proměnná mohou mít libovolná písmena.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Známé partikulární řešení Riccatiho rovnice na dalším řádku (nebo za středníkem).

`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Rovnice vyššího řádu – derivace více čárkami.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Vyšší derivace zápisem y^{(4)} (i z fotky).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Počáteční podmínky y(0), y′(0) – nebo okrajové v různých bodech.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Newtonovy tečky (derivace podle času t) a řecké parametry.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Soustava dvou lineárních rovnic – za čárkou nebo na řádcích, s podmínkami x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscilace rovnice 2. řádu, volitelně s intervalem pro nulové body.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Pololineární rovnice (zde p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	Diskrétní obdoba – lineární rekurence 2. řádu.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asymptotika řešení rovnice s p-Laplaciánem, volitelně s počátkem intervalu.

Ukázky

Separovatelná rovnice – obecné řešení a směrové pole.

Zadání: `y' = x*y`

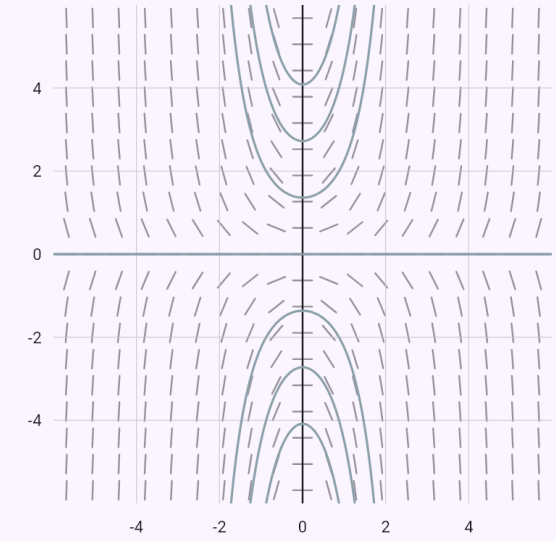
Výsledek

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé: $y' = xy$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Integrujeme obě strany: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- Konstantní řešení $y = 0$, které jsme dělením vyloučili, je v obecném řešení obsažené pro C = 0
- Zkouška – derivace řešení $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Graf



řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Počáteční podmínka určí konstantu C.

Zadání: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Výsledek

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Řešit numerickou metodou:

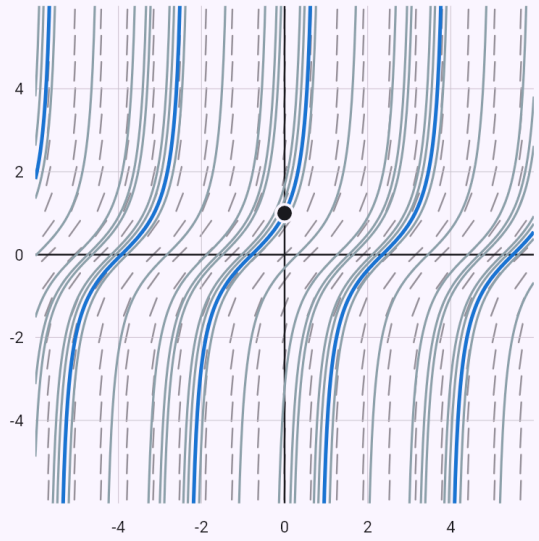
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Postup

- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé: $y' = y^2 + 1$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Integrujeme obě strany: $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \operatorname{arctg} y$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1\,dx = x$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\operatorname{arctg} y = x + C$
- Vyjádříme řešení: $y = \operatorname{tg}(x + C)$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 1$: $1 = \operatorname{tg} C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl $\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice a upravíme podle vzorce obě strany se rovnají $1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 +$$

Graf



řešení pro různá C

$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají. Zvýrazněné je řešení s počáteční podmínkou, bod je počáteční podmínka.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C | + Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Lineární rovnice variací konstanty.

Zadání: `y' + 2y = e^x` Variace konstanty

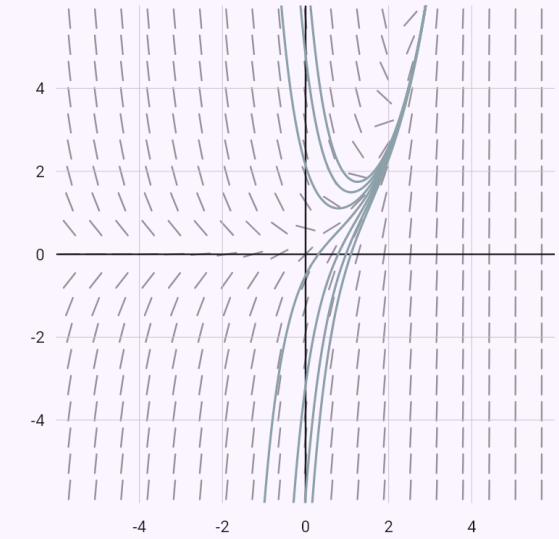
Výsledek

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rovnice 1. řádu tvaru y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y' + 2y = 0$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 2\,dx = 2x$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru $y = C(x)\,e^{-2x}$; dosazením do rovnice dostaneme $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- Odtud $C'(x) = e^{3x}$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Obecné řešení: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graf



řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Táž rovnice integračním faktorem.

Zadání: `y' + 2y = e^x` Integrační faktor

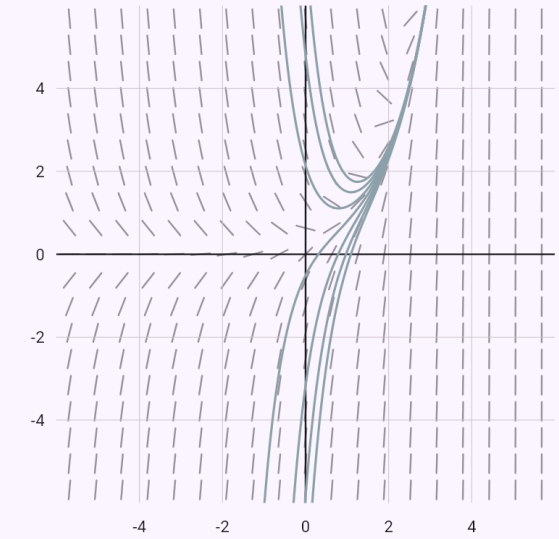
Výsledek

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rovnice 1. řádu tvaru y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 2\,dx = 2x$
- Integrační faktor: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Rovnici vynásobíme integračním faktorem – levá strana je pak derivace součinu: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Zintegrujeme obě strany: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Obecné řešení: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graf



řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C + Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Homogenní rovnice – substituce u = y/x.

Zadání: `y' = (x - y)/(x + y)`

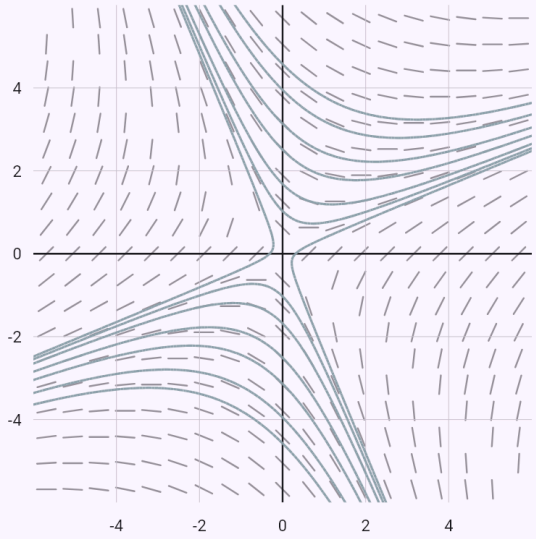
Výsledek

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Homogenní rovnice – pravá strana závisí jen na podílu y/x: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- Substituce $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ převede rovnici na $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Integrujeme obě strany: $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- V čitateli je derivace jmenovatele (případně její násobek), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, podle vzorce $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$ $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\ln$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- Odlogaritmujeme – konstantu ±e^C označíme opět C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- Konstantní řešení $u = -1 - \sqrt{2}$, které jsme dělením vyloučili, je v obecném řešení obsažené pro C = 0
- Konstantní řešení $u = -1 + \sqrt{2}$, které jsme dělením vyloučili, je v obecném řešení obsažené pro C = 0
- Vrátíme se k původní neznámé: $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Graf



řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Bernoulliova rovnice – substituce z = y^(1−n) a konstantní řešení y = 0.

Zadání: `xy' - y = -xy^2`

Výsledek

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Postup

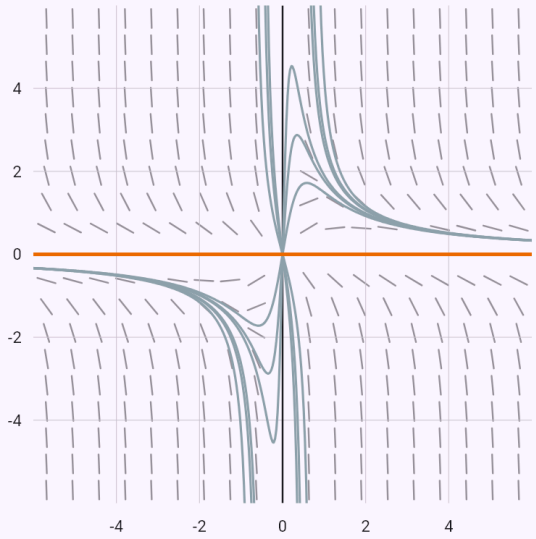
- Bernoulliova rovnice tvaru y' + p(x)·y = q(x)·yⁿ: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- Substituce $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ převede rovnici na $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Řešení homogenní rovnice: $z_h = \frac{C}{x}$
- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; dosazením do rovnice dostaneme $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$
- Odtud $C'(x) = x$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- Obecné řešení: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Vrátíme se k původní neznámé: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Vyjádříme řešení: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Dělením jsme vyloučili konstantní řešení $y = 0$ – to je další řešení rovnice.
- Konstantu přeznačíme (násobek libovolné konstanty je opět libovolná konstanta): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2 \cdot \frac{x^2 + C - x \cdot 2x}{(x^2 + C)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Graf



řešení pro různá C

$y = 0$

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Exaktní rovnice – kmenová funkce F(x, y) = C.

Zadání: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

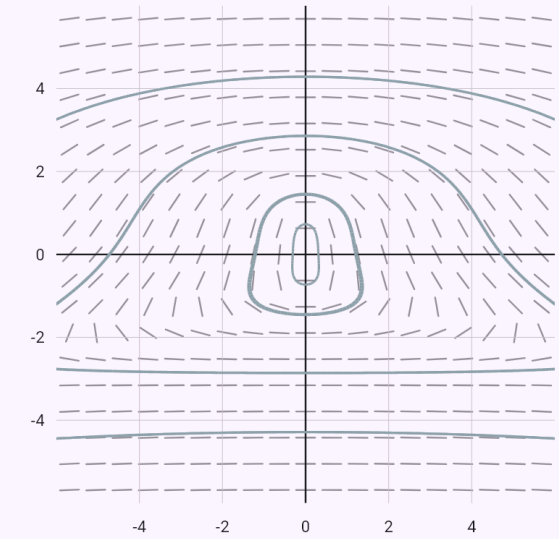
Výsledek

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Rovnice tvaru M dx + N dy = 0 – ověříme, zda je exaktní (levá strana je totální diferenciál): $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; rovnice je exaktní, protože $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- Integrál součtu je součet integrálů: $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Kmenovou funkci F najdeme integrací M podle x: $F(x,y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- Z podmínky ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Graf



řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Substituce z = x − y; Symja by tu ztratila dvojku, aplikace výsledek ověří.

Zadání: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Výsledek

$$y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1)$$

Řešit numerickou metodou:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Postup

- Pravá strana je funkcí výrazu ax + by + c – zavedeme ho jako novou neznámou: $y' = \cos(x-y)$
- Substituce $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ převede rovnici na $z' = 1 - \cos z$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $1-\cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Integrujeme obě strany: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Žádná jednodušší substituce nesedí – univerzální substituce $t = \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Vrátíme se k původní proměnné

  $t = \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right):\quad -\mathrm{cotg}\left(\frac{z}{2}\right)$
- Podle tabulky základních integrálů: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $-\mathrm{cotg}\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Vyjádříme řešení: $z = 2\,\mathrm{arccotg}\,(C-x)$
- Dělením jsme vyloučili konstantní řešení $z = 0$ – to je další řešení rovnice.
- Vrátíme se k původní neznámé: $y = x - 2\,\mathrm{arccotg}\,(C-x)$
- Konstantu přeznačíme (násobek libovolné konstanty je opět libovolná konstanta): $y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+C)$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$:

  $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arccotg}\,C \Rightarrow C = 1$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1)$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

  $$(2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{}{x^2+}$$
- Sečteme a upravíme

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos\left(x - (x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1))\right)$$

Riccatiho rovnice – partikulární řešení $y_1 = -2/x$ uhodnuté, substituce $y = y_1 + 1/z$.

Zadání: `y' = y^2 - 2/x^2`

Výsledek

$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Postup

- Riccatiho rovnice tvaru y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Bez partikulárního řešení Riccatiho rovnici vyřešit neumíme. Zkusíme ho uhodnout v jednoduchém tvaru (konstanta, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a) – rovnici splňuje $y_1 = -\frac{2}{x}$: $y_1' = \frac{2}{x^2}$ a po dosazení do pravé strany vyjde totéž.
- Substituce $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ převede rovnici na $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Řešení homogenní rovnice: $z_h = Cx^4$
- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru $z = C(x)\cdot x^4$; dosazením do rovnice dostaneme $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- Odtud $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- Obecné řešení: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Vrátíme se k původní neznámé: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- Samotné řešení $y = -\frac{2}{x}$ substituce y = y₁ + 1/z vynechává (odpovídá z → ∞) – přidáme ho k výsledku.
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

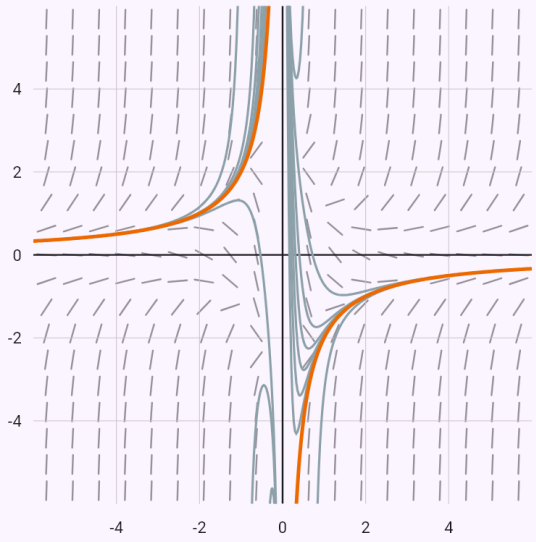
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3)}{(3Cx^4 + x)^2}$$

- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají

$$\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

Graf



řešení pro různá C

$y = -\frac{2}{x}$

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Táž rovnice se zadaným partikulárním řešením $y_1 = 1/x$.

Zadání: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Výsledek

$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Postup

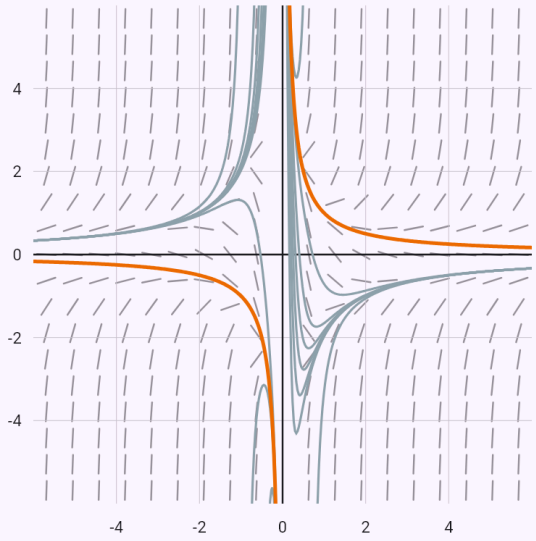
- Riccatiho rovnice tvaru y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Zadané partikulární řešení $y_1 = \frac{1}{x}$ rovnici splňuje: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$ a po dosazení do pravé strany vyjde totéž.
- Substituce $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ převede rovnici na $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Řešení homogenní rovnice: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; dosazením do rovnice dostaneme $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- Odtud $C'(x) = -x^2$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- Obecné řešení: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Vrátíme se k původní neznámé: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- Samotné řešení $y = \frac{1}{x}$ substituce y = y_1 + 1/z vynechává (odpovídá z → ∞) – přidáme ho k výsledku.
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ dosazená do rovnice dává rovnost.
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl

$$\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$$

- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají

$$\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$$

Graf



řešení pro různá C

$y = \frac{1}{x}$

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C

+ Přidat křivku

Ťukněte do grafu – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem.

Clairautova rovnice – přímky y = Cx + C² a jejich obálka y = −x²/4.

Zadání: `y = xy' + y'^2`

Výsledek

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Postup

- Clairautova rovnice tvaru y = x·y' + ψ(y'). Označíme $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Rovnici zderivujeme podle x (p = y' závisí na x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Je-li p' = 0, je p konstantní a obecné řešení tvoří přímky: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Druhý činitel x + ψ'(p) = 0 dává singulární řešení – obálku všech těch přímek. Parametricky $x = -2p,\ y = -p^2$, po vyloučení p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Graf



řešení pro různá C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Šedé přímky jsou řešení pro různé hodnoty C, barevně je singulární řešení – jejich obálka, které se každá přímka dotýká.

Bodem [2; −1] na obálce prochází jediná přímka y = 1 − x – a obálka sama.

Zadání: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Výsledek

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Postup

- Clairautova rovnice tvaru y = x·y' + ψ(y'). Označíme $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Rovnici zderivujeme podle x (p = y' závisí na x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Je-li p' = 0, je p konstantní a obecné řešení tvoří přímky: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Druhý činitel x + ψ'(p) = 0 dává singulární řešení – obálku všech těch přímek. Parametricky $x = -2p,\ y = -p^2$, po vyloučení p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Graf



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

Barevně jsou řešení procházející zadaným bodem – přímky, případně i obálka.

Lagrangeova rovnice – řešení v parametrickém tvaru a přímka y = 0.

Zadání: `y = 2xy' + y'^2`

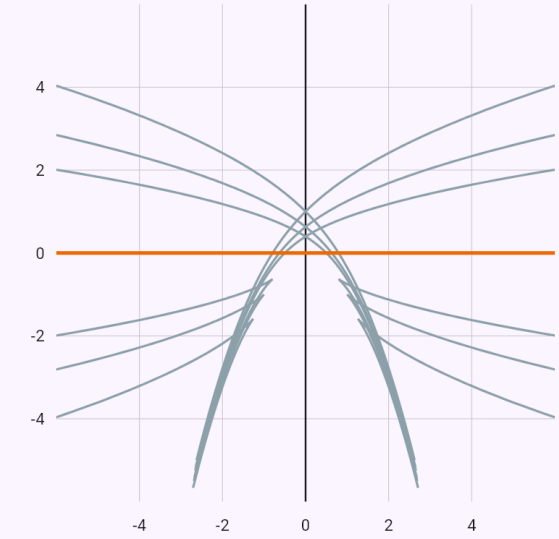
Výsledek

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lagrangeova rovnice tvaru y = x·φ(y') + ψ(y'). Označíme $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Rovnici zderivujeme podle x (p = y' závisí na x): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Hledáme x jako funkci p: z rovnice vyjádříme dx/dp – v neznámé x je lineární: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Lineární rovnice 1. řádu tvaru y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Řešení homogenní rovnice: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru $x = C(p)\cdot\frac{1}{p^2}$; dosazením do rovnice dostaneme $C'(p)\cdot\frac{1}{p^2} = -2$
- Odtud $C'(p) = -2p^2$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Zintegrujeme: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- Obecné řešení: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Konstantu přeznačíme (násobek libovolné konstanty je opět libovolná konstanta): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Dosazením x do zadané rovnice dostaneme obecné řešení v parametrickém tvaru (parametr p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Výrazem p − φ(p) jsme dělili, vynechali jsme tedy hodnoty, pro které $p = 2p$. Každá z nich dává přímku, která rovnici také splňuje: $y = 0$

Graf



řešení pro různá C

$y = 0$

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Charakteristická rovnice s komplexními kořeny −2 ± 3i.

Zadání: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Výsledek

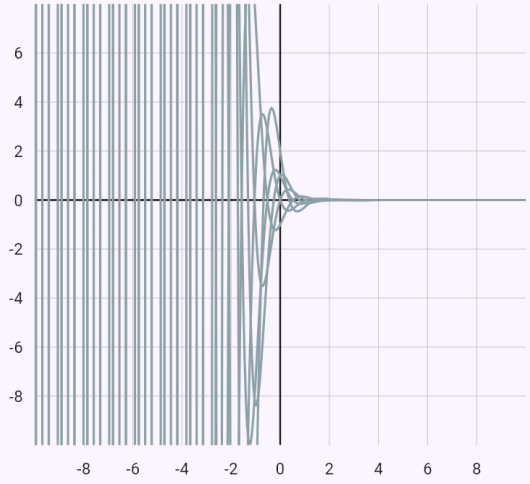
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Diskriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; kořeny: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- Obecné řešení: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Graf

Řešení | Fázová rovina



řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C_1 C_2 + Přidat křivku

Ťukněte do grafu a posuvníkem nastavte směrnici – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem s danou směrnicí tečny.

Speciální pravá strana při rezonanci – 2 je kořenem charakteristické rovnice.

Zadání: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Speciální pravá strana

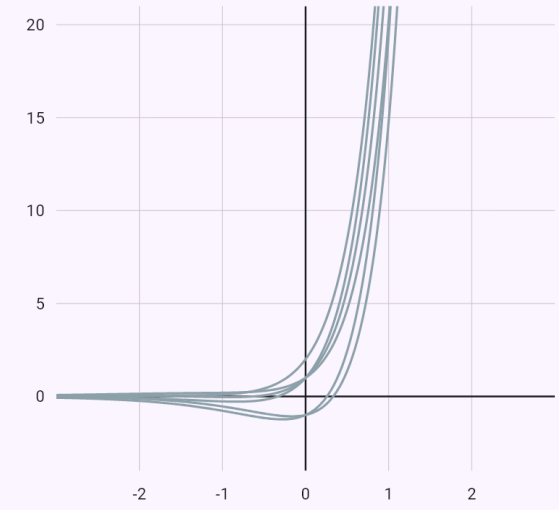
Výsledek

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; kořeny: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- Pravá strana $3e^{2x}$ má speciální tvar; číslo 2 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme x: $y_p = A x e^{2x}$
- Derivace: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $A = 3$
- Partikulární řešení: $y_p = 3xe^{2x}$
- Obecné řešení: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Graf



řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C₁ C₂ + Přidat křivku

Ťukněte do grafu a posuvníkem nastavte směrnici – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem s danou směrnicí tečny.

Pravá strana tg x není speciální – variace konstant a wronskián.

Zadání: `y'' + y = tan x`

Výsledek

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + y = \operatorname{tg} x$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' + y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variace konstant – řešení hledáme ve tvaru $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, derivace funkcí C_k splňují soustavu
  $$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$
- Determinant soustavy (wronskián)
  $$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$
- Odtud $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$
- Odtud $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- Konstantu vytkneme před integrál
  $$\int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = -\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$
- Funkce je lichá vůči kosinu – substituce $t = \sin x$
  $$dt = \cos x \, dx$$
  $$\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky
  $$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{}$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int -1 \, dt = -t$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $$\int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} \, dt$$
- Podle tabulky základních integrálů:
  $$\int \frac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $$\int \frac{1}{2(t+1)} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} \, dt$$
- Podle tabulky základních integrálů:
  $$\int \frac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$$
- Vrátíme se k původní proměnné
  $$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$
- Zintegrujeme (integrační konstanty už obsahuje řešení homogenní rovnice)
  $$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- Zintegrujeme (integrační konstanty už obsahuje řešení homogenní rovnice): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Partikulární řešení: $y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$
- Obecné řešení
  $$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Integrály variace konstant, které nejdou vyjádřit elementárními funkcemi – řešení s integrálem.

Zadání: `y'' + y' + y = tan x`

Výsledek

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{}\right.\right.$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + y' + y = \operatorname{tg} x$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' + y' + y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- Diskriminant $D = 1^2 - 4 = -3$; kořeny: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
- Řešení homogenní rovnice $y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
- Variace konstant – řešení hledáme ve tvaru derivace funkcí C_k splňují soustavu $y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- Determinant soustavy (wronskián)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{}\right.\right.}{2} \end{vmatrix}$$

- Odtud $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}$
- Odtud $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}$
- Zintegrujeme (integrační konstanty už obsahuje řešení homogenní rovnice) $C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\,dx$
- Zintegrujeme (integrační konstanty už obsahuje řešení homogenní rovnice) $C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\,dx$
- Tyto integrály nejdou vyjádřit elementárními funkcemi (vedou na vyšší, neelementární funkce), proto je v řešení necháme v integrálním tvaru $\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\,dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$
- Obecné řešení $y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$

Počáteční úloha – soustava pro konstanty C_1, C_2.

Zadání: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Výsledek

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

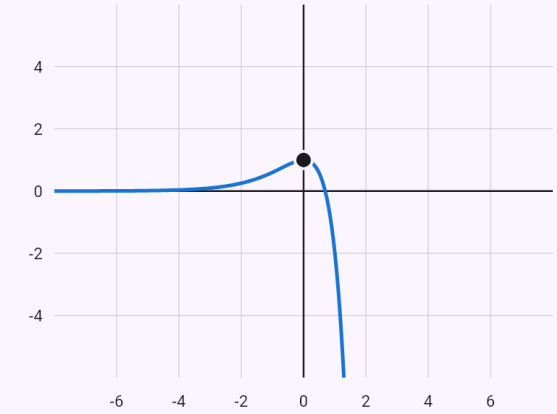
Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; kořeny: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- Pravá strana e^{2x} má speciální tvar; číslo 2 není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $y_p = Ae^{2x}$
- Derivace: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $-A = 1$
- Odtud $A = -1$
- Partikulární řešení: $y_p = -e^{2x}$
- Obecné řešení: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Derivace obecného řešení: $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Dosazením podmínek dostaneme soustavu odtud $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- Řešení splňující zadané podmínky: $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Graf



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

Vlastní hodnoty konstant

C_1 | C_2 | + Přidat křivku

Ťukněte do grafu a posuvníkem nastavte směrnici – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem s danou směrnicí tečny.

Táž úloha Laplaceovou transformací.

Zadání: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Laplaceova transformace

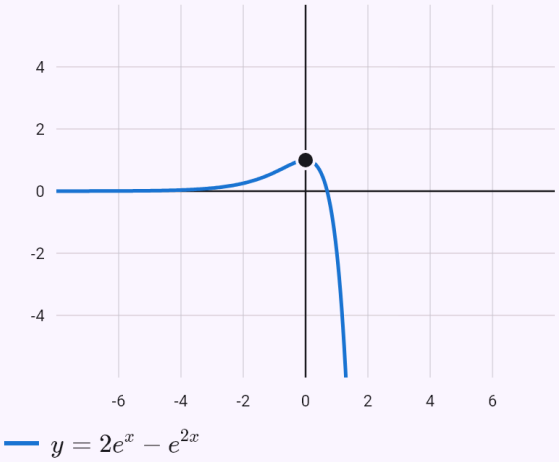
Výsledek

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Laplaceova transformace obou stran: $\mathcal{L}$(y) = Y, $\mathcal{L}$(y') = sY − y(0), $\mathcal{L}$(y'') = s²Y − s·y(0) − y'(0); dosadíme počáteční podmínky: $\left(s^2Y - s\right) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Vyjádříme obraz Y: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Rozložíme na parciální zlomky: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- Zpětnou transformací (podle slovníku obrazů) dostaneme řešení: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Graf



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

Okrajová úloha s nekonečně mnoha řešeními.

Zadání: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Výsledek

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Obecné řešení: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 0$
  $\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$
- Konstanta C_2 zůstává libovolná – úloha má nekonečně mnoho řešení.
- Řešení splňující zadané podmínky: $y = C_2 \sin x$

Eulerova rovnice – substituce x = eᵗ.

Zadání: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

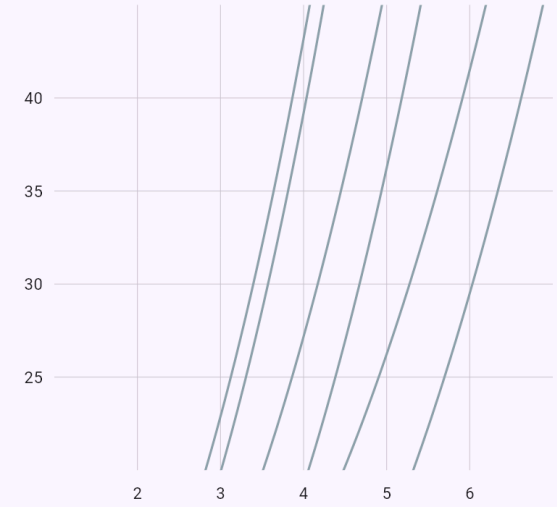
Výsledek

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Postup

- Eulerova rovnice – u každé derivace y^(k) stojí x^k; substitucí x = e^t z ní bude rovnice s konstantními koeficienty: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- Substituce $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ převede rovnici na $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λt); po dosazení a vydělení e^(λt) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; kořeny: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Pravou stranu rozdělíme na části speciálního tvaru – partikulární řešení najdeme pro každou zvlášť a sečteme je: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- Pravá strana 2 má speciální tvar; číslo 0 není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $y_{p_1} = A$
- Derivace: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $2A = 2$
- Odtud $A = 1$
- Partikulární řešení: $y_{p_1} = 1$
- Pravá strana e^{2t} má speciální tvar; číslo 2 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme x: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Derivace: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $A = 1$
- Partikulární řešení: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Partikulární řešení: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- Obecné řešení: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Vrátíme se k původní proměnné (t = ln x, pro $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graf



řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C₁ | C₂ | + Přidat křivku

Ťukněte do grafu a posuvníkem nastavte směrnici – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem s danou směrnicí tečny.

Snížení řádu y' = p(y), konstanty z počátečních podmínek postupně.

Zadání: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Výsledek

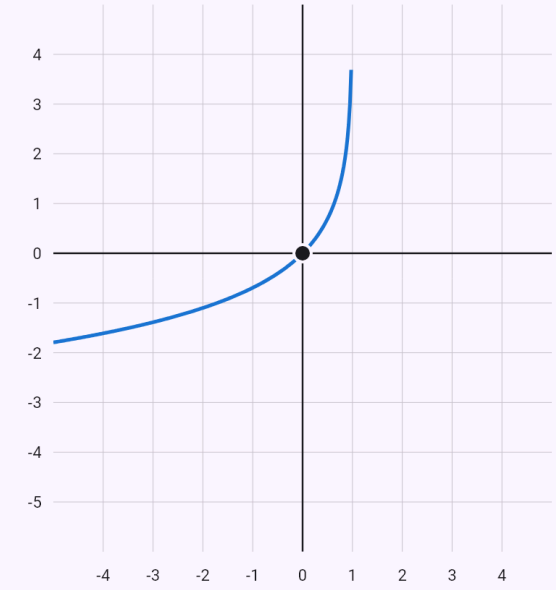
$$y = -\ln(1 - x)$$

Postup

- V rovnici chybí nezávislá proměnná – derivaci y' vezmeme jako funkci y: $y'' = e^{2y}$
- Substituce $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ převede rovnici na $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; z počátečních podmínek plyne $p(0) = 1$
- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Separujeme proměnné: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Integrujeme obě strany: $\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int p\,dp = \dfrac{p^2}{2}$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné: $\int e^{2y}\,dy = \dfrac{e^{2y}}{2}$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Vyjádříme řešení: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Dosadíme počáteční podmínku $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $p = e^y$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají: $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Vrátíme se k původní neznámé: $y' = e^y$
- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé: $y' = e^y$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $e^y \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Integrujeme obě strany: $\int \dfrac{dy}{e^y} = \int dx$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární, výsledek proto vydělíme jejím koeficientem u proměnné: $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1\,dx = x$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $-e^{-y} = x + C_2$
- Vyjádříme řešení: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $y = -\ln(1 - x)$
- Člen derivujeme podle pravidel pro složenou funkci, součin a podíl: $(-\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{1-x}$
- Dosadíme řešení a jeho derivaci do rovnice, obě strany se rovnají: $\dfrac{1}{1-x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Graf

Řešení | Fázová rovina



$y = -\ln(1 - x)$

Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

Tlumený oscilátor – tři případy podle δ a ω.

Zadání: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Výsledek

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\right.\right.$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2-\omega^2}$
- Pro $\delta > \omega$ tedy

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2-\omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2-\omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2-\omega^2}-\delta)x}$
- Pro $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, tedy $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$
- Pro $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2-\delta^2}i$, tedy

  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2-\delta^2}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2-\delta^2}x\right)\right.$

Rezonance – pro ω = 2 má řešení jiný tvar.

Zadání: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Výsledek

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λt); po dosazení a vydělení e^(λt) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Pravá strana $\cos(2t)$ má speciální tvar; číslo $2i$ není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Derivace $y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy $\left(A\omega^2 - 4A\right)\cos(2t) + \left(B\omega^2 - 4B\right)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Porovnáme koeficienty u stejných členů na obou stranách odtud $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Partikulární řešení: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Obecné řešení

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$

- Pro $\omega = 2$ je číslo z pravé strany kořenem charakteristické rovnice (rezonance) – tvar řešení je jiný: $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$

Uhodnuté řešení $y_1 = x$ a snížení řádu (d'Alembert).

Zadání: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Výsledek

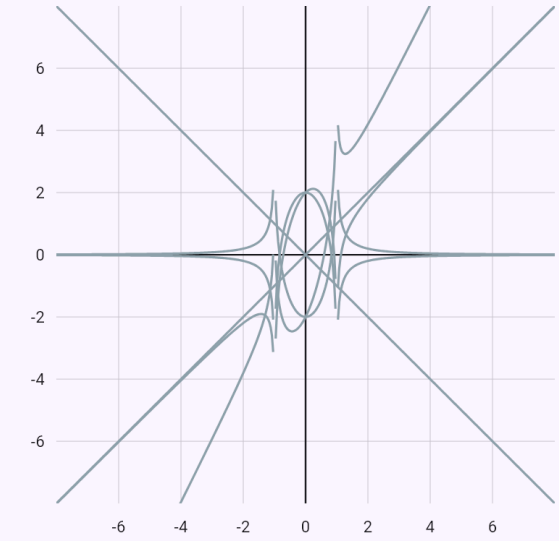
$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Postup

- Lineární rovnice 2. řádu s nekonstantními koeficienty:
  $y'' + \frac{2x}{x^2-1} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0$
- Jedno řešení uhodneme a dosazením ověříme: $y_1 = x$.
  Druhé najdeme snížením řádu (d'Alembert, y = $y_1 \cdot u$)
  $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$
- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky
  $\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$
- Integrál součtu je součet integrálů
  $\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů:
  $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů:
  $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$
- Konstantu vytkneme před integrál:
  $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Obecné řešení:

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$$

Graf



řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Výchozí křivky

Vlastní hodnoty konstant

C_1 | C_2 | + Přidat křivku

Ťukněte do grafu a posuvníkem nastavte směrnici – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem s danou směrnicí tečny.

Soustava – vlastní čísla opačných znamének, sedlo.

Zadání: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Výsledek

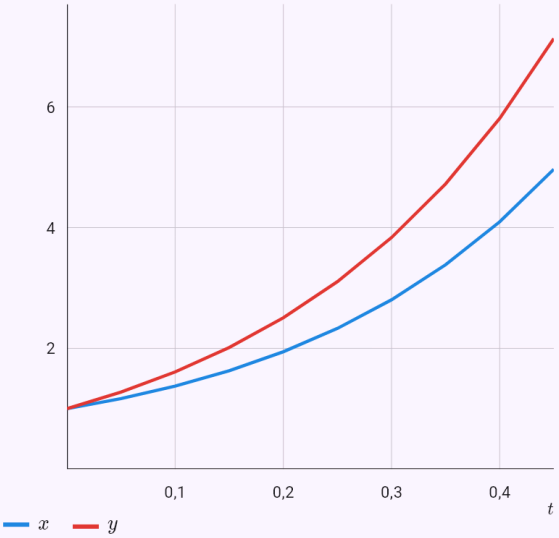
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Postup

- Soustavu zapíšeme maticově
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Vlastní čísla matice z charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – dvě různá reálná.
- Vlastní vektory, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Obecné řešení
  $$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$$
  $$y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$$
- Stacionární bod $[0;\ 0]$ je sedlo – vlastní čísla mají opačná znaménka, bod je nestabilní.

Graf

Průběh v čase | Fázová rovina



Řešení soustavy v čase pro zadané počáteční podmínky (bez nich pro x(0) = y(0) = 1).

Komplexní vlastní čísla – nestabilní ohnisko.

Zadání: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Výsledek

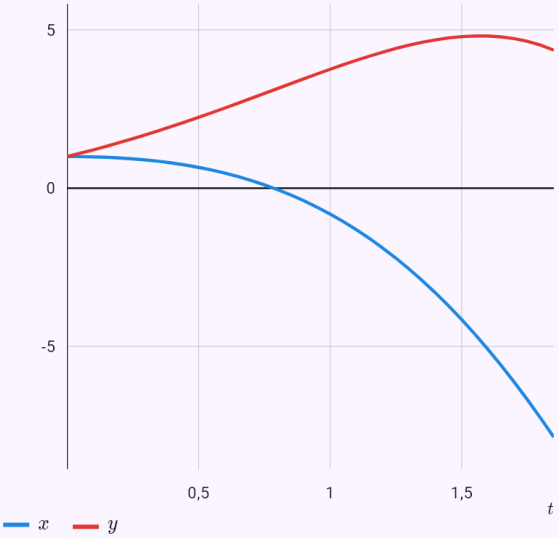
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Postup

- Soustavu zapíšeme maticově
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Vlastní čísla matice z charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – komplexně sdružená.
- Vlastní vektory, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Obecné řešení
  $$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$$
  $$y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$$
- Stacionární bod $[0;\ 0]$ je nestabilní ohnisko – reálná část vlastních čísel je kladná, trajektorie se od něj spirálovitě vzdalují.

Graf

Průběh v čase | Fázová rovina



Řešení soustavy v čase pro zadané počáteční podmínky (bez nich pro x(0) = y(0) = 1).

Soustava s počátečními podmínkami – střed.

Zadání: `x' = y`
`y' = -x`
`x(0) = 1`
`y(0) = 0`

Výsledek

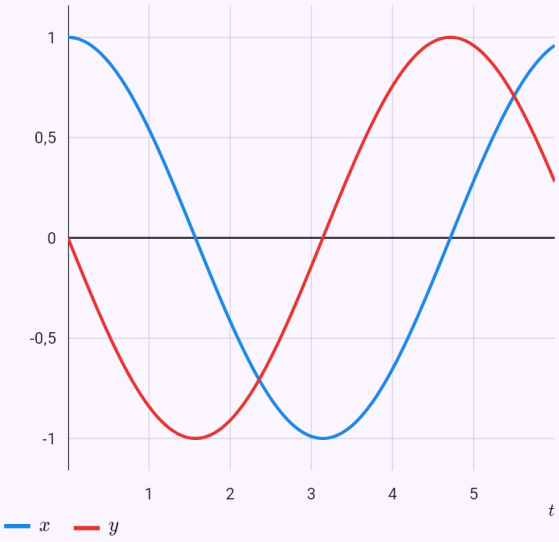
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Postup

- Soustavu zapíšeme maticově
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Vlastní čísla matice z charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – komplexně sdružená.
- Vlastní vektory, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Obecné řešení
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Konstanty z počátečních podmínek odtud
  $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
  $C_1 = 1$
  $C_2 = 0$
- Stacionární bod $[0;\ 0]$ je střed – vlastní čísla jsou ryze imaginární, trajektorie jsou uzavřené křivky kolem něj.

Graf

Průběh v čase | Fázová rovina



Řešení soustavy v čase pro zadané počáteční podmínky (bez nich pro x(0) = y(0) = 1).

Airyho rovnice – Leightonovo–Wintnerovo kritérium a 12 nulových bodů.

Zadání: `oscillation(y'' + x y = 0)`

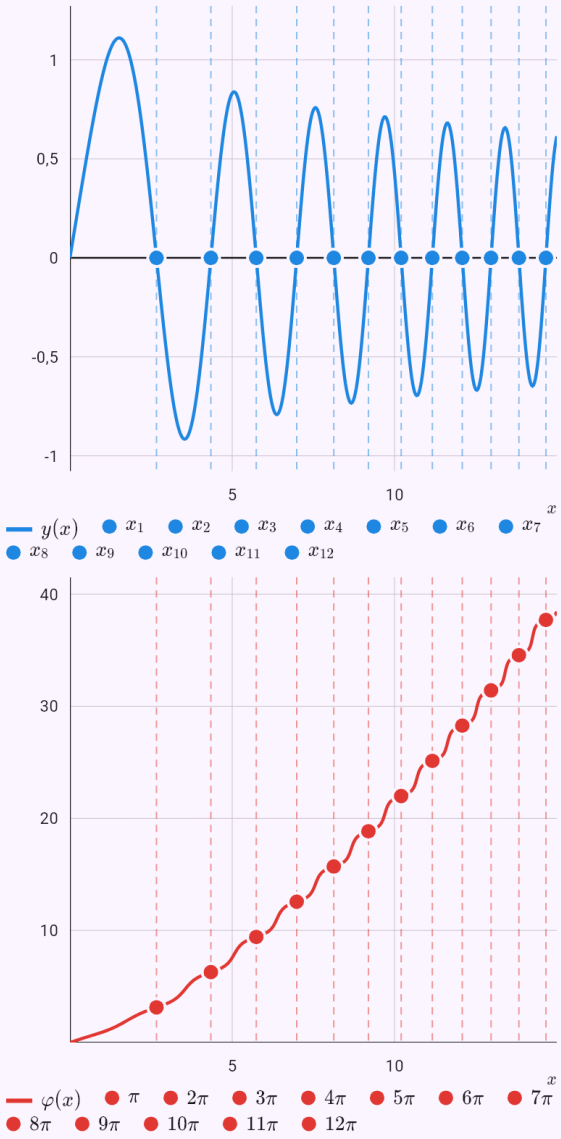
Výsledek

Rovnice je oscilatorická.

Postup

- Zkoumáme rovnici $y'' + xy = 0$ na intervalu $\langle 0;\ \infty)$, tedy y" + q(x)y = 0 s q = x
- Rovnice je oscilatorická, když každé její netriviální řešení má na intervalu nekonečně mnoho nulových bodů. Podle Sturmovy separační věty se nulové body dvou nezávislých řešení střídají, takže stačí zkoumat jedno řešení: buď oscilují všechna řešení, nebo žádné.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium: když ∫ 1/r = ∞ a zároveň ∫ q = ∞, je rovnice oscilatorická. Zde $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$ a $\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$, rovnice je tedy oscilatorická.
- Kneserovo kritérium s kritickou konstantou $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, rovnice je oscilatorická.
- Riccatiho technika: substituce $w = \frac{y'}{y}$ převede rovnici na Riccatiho rovnici $w' + w^2 + x = 0$. Rovnice není oscilatorická, právě když má Riccatiho rovnice řešení na celém intervalu ⟨T; ∞) pro nějaké T. U oscilatorické rovnice takové řešení není: w v každém nulovém bodě y „uteče“ do −∞.
- Prüferova transformace $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ převede rovnici na rovnici pro úhel φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. V nulovém bodě y je φ násobkem π a φ' > 0, úhel tedy přes násobky π jen roste. Počet nulových bodů na intervalu (a; b⟩ je proto ⌊φ(b)/π⌋. Počítáme numericky metodou Runge–Kutta (RK4) z počátečních hodnot $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- Na intervalu $(0;\ 15\rangle$ má řešení tolik nulových bodů: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Sousední nulové body jsou od sebe vzdáleny $0{,}8322$ až $1{,}6761$. Nulové body $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,$ …
- Sturmova srovnávací věta: na intervalu $\langle 0;\ 15\rangle$ je $q \in \langle 0;\ 15\rangle$. q tam není všude kladné, máme proto jen dolní odhad vzdálenosti sousedních nulových bodů: $0{,}8112 \le \Delta$
- Závěr: rovnice je oscilatorická – každé její netriviální řešení má nekonečně mnoho nulových bodů.

Graf



Řešení s vyznačenými nulovými body; pod ním Prüferův úhel φ, který v nulových bodech prochází násobky π.

Eulerova rovnice na hranici k = 1/4 – ještě neosciluje.

Zadání: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

Výsledek

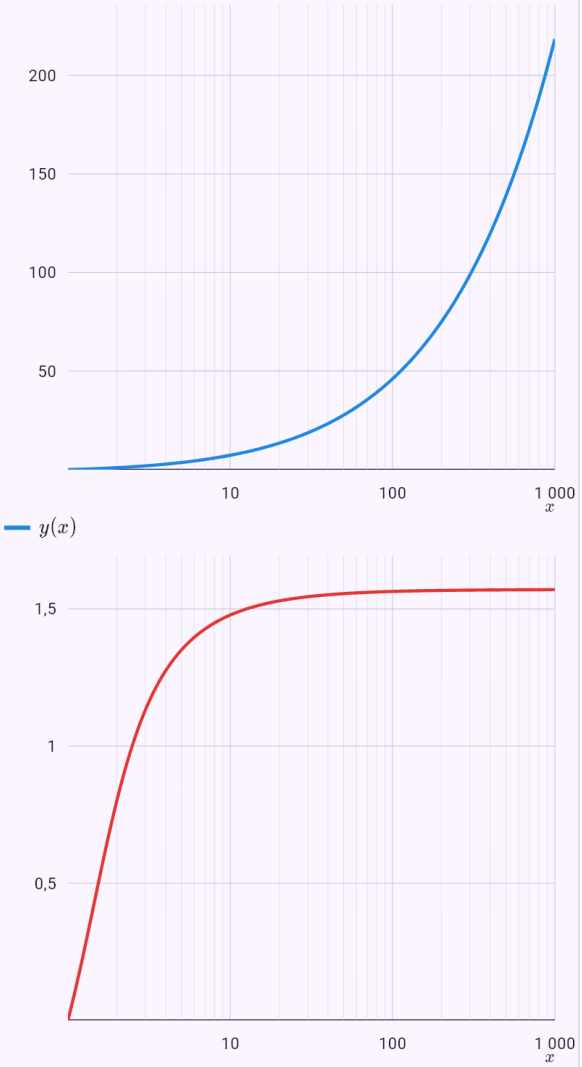
Rovnice není oscilatorická.

Postup

- Zkoumáme rovnici $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ na intervalu $\langle 1;\ \infty)$, tedy y" + q(x)y = 0 s q = $\frac{1}{4x^2}$
- Rovnice je oscilatorická, když každé její netriviální řešení má na intervalu nekonečně mnoho nulových bodů. Podle Sturmovy separační věty se nulové body dvou nezávislých řešení střídají, takže stačí zkoumat jedno řešení: buď oscilují všechna řešení, nebo žádné.
- Jde o Eulerovu rovnici y" + (k/x²)y = 0 s hraniční hodnotou k = $\frac{1}{4}$. Charakteristická rovnice $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{4}=0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}$, řešení $y=\sqrt{x}(C_1+C_2\ln x)$ má nejvýše jeden nulový bod. Rovnice ještě není oscilatorická.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium: když ∫ 1/r = ∞ a ∫ q = ∞, je rovnice oscilatorická. Zde $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x=\infty$, ale $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$, takže kritérium nerozhodne.
- Kneserovo kritérium: $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{4}$ se rovná kritické konstantě $\frac{1}{4}$, takže samo nerozhodne. Rozhodne až další člen.
- V kritickém případě porovnáme rovnici s Riemannovou–Weberovou rovnicí y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, která osciluje právě pro μ > 1/4: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\right)\ln^2 x=0<\frac{1}{4}$, rovnice není oscilatorická.
- Riccatiho technika: substituce $w=\frac{y'}{y}$ převede rovnici na Riccatiho rovnici $w'+w^2+\frac{1}{4x^2}=0$. Ta má řešení $w=\frac{1}{2x}$ na celém intervalu – odpovídá řešení y bez nulových bodů, rovnice tedy není oscilatorická.
- Prüferova transformace $y=\rho\sin\varphi,\ y'=\rho\cos\varphi$ převede rovnici na rovnici pro úhel φ: $\varphi'=\cos^2\varphi+\frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. V nulovém bodě y je φ násobkem π a φ' > 0, úhel tedy přes násobky π jen roste. Počet nulových bodů na intervalu (a; b⟩ je proto ⌊φ(b)/π⌋. Počítáme numericky metodou Runge–Kutta (RK4) z počátečních hodnot $y(1)=0,\ y'(1)=1,\ \varphi(1)=0$
- Na intervalu $(1;\ 1000\rangle$ nemá řešení žádný nulový bod: $\varphi(1000)\doteq 1{,}5702\doteq 0{,}4998\pi$, úhel nedosáhl π.

- Závěr: rovnice není oscilatorická – každé její netriviální řešení má jen konečně mnoho nulových bodů.

Graf



Řešení na zvoleném intervalu nemá nulový bod; Prüferův úhel φ pod ním nedosáhne π.

Kneserovo kritérium: x²q → 1 > 1/4, nuly rostou geometricky.

Zadání: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

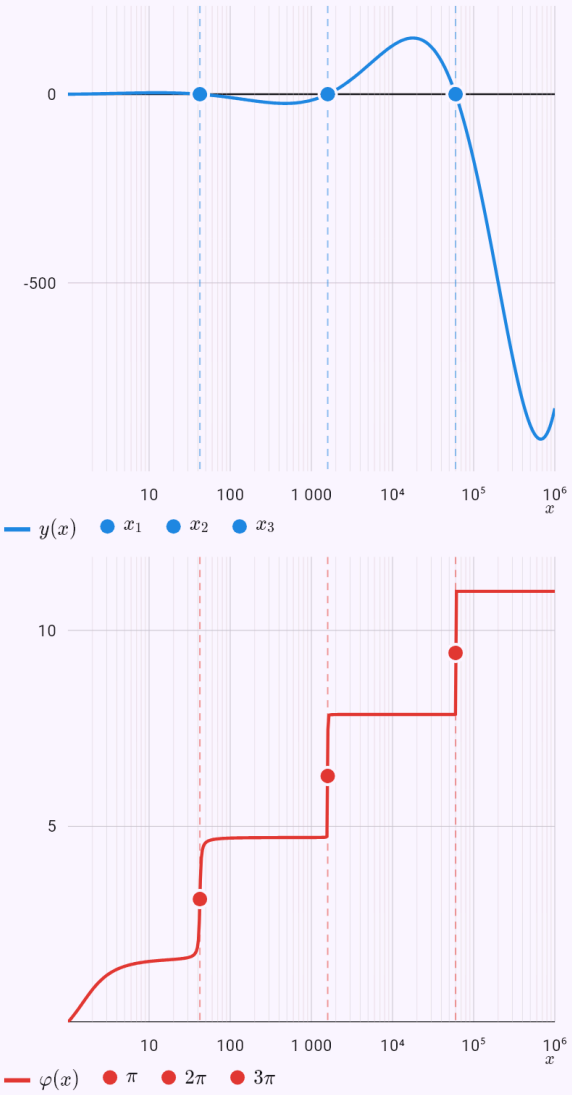
Výsledek

Rovnice je oscilatorická.

Postup

- Zkoumáme rovnici $y'' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ na intervalu $\langle 0;\, \infty)$, tedy y" + q(x)y = 0 s q = $\frac{1}{x^2+1}$
- Rovnice je oscilatorická, když každé její netriviální řešení má na intervalu nekonečně mnoho nulových bodů. Podle Sturmovy separační věty se nulové body dvou nezávislých řešení střídají, takže stačí zkoumat jedno řešení: buď oscilují všechna řešení, nebo žádné.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium: když ∫ 1/r = ∞ a ∫ q = ∞, je rovnice oscilatorická. Zde $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, ale $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, takže kritérium nerozhodne.
- Kneserovo kritérium s kritickou konstantou $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, rovnice je oscilatorická.
- Riccatiho technika: substituce $w = \frac{y'}{y}$ převede rovnici na Riccatiho rovnici $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$. Rovnice není oscilatorická, právě když má Riccatiho rovnice řešení na celém intervalu ⟨T; ∞) pro nějaké T. U oscilatorické rovnice takové řešení není: w v každém nulovém bodě y „uteče“ do −∞.
- Prüferova transformace $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ převede rovnici na rovnici pro úhel φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. V nulovém bodě y je φ násobkem π a φ' > 0, úhel tedy přes násobky π jen roste. Počet nulových bodů na intervalu (a; b⟩ je proto ⌊φ(b)/π⌋. Počítáme numericky metodou Runge–Kutta (RK4) z počátečních hodnot $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Na intervalu $(1;\ 1\,000\,000\rangle$ má řešení tolik nulových bodů: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Sousední nulové body jsou od sebe vzdáleny $1548{,}7974$ až $58269{,}3046$. Nulové body: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Závěr: rovnice je oscilatorická – každé její netriviální řešení má nekonečně mnoho nulových bodů.

Graf



Řešení s vyznačenými nulovými body; pod ním Prüferův úhel φ, který v nulových bodech prochází násobky π.

Pololineární Eulerova rovnice, k = 1 > (2/3)³.

Zadání: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Výsledek

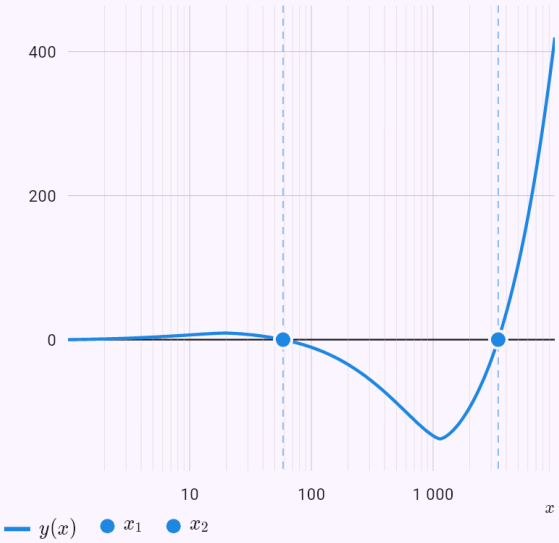
Rovnice je oscilatorická.

Postup

- Zkoumáme pololineární rovnici $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ s p = 3 na intervalu $\langle 1;\ \infty)$, kde $\Phi(s) = |s|^1 s$. Násobek řešení je opět řešení, součet dvou řešení ale obecně ne. Pro p = 2 dostaneme lineární rovnici y" + q(x)y = 0.
- Rovnice je oscilatorická, když každé její netriviální řešení má na intervalu nekonečně mnoho nulových bodů. Sturmova separační věta platí i pro pololineární rovnice: buď oscilují všechna řešení, nebo žádné.
- Jde o pololineární Eulerovu rovnici s k = 1. Po dosazení y = x^λ s 0 < λ < 1 dostaneme k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ pro p = 3. Funkce G má největší hodnotu, kritickou konstantu $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, v bodě λ = (p − 1)/p. Zde je k větší, řešení tvaru x^λ neexistuje a rovnice je oscilatorická.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium (když ∫ q = ∞, je rovnice oscilatorická) zde nerozhodne: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- Kneserovo kritérium pro pololineární rovnice s kritickou konstantou $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ je větší, rovnice je oscilatorická.
- Riccatiho technika pro pololineární rovnici: substituce $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ vede na Riccatiho rovnici $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. Rovnice není oscilatorická, právě když má tato rovnice řešení na celém intervalu ⟨T; ∞).

- Numericky (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) má řešení na intervalu $(1;\ 10\,000\rangle$ tolik nulových bodů: 2, od sebe vzdálených $3369{,}2413$. Nulové body: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Závěr: rovnice je oscilatorická – každé její netriviální řešení má nekonečně mnoho nulových bodů.

Graf



Řešení s vyznačenými nulovými body.

Diskrétní Kneserovo kritérium: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Zadání: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

Výsledek

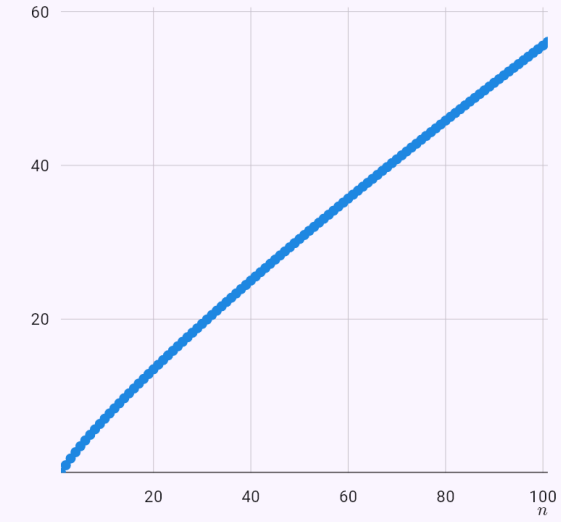
Rovnice není oscilatorická.

Postup

- Zkoumáme diskrétní obdobu rovnice (r y')' + q y = 0, lineární rekurenci $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ pro $n \geq 1$, kde $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Jako rekurence: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- U posloupnosti počítáme zobecněné nulové body: $y_n = 0$, nebo změnu znaménka mezi y_n a y_{n+1}. Rovnice je oscilatorická, když má každé netriviální řešení nekonečně mnoho zobecněných nulových bodů. I zde platí Sturmova separační věta.
- Diskrétní Leightonovo–Wintnerovo kritérium: když $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ a $\Sigma\, q_n = \infty$, je rovnice oscilatorická. Zde $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, takže kritérium nerozhodne.
- Diskrétní Kneserovo kritérium s kritickou konstantou $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, rovnice není oscilatorická.
- Diskrétní Riccatiho technika: substituce $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ vede na rovnici $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. Rovnice není oscilatorická, právě když má tato rovnice od jistého n řešení s $w_n + r_n > 0$.
- Řešení s $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ nemá pro n v intervalu $(1;\, 101\rangle$ žádný zobecněný nulový bod.

- Závěr: rovnice není oscilatorická – každé její netriviální řešení má jen konečně mnoho nulových bodů.

Graf



Řešení na zvoleném intervalu nemá nulový bod.

Příklad 4.2 Došlé a Mariniho – případ C5: regulárně rostoucí a silně klesající řešení.

Zadání: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Výsledek

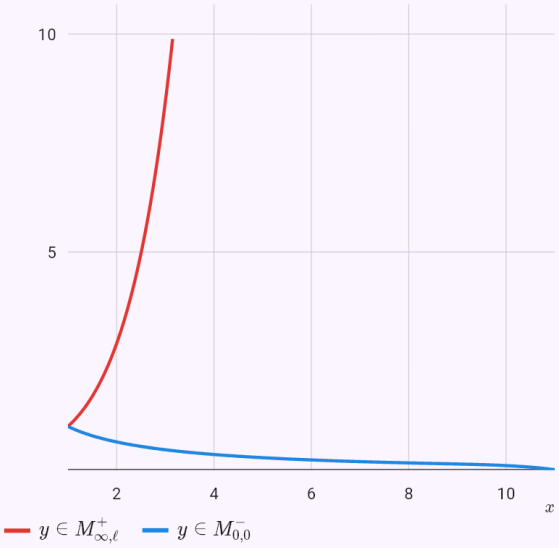
$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

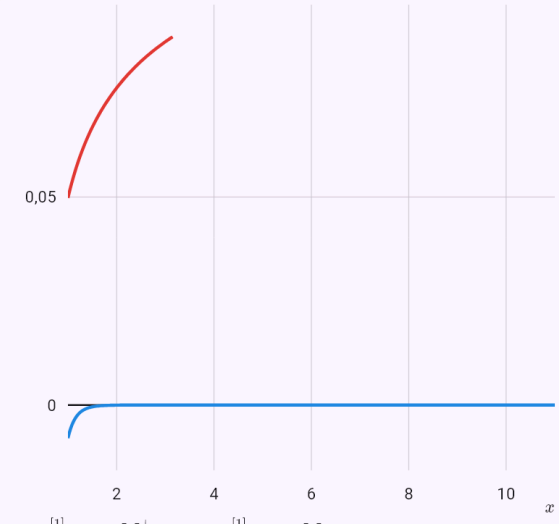
Postup

- Zkoumáme pololineární rovnici $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ na intervalu $\langle 1;\,\infty)$ s α = 3, a = e^{-3x} > 0 a b = $\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. Jde o rovnici s p-Laplaciánem pro p = α + 1 se „záporným potenciálem“ – neosciluje. Obecný tvar rovnice je $(a(x)|y'|^{\alpha}\operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^{\alpha}\operatorname{sgn} y$
- Chování řešení popisuje spolu s y i kvaziderivace $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3\operatorname{sgn} y'$. Každé netriviální řešení patří do jedné ze dvou tříd: M^+ – od jistého x je y·y' > 0 a |y| roste – nebo M^- – y·y' < 0 na celém intervalu a |y| klesá. Třídy se dělí podle limit |y| a $|y^{[1]}|$ pro x → ∞: index ∞ (nekonečná), ℓ (konečná nenulová) a 0 (nulová), například $M^+_{\infty,\ell}$
- Podle Věty 2.1 (Došlá–Marini) je každé řešení definované na celém intervalu a obě třídy M^+ i M^- jsou neprázdné. Do M^+ patří například řešení s $y(x_0) > 0$ a $y'(x_0) \geq 0$.
- Integrál A: integrand se pro x → ∞ chová jako e^x (až na kladnou konstantu). Rozhoduje exponenciála, proto $\int_1^{\infty} e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál B $\int_1^{\infty} \dfrac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- Integrál J_1: integrand se pro x → ∞ chová jako e^x (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Rozhoduje exponenciála, proto $\int_1^{\infty} e^x\left(\int_1^x \dfrac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál J_2: integrand se pro x → ∞ chová jako $x^{-\frac{2}{3}}$ (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^{\mu}\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\int_1^{\infty} e^x\left(\int_x^{\infty} \dfrac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál Y_1 diverguje, protože diverguje už vnitřní integrál $\int_1^{\infty} \dfrac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_x^{\infty} e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál Y_2: integrand se pro x → ∞ chová jako x^{-2} (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^{\mu}\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\int_1^{\infty} \dfrac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_1^{x} e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x < \infty$
- Lemma 2.1 (zobecnění Fubiniovy věty): pro α = 3 ≥ 1 plyne z $Y_2 = \infty$, že $J_2 = \infty$, a z $Y_1 = \infty$, že $J_1 = \infty$.
- Integrály vyšly $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ – to je případ C_5 klasifikace (Věta 3.1).
- Reciproční rovnice $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a a b si vymění role a α přejde v 1/α) má za řešení kvaziderivace řešení zadané rovnice. Integrály J_1, J_2 se v ní čtou jako Y_2, Y_1, takže nastává případ C_8. Třídy si odpovídají s prohozenými indexy: $M^+_{\infty,\ell}$ zadané rovnice odpovídá $M^+_{\ell,\infty}$ reciproční.

- $M^{+}_{\infty,\ell} \neq \emptyset$: regulárně rostoucí řešení – $|y| \to \infty$, ale kvaziderivace má konečnou nenulovou limitu, y roste jako $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (Věta 3.1).
- $M^{-}_{0,0} \neq \emptyset$: silně klesající řešení – $y \to 0$ i $y^{[1]} \to 0$ (Věta 3.1).
- Řešení z M^{-} v grafu je nalezené numericky střelbou: hledáme počáteční hodnotu kvaziderivace, pro kterou řešení s $y(1) = 1$ na dlouhém intervalu neklesne na nulu, ani nezačne růst – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Taková hodnota je jediná, protože $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (Věta 4).

Graf





Nahoře numerická řešení y(x) z neprázdných tříd (M^{+} z $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} střelbou), dole jejich kvaziderivace y^[1](x). Křivka končí, kde |y| přeroste 10.

Případ C4 – omezená rostoucí řešení a celý interval klesajících.

Zadání: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Výsledek

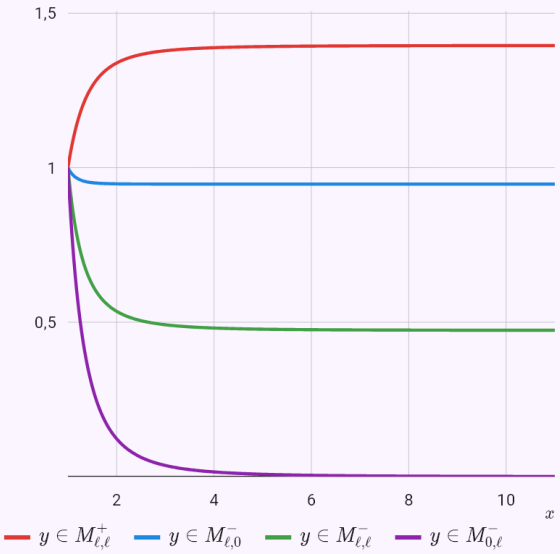
$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

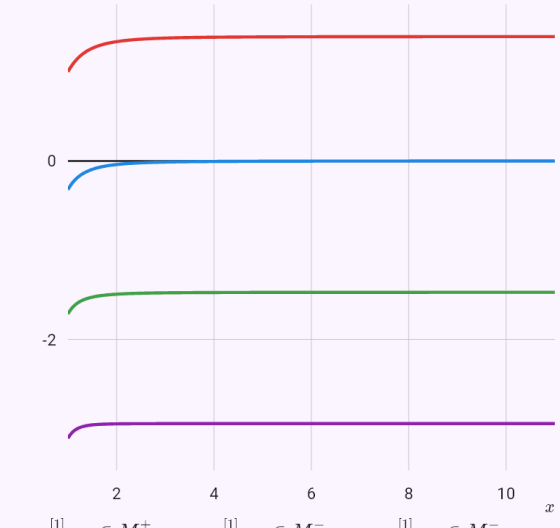
Oscilace rovnice

Postup

- Zkoumáme lineární rovnici $\left(x^4 y'\right)' = \dfrac{1}{x^4} y$ na intervalu $\langle 1;\ \infty)$, tedy (a(x)y')' = b(x)y s a = x^4 > 0 a b = $\dfrac{1}{x^4}$ > 0. V zápisu (a y')' + q y = 0 je q = −b záporné, takže rovnice není oscilatorická – každé řešení má nejvýše jeden nulový bod.
- Chování řešení popisuje spolu s y i kvaziderivace $y^{[1]} = x^4 y'$. Každé netriviální řešení patří do jedné ze dvou tříd: M^+ – od jistého x je y·y' > 0 a |y| roste – nebo M^- – y·y' < 0 na celém intervalu a |y| klesá. Třídy se dělí podle limit |y| a $|y^{[1]}|$ pro x → ∞: index ∞ (nekonečná), ℓ (konečná nenulová) a 0 (nulová), například $M^+_{\infty,\ell}$
- Podle Věty 2.1 (Došlá–Marini) je každé řešení definované na celém intervalu a obě třídy M^+ i M^- jsou neprázdné. Do M^+ patří například řešení s y(x₀) > 0 a y'(x₀) ≥ 0.
- Integrál A: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Integrál B: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Integrál J_1: integrand se pro x → ∞ chová jako x^{-4} (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^\mu\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$
- Integrál J_2: integrand se pro x → ∞ chová jako x^{-7} (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^\mu\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$
- Integrály vyšly $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – to je případ C_4 klasifikace (Věta 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: rostoucí řešení s konečnou limitou y i kvaziderivace (Věta 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: klesající řešení, kde y i kvaziderivace mají nenulové limity (Věta 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: řešení klesající k nenulové limitě, kvaziderivace → 0 (Věta 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: regulárně klesající řešení – y → 0, ale kvaziderivace má nenulovou limitu, y klesá jako $\displaystyle\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (Věta 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$ – žádné řešení tohoto typu (Věta 3.1).
- Řešení z M^- v grafu jsou nalezená numericky střelbou: s $y(1) = 1$ zůstanou kladná a klesající pro celý interval počátečních hodnot kvaziderivace $y^{[1]}(1) \in \langle -3{,}1103;\ -0{,}3215\rangle$, protože $\displaystyle\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (Věta 4). Krajní body a střed intervalu dávají řešení různých tříd.

Graf





Nahoře numerická řešení y(x) z neprázdných tříd (M⁺ z y(x₀) = 1, y'(x₀) = 1, M⁻ střelbou), dole jejich kvaziderivace y^[1](x). Křivka končí, kde |y| přeroste 10.

Superlineární rovnice – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (řešení $\sqrt{2}/(x+\sqrt{2})$).

Zadání: `asymptotics(y'' = y^3)`

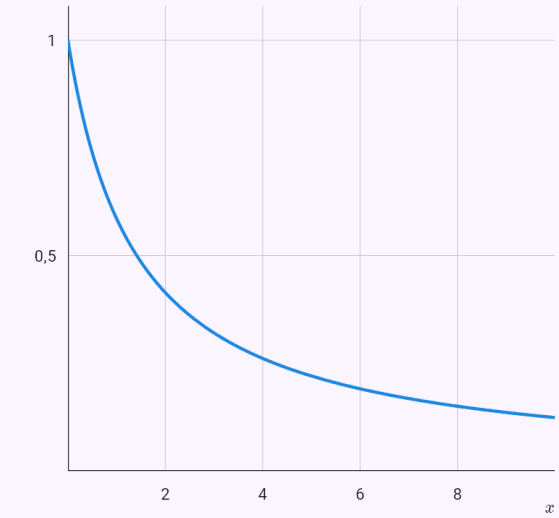
Výsledek

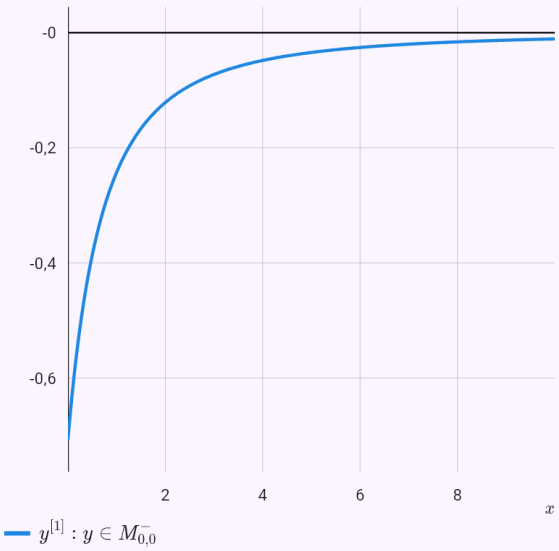
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

Postup

- Zkoumáme rovnici Emdenova–Fowlerova typu $y'' = |y|^2 y$ na intervalu $\langle 0; \infty)$ s α = 1, β = 3, a = 1 > 0 a b = 1 > 0. Protože β > α, je rovnice superlineární. Obecný tvar rovnice je $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- Chování řešení popisuje spolu s y i kvaziderivace $y^{[1]} = y'$. Každé netriviální řešení definované až do nekonečna patří do jedné ze dvou tříd: M^+ – od jistého x je y·y' > 0 a |y| roste – nebo M^- – y·y' < 0 a |y| klesá. Třídy se dělí podle limit |y| a $|y^{[1]}|$ pro x → ∞: index ∞ (nekonečná), ℓ (konečná nenulová) a 0 (nulová).
- Podle Věty 1 (Cecchi–Došlá–Marini) je pro β > α třída M^- neprázdná. Některá řešení ale „vybuchnou“: |y| → ∞ už v konečném bodě, takže nejsou definovaná až do nekonečna. Třída M^+ může být prázdná.
- Integrál A: integrand se pro x → ∞ chová jako 1 (až na kladnou konstantu). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^\mu\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál B: integrand se pro x → ∞ chová jako 1 (až na kladnou konstantu). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^\mu\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál J_1: integrand se pro x → ∞ chová jako x (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^\mu\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- Integrál $Y_2^{(\beta)}$: integrand se pro x → ∞ chová jako x^3 (až na kladnou konstantu, vnitřní integrál nahrazen svým asymptotickým chováním). Podle srovnávacího kritéria s $\int x^\mu\,dx$, který konverguje právě pro μ < −1, je $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- Integrál $Y_1^{(\beta)}$ diverguje, protože diverguje už vnitřní integrál: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- M^+ = ∅ – žádné řešení tohoto typu (Kiguradze, citováno v Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell}$ = ∅ – žádné řešení tohoto typu (Lemma 1).
- $M^-_{\ell,0}$ = ∅ – žádné řešení tohoto typu (Lemma 2).
- $M^-_{0,\ell}$ = ∅ – žádné řešení tohoto typu (Lemma 1).
- $M^-_{0,0} \neq \emptyset$: silně klesající řešení – y → 0 i $y^{[1]} \to 0$ (Věta 1).
- Řešení z M^- v grafu je nalezené numericky střelbou: hledáme počáteční hodnotu kvaziderivace, pro kterou řešení s $y(0) = 1$ na dlouhém intervalu neklesne na nulu, ani nezačne růst – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Taková hodnota je jediná, protože $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (Věta 4).

Graf





Nahoře numerická řešení y(x) z neprázdných tříd (M⁺ z y(x₀) = 1, y'(x₀) = 1, M⁻ střelbou), dole jejich kvaziderivace y^[1](x). Křivka končí, kde |y| přeroste 10.

Známá omezení

- Rovnici, kterou je třeba upravit nápovědou ze zadání (jiná než z = ln y), zatím nevyřeší.
- U rovnice s parametrem (k, λ, ω) aplikace nekreslí graf a parametry bere jako kladné.
- Kde řešení nejde vyjádřit explicitně, zůstane v implicitním tvaru.
- Laplaceova transformace zatím nezná Heavisideovu funkci, posunutí a periodické pravé strany.
- Když integrály variace konstant nejdou vyjádřit elementárními funkcemi ($y'' + y' + y = \operatorname{tg} x$), řešení je obsahuje v integrálním tvaru; graf se pak nekreslí a počáteční podmínky se nedosazují.
- Soustavy jen dvou lineárních rovnic s konstantními koeficienty bez pravé strany; nelineární soustavy jen v aplikacích (modely).
- Riccatiho rovnici bez zadaného partikulárního řešení vyřeší, jen když ho uhodne v jednoduchém tvaru – jinak řekne, že je potřeba.
- Lagrangeovu rovnici jen bez počáteční podmínky; u Clairautovy rovnice podmínka vybere přímky (a obálku) bodem.
- Oscilaci posuzuje jen u rovnic s číselnými koeficienty (k musí být číslo); pololineární rovnici jen s r = 1. Nulové body počítá numericky na konečném intervalu – o nekonečnu rozhodují jen kritéria.
- Asymptotiku rovnice Emdenova–Fowlerova typu ($\beta \neq \alpha$) rozhodne jen tam, kde to říkají citované věty – ostatní třídy označí jako nerozhodnuté. Koeficienty a, b musí být kladné; jejich chování v nekonečnu rozpozná u součinů mocnin, logaritmů a exponenciál, jinak jen přesné integrály Symjou.

37. Variační počet

Aplikace hledá extremálu funkcionálu J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx s okrajovými podmínkami y(a), y(b): sestaví Eulerovu–Lagrangeovu rovnici ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (s parciálními derivacemi v postupu), u integrandu bez y ukáže první integrál a vzniklou diferenciální rovnici vyřeší řešičem ODR s okrajovými podmínkami a zkouškou. Úlohu najdete i jako formulář v oborech Analýza a Fyzika (Aplikace).

Když rovnice nemá řešení v uzavřeném tvaru a F nezávisí na x, použije Beltramiho identitu a rozpozná známé extremály: brachistochronu (cykloida, s porovnáním s přímkou a dobou skluzu), řetězovku a minimální rotační plochu (dvě, jedna, nebo žádná řetězovka – Goldschmidtovo řešení), izoperimetrickou úlohu s Lagrangeovým multiplikátorem (kruhový oblouk o dané délce, visící řetěz). Konstanty dopočítá numericky. Princip nejmenší akce dává z lagranžiánu pohybovou rovnici, u kyvadla s přiblížením sin θ ≈ θ. Interaktivní ukázku – závod kuliček po brachistochroně – najdete na mathtrace.app ve „Vyzkoušej si“.

Jak zadat

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	Integrand a okrajové podmínky, středníkem oddělené.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	Vazba ∫ G dx = L jako poslední položka.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Lagranžián L = T − V a slovo action – pohybová rovnice.

Ukázky

Nejkratší spojnice dvou bodů je úsečka.

Zadání: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Výsledek

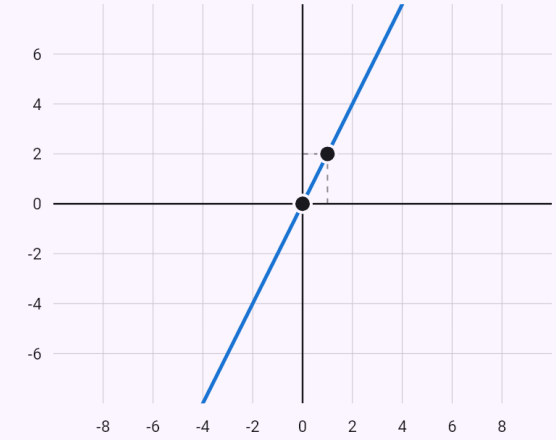
$$y = 2x$$

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, okrajové podmínky $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-y'' = 0$
- Integrand nezávisí na y − Eulerova–Lagrangeova rovnice má první integrál: $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Diferenciální rovnici vyřešíme:
- Na pravé straně je jen funkce nezávislé proměnné – rovnici postupně zintegrujeme: $y'' = 0$
- Integrujeme obě strany: $y' = \int 0 \, dx = C_1$
- Integrujeme obě strany: $y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 2, \; C_2 = 0$ $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$
- Řešení splňující zadané podmínky: $y = 2x$

Graf

Řešení | Fázová rovina



$y = 2x$

Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

Vlastní hodnoty konstant

C1 | C2 | + Přidat křivku

Ťukněte do grafu a posuvníkem nastavte směrnici – dokreslí se řešení, které prochází tím bodem s danou směrnicí tečny.

Eulerova–Lagrangeova rovnice y″ = y s okrajovými podmínkami.

Zadání: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Výsledek

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, okrajové podmínky $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Diferenciální rovnici vyřešíme:
- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' - y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru y = e^(λx); po dosazení a vydělení e^(λx) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^{x}$
- Obecné řešení: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- Řešení splňující zadané podmínky: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- Řešení splňující zadané podmínky: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

Brachistochrona – cykloida z A [0; 0] do B [2; 1], skluz 0,806 s proti 1,010 s po přímce.

Zadání: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

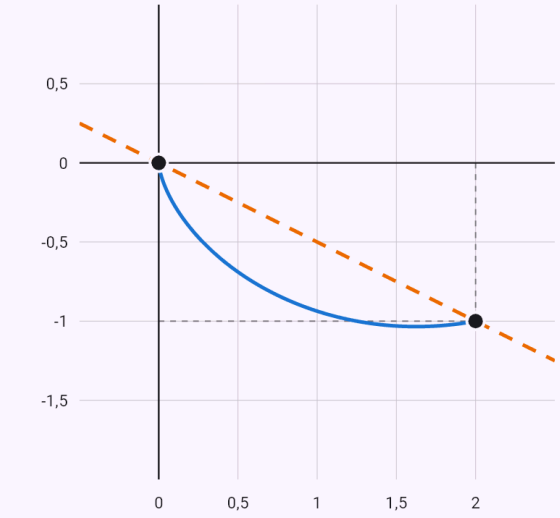
Výsledek

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx$, okrajové podmínky $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762\,y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762\,yy'' - 0{,}112881\,y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- Integrand nezávisí na x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity vyjde y·(1 + y'²) = konst. Řešením je cykloida – křivka, kterou opisuje bod na kotálející se kružnici (osa y míří dolů, start v klidu v A): $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Konstanty z koncového bodu B (θ_B numericky půlením intervalu) $\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$
- Hodnota funkcionálu: $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; po přímce $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Pro J = ∫ ds/v s v = √(2gy) je J doba skluzu: $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056$ s
- θ_B > π – nejrychlejší dráha klesne pod úroveň B a k bodu B pak vystoupá.

Graf



$x(\theta),\ y(\theta)$
$y = 0{,}5x$

Osa y míří dolů – dráha vede pod bodem A. Plně cykloida (nejrychlejší skluz), čárkovaně přímka pro srovnání.

Minimální rotační plocha mezi dvěma kruhy – dvě řetězovky, minimum dává mělčí.

Zadání: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

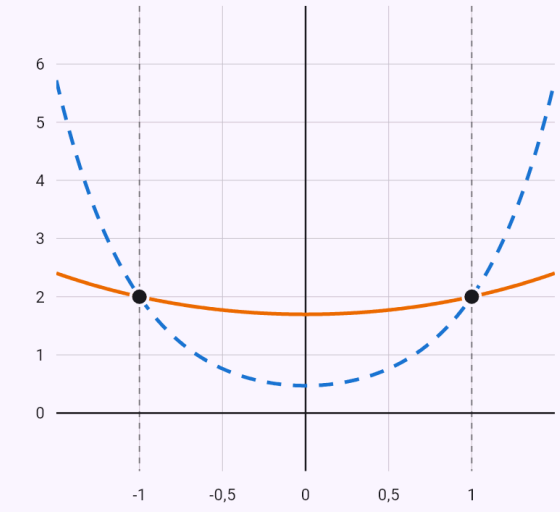
Výsledek

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min} \approx 3{,}814$$

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, okrajové podmínky $y(-1) = 2,\quad y(1) = 2$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1},\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- Integrand nezávisí na x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity vyjde řetězovka (hyperbolický kosinus): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Okrajovým podmínkám vyhovují dvě řetězovky (numericky). Minimum dává ta s menší hodnotou J – mělčí; hlubší je jen stacionární. $C \approx 0{,}4702,\ x_0 \approx 0,\ J \approx 4{,}358;\quad C \approx 1{,}697,\ x_0 \approx 0,$

Graf



$C \approx 0{,}4702$
$C \approx 1{,}697,\ J_{min}$

Extremála mezi zadanými body; čárkovaně druhé řešení nebo křivka pro srovnání.

Kruhy daleko od sebe – žádná řetězovka (Goldschmidtovo řešení).

Zadání: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Výsledek

Nemá žádné řešení.

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2 + 1} \right) dx$, okrajové podmínky $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2 + 1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2 + 1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- Integrand nezávisí na x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity vyjde řetězovka (hyperbolický kosinus): $y = C \cosh \frac{x - x_0}{C}$
- Žádná řetězovka oběma body neprochází – kruhy jsou na svou vzdálenost příliš malé. Minimální plochu pak tvoří jen dva kruhy a spojnice os (Goldschmidtovo řešení), hladká extremála neexistuje.

Největší plocha pod křivkou délky π – půlkružnice.

Zadání: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

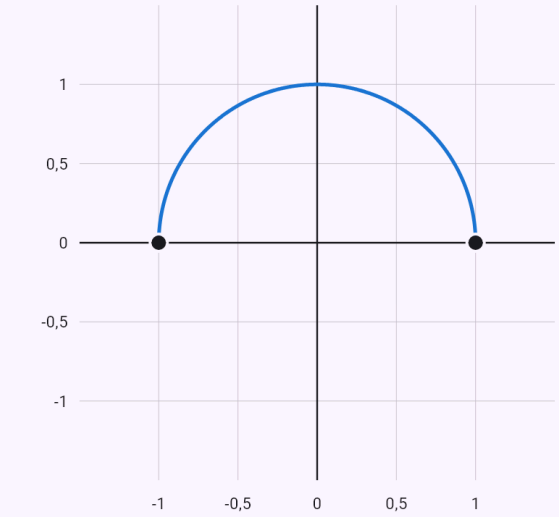
Výsledek

$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, okrajové podmínky $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Izoperimetrická úloha s vazbou $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: vazbu připojíme Lagrangeovým multiplikátorem λ a hledáme extrém funkcionálu s integrandem $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- Integrand nezávisí na x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity pro F + λG vyjde kružnice – oblouk o poloměru |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Konstanty z délky oblouku a tětivy, středový úhel 2α (numericky) $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$

Graf



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

Extremála mezi zadanými body; čárkovaně druhé řešení nebo křivka pro srovnání.

Visící řetěz délky 3 – řetězovka s Lagrangeovým multiplikátorem.

Zadání: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Výsledek

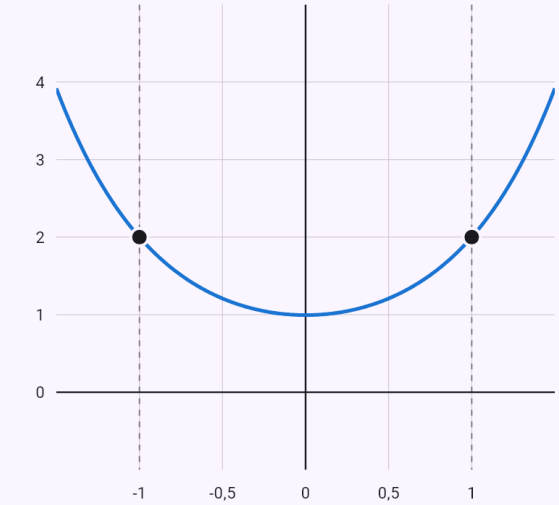
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$$

Postup

- Hledáme funkci, pro kterou má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2 + 1} \right) dx$, okrajové podmínky $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Izoperimetrická úloha s vazbou $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1} \right) dx = 3$: vazbu připojíme Lagrangeovým multiplikátorem λ a hledáme extrém funkcionálu s integrandem $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2 + 1} + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2 + 1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y + \lambda)}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- Integrand nezávisí na x − platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y + \lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity pro F + λG vyjde řetězovka posunutá o λ: $y = c + C \cosh \frac{x - x_0}{C}$
- Konstanty z délky řetězu a okrajových podmínek (numericky)

$$2C \sinh \frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Graf



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$

Extremála mezi zadanými body; čárkovaně druhé řešení nebo křivka pro srovnání.

Princip nejmenší akce – pružina, pohybová rovnice m x″ + k x = 0.

Zadání: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Výsledek

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Postup

- Princip nejmenší akce: pohyb probíhá tak, aby akce byla stacionární: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice lagranžiánu je pohybová rovnice: $-kx - mx'' = 0$
- Diferenciální rovnici vyřešíme:
- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru x = e^(λt); po dosazení a vydělení e^(λt) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- Obecné řešení $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Kyvadlo – pro malé výchylky sin θ ≈ θ.

Zadání: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Výsledek

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Postup

- Princip nejmenší akce: pohyb probíhá tak, aby akce byla stacionární: $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Parciální derivace integrandu podle y a y' a úplná derivace podle x (y i y' závisí na x) $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- Eulerova–Lagrangeova rovnice lagranžiánu je pohybová rovnice: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- Integrand nezávisí na x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- Rovnice se sin θ nemá elementární řešení. Pro malé výchylky sin θ ≈ θ dostaneme rovnici harmonických kmitů: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Diferenciální rovnici vyřešíme:
- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru \theta = e^(λt); po dosazení a vydělení e^(λt) dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Každý kořen λ dává řešení e^(λx), k-násobný ještě x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojice α ± βi řešení e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentální systém $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- Obecné řešení $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Známá omezení

- Jedna neznámá funkce a nejvýš první derivace v integrandu; funkcionály s více funkcemi nebo s y″ zatím ne.
- Známé extremály (cykloida, řetězovka, kruhový oblouk) rozpozná podle tvaru integrandu; jiné nelineární rovnice zůstanou ve tvaru Eulerovy–Lagrangeovy rovnice.
- Brachistochrona startuje v klidu – počáteční bod musí mít y(a) = 0 a osa y míří dolů.

38. Parciální diferenciální rovnice

Rovnici zapište přímo s indexy u_t, u_xx, u_xy (z fotky aplikace přečte i ∂u/∂t a ∂²u/∂x²), Laplaceův operátor jako Δu; podmínky a oblast oddělte středníkem. Bez podmínek aplikace určí typ lineární rovnice 2. řádu (eliptická, parabolická, hyperbolická – při proměnných koeficientech podle oblasti), rovnici charakteristik, kanonický tvar a u rovnic bez nižších členů obecné řešení. Rovnice 1. řádu a·u_x + b·u_y + c·u = f řeší metodou charakteristik se zkouškou.

S okrajovými a počátečními podmínkami řeší separací proměnných rovnici vedení tepla u_t = k·u_xx a vlnovou rovnici u_tt = c²·u_xx na intervalu (konce s danou teplotou i izolované, nenulové hodnoty přes ustálený stav) a Laplaceovu rovnici na obdélníku a v kruhu (i vně). Koeficienty Fourierovy řady spočte obecně pro n, a když je počáteční funkce součtem vlastních funkcí, vyjde konečný součet. Na celé přímce použije d'Alembertův vzorec a Fourierovu transformaci (tepelné jádro), na polopřímce x > 0 Laplaceovu transformaci v čase. Zvládne i zdroj f(x, t) (Duhamelův princip), tepelný tok na konci, okrajové hodnoty proměnné v čase a u Laplaceovy rovnice derivaci na stranách. Z nelineárních rovnic řeší Burgersovu – charakteristikami do vzniku rázové vlny, s viskozitou Coleovou–Hopfovou transformací; vlnovou rovnici na přímce ukáže i Fourierovou transformací. Poissonovu rovnici Δu = f na obdélníku řeší dvojnou Fourierovou řadou (zdroj jako součet součinů p(x)·q(y)), se všemi čtyřmi stranami s derivací ověří podmínku řešitelnosti a vrátí řešení až na konstantu. Rovnice s proměnnými koeficienty αx²u_xx + βxu_x převede na Sturmovu–Liouvilleovu úlohu s váhou.

Numericky metodou sítí se schématem v hlavičce jako u ostatních numerických metod: rovnici vedení tepla explicitně (ftcs), implicitně (btcs), Crankovým–Nicolsonovým schématem (cranknicolson) a θ-metodou (theta) – implicitní soustavy Thomasovým algoritmem, s von Neumannovou analýzou stability; transportní rovnici schémata upwind, laxwendroff a leapfrog s podmínkou CFL, vlnovou rovnici leapfrog; Laplaceovu (Poissonovu) rovnici pětibodovým schématem a iteracemi jacobi, gaussseidel a sor se srovnáním počtu iterací. Pojmenované hodnoty: h krok v prostoru, k krok v čase, to konečný čas, theta, omega, tol, max. Rovnice vedení tepla je i formulář v oboru Numerické metody. Vedení tepla ve 2D na obdélníku řeší schémata ftcs a adi (metoda střídavých směrů), Laplaceovu rovnici také metodou sdružených gradientů (cg), multigridem (multigrid) a metodou konečných prvků s trojúhelníky (fem); Burgersovu rovnici Godunovovým schématem (upwind). Transportní a Laplaceova rovnice jsou také formuláře v oboru Numerické metody, aplikace (tyč, struna, buben, difuze) ve formulářích fyziky a chemie. Pro zákony zachování přibyla schémata laxfriedrichs a muscl (s limiterem minmod) – pro transportní i Burgersovu rovnici, ta i s viskozitou (srovnání s Coleovou–Hopfovou transformací). Metoda konečných prvků (fem) počítá i na obecném mnohoúhelníku zadaném vrcholy, polygon = (0,0), (2,0), …, s hodnotou na hranici u = …; síť vznikne ořezáváním uší a dělením trojúhelníků. Vedení tepla v desce je formulář ve fyzice.

Výsledkem je graf řešení u(x, t): křivka v čase s posuvníkem a tlačítkem přehrát a otočná 3D plocha; u numerického řešení je přesné řešení čárkovaně. Ustálené řešení u(x, y) Laplaceovy rovnice je 3D plocha.

Jak zadat

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	Rovnice, okrajové a počáteční podmínky; derivace v podmínce jako u_t(x,0) nebo u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	Oblast: x ∈ ℝ, x > 0 nebo 0 < x < π; bez okrajových podmínek se bere celá přímka.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	Laplaceova rovnice v kruhu: Δu, poloměr r a úhel φ (nebo θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numericky: schéma v hlavičce, kroky h a k a konečný čas to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Vedení tepla ve 2D: u(x,y,t), podmínky jako u(x,y,0) = … a u(0,y,t) = …; strany bez podmínky mají hodnotu 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Konečné prvky na mnohoúhelníku: vrcholy za polygon =, hodnota na hranici u = …, nejdelší hrana h.

Ukázky

Hyperbolická rovnice – charakteristiky, kanonický tvar u_ξη = 0 a obecné řešení.

Zadání: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Výsledek

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Koeficienty u druhých derivací ve tvaru a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- Diskriminant: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, rovnice je hyperbolická (jako vlnová rovnice): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- Rovnice charakteristik: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Dvě reálné soustavy charakteristik: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Nové proměnné podél charakteristik: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Po záměně proměnných (řetízkové pravidlo) dostaneme kanonický tvar: $u_{\xi\eta} = 0$
- Rovnice u_ξη = 0 se dvakrát zintegruje – obecné řešení se dvěma libovolnými funkcemi $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

Tricomiho rovnice – typ podle oblasti.

Zadání: `y u_xx + u_yy = 0`

Výsledek

$$D = -y$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Koeficienty u druhých derivací ve tvaru a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- Diskriminant závisí na poloze: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- Typ podle oblasti – hyperbolická pro $y < 0$, parabolická pro $y = 0$, eliptická pro $y > 0$
- Rovnice charakteristik: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

Transportní rovnice metodou charakteristik – vlna se posouvá rychlostí 2.

Zadání: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Výsledek

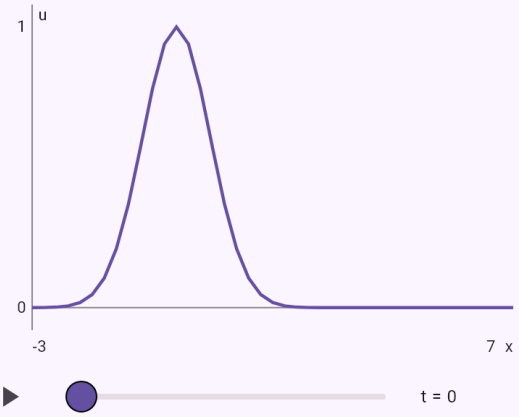
$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t + 2u_x = 0$
- Podmínky: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Metoda charakteristik: podél křivek, které splňují soustavu se rovnice změní na obyčejnou diferenciální rovnici pro u.
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$$
- Charakteristiky jsou křivky, na kterých je $x - 2t = \xi$ konstantní.
- Podél charakteristiky řešíme obyčejnou rovnici, počáteční hodnotu vezmeme z podmínky:
  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$$
- Zkouška: po dosazení do rovnice vyjde levá strana rovna pravé.
- Řešení: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



t = 0

Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Vedení tepla v tyči s chlazenými konci – Fourierova řada.

Zadání: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Výsledek

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}\, e^{-4n^2 t}\, \sin(n$$

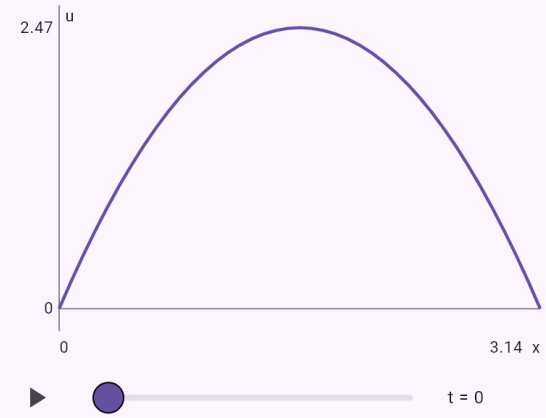
Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = 4u_{xx}$
- Podmínky:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu, po dosazení a vydělení se proměnné oddělí – obě strany se musí rovnat stejné konstantě:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – exponenciální útlum, vyšší frekvence tlumí rychleji: $T_n' = -4n^2\, T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-4n^2 t}\, \sin(nx)$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)
  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x)\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$
- Řešení

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}\, e^{-4n^2 t}\, \sin(nx)$$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Konce s různými teplotami – ustálený stav a odchylka od něj.

Zadání: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Výsledek

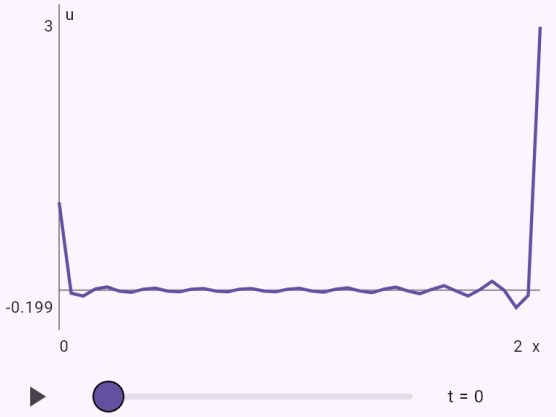
$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = 2u_{xx}$
- Podmínky: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Konce mají předepsané nenulové hodnoty. Nejdřív najdeme ustálený stav $w(x) = x + 1$ (rovnice bez času, w" = 0) a hledáme $u = w(x) + v(x,t)$; odchylka v má na koncích nulové podmínky.
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu, po dosazení a vydělení se proměnné oddělí – obě strany se musí rovnat stejné konstantě:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro
  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – exponenciální útlum, vyšší frekvence tlumí rychleji:
  $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice)
  $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)
  $c_n = \int_0^2 (-x-1)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$
- Řešení
  $u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



t = 0

Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Brnknutá struna – stojaté vlny.

Zadání: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Výsledek

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ s$$

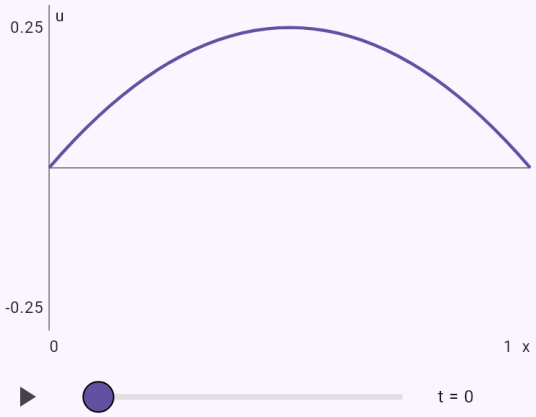
Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Podmínky:
  $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, rovnice je hyperbolická (jako vlnová rovnice):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu – stojaté vlny; obě strany se rovnají stejné konstantě:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – kmity s vlastní frekvencí:
  $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice)
  $$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)
  $$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\, \sin(n\pi x)\, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$
- Řešení

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Laplaceova rovnice na obdélníku s jednou ohřátou stranou.

Zadání: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Výsledek

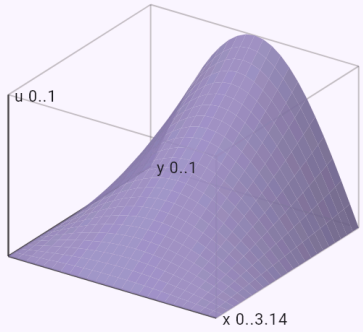
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Podmínky: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, rovnice je eliptická (jako Laplaceova rovnice): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Strana s nenulovou hodnotou (ostatní strany mají u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Druhá rovnice Y" = λY s nulovou hodnotou na protější straně, normovaná tak, aby na dané straně byla 1: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- Počáteční (okrajová) funkce je už součtem vlastních funkcí, proto je nenulových jen několik koeficientů $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x$: $c_1 = 1$, ostatní jsou nulové.

- Řešení: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Laplaceova rovnice v kruhu – konečný součet harmonických.

Zadání: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

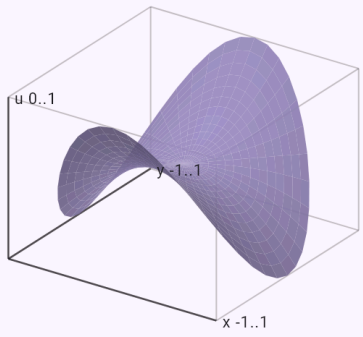
Výsledek

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Podmínky: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, rovnice je eliptická (jako Laplaceova rovnice):
  $\Delta u = 0$
- Separace proměnných v polárních souřadnicích:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi): \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- Úhel se po obejití kruhu vrací, Φ musí být periodická:
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – řešení
  $\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi, \quad n = 0,1,2,\ldots$
- Radiální část je Eulerova rovnice; uvnitř kruhu musí být řešení omezené (r^{-n} a ln r vypadnou):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Fourierovy koeficienty okrajové funkce:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- Počáteční (okrajová) funkce je už součtem vlastních funkcí, proto je nenulových jen několik koeficientů
  $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$: $a_2 = -\frac{1}{2}$, ostatní jsou nulové.
- Všechny koeficienty jsou nulové:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- Řešení: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

d’Alembertův vzorec – počáteční impulz se rozdělí na dvě vlny.

Zadání: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

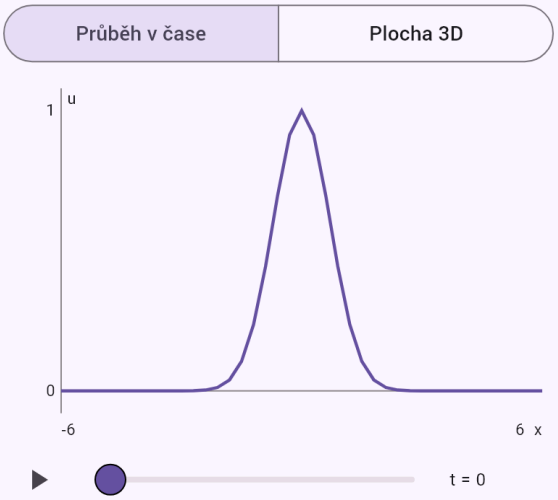
Výsledek

$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{tt} = u_{xx}$
- Podmínky: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, rovnice je hyperbolická (jako vlnová rovnice): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Obecné řešení vlnové rovnice jsou dvě vlny, které se pohybují rychlostí c doleva a doprava: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- Totéž Fourierovou transformací v x: každá frekvence ω kmitá zvlášť. Násobení e^(±icωt) znamená posun o ∓ct, takže zpětná transformace dá – d’Alembertův vzorec.
- Z počátečních podmínek u = f a u_t = g dostaneme d’Alembertův vzorec: $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Zkouška: po dosazení do rovnice vyjde levá strana rovna pravé.
- Řešení: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Graf



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Fourierova transformace na celé přímce – Gaussův profil se rozšiřuje.

Zadání: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Výsledek

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

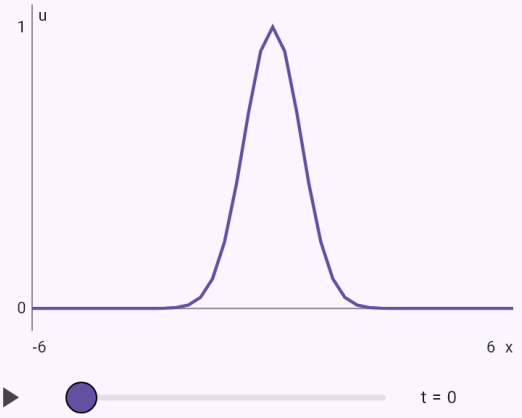
Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = u_{xx}$
- Podmínky: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Na celé přímce použijeme Fourierovu transformaci v x – derivace u_xx se změní na násobení −ω²: $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Pro každé ω zbude obyčejná rovnice v čase $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$
- Zpětná transformace součinu je konvoluce s tepelným jádrem (Gaussovou funkcí, která se s časem rozšiřuje) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$
- Konvoluce dvou Gaussových funkcí je opět Gaussova funkce, jen širší a nižší $\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$
- Zkouška: po dosazení do rovnice vyjde levá strana rovna pravé.

- Řešení: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Laplaceova transformace – ohřev poloprostoru, funkce erfc.

Zadání: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

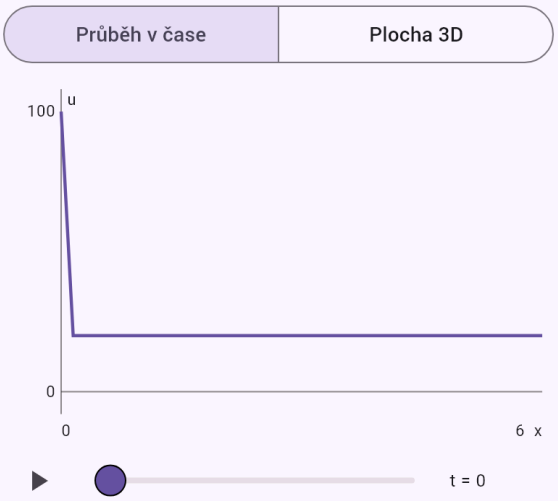
Výsledek

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = 4u_{xx}$
- Podmínky: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Na polopřímce použijeme Laplaceovu transformaci v čase $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – derivace u_t se změní na sU − u(x, 0) a zbude obyčejná rovnice v x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Pro x → ∞ musí U zůstat omezená, rostoucí exponenciála vypadne: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; konstanta z okrajové podmínky: $U(0,s) = \frac{100}{s} \;\Rightarrow\; A(s) = \frac{80}{s}$
- Zpětná transformace podle slovníku $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- Řešení: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Graf



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Explicitní schéma s r = 0,7 > 1/2 – nestabilita podle von Neumanna.

Zadání: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to =`

1)

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Síť: 11 uzlů v x, 143 časových kroků až do t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \frac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r je poměr časového kroku a čtverce prostorového kroku).
- Explicitní schéma (dopředná diference v čase, centrální v prostoru) – každá nová hodnota přímo ze tří starých: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Von Neumannova analýza: chybu rozložíme na vlny e^(iβx), každá se za krok vynásobí zesílením G: $G = 1 - 4r\sin^2\frac{\beta h}{2}$. Stabilita vyžaduje $r = 0{,}7000 > \frac{1}{2}$ – tady neplatí, chyby budou exponenciálně růst.
- První časová vrstva

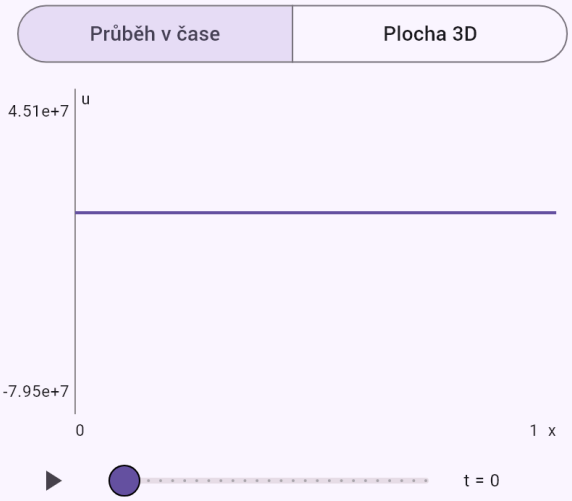
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

- Řešení na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- Ve vrstvě level.50 hodnoty přerostly všechny meze – schéma je nestabilní, výpočet jsme zastavili.
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Graf



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Crankovo–Nicolsonové schéma s Thomasovým algoritmem.

Zadání: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k =`

`0.01; to = 0.1)`

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Síť: 11 uzlů v x, 10 časových kroků až do t = 0,1; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r je poměr časového kroku a čtverce prostorového kroku).
- Crankovo–Nicolsonové schéma – průměr explicitního a implicitního, druhý řád přesnosti i v čase $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- Von Neumannova analýza: chybu rozložíme na vlny e^(iβx), zesílení za krok je $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; vždy $|G| \le 1$, schéma je stabilní pro libovolný krok (bezpodmínečně).
- Pro každou časovou vrstvu je třeba vyřešit třídiagonální soustavu a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (okrajové hodnoty převedeny na pravou stranu). První vrstva

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- Soustavu řešíme Thomasovým algoritmem – dopředný chod a zpětné dosazení $c_i' = \dfrac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \dfrac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$

i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

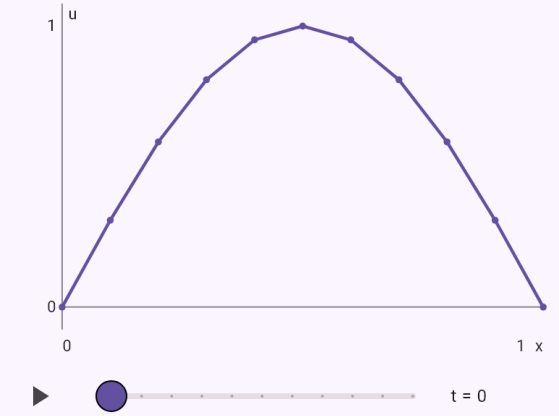
- Řešení na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,'
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,(
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,(
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,(

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_i |u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}| \approx 0{,}00273$ (přesně uprostřed $0{,}372708$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Body: numerické řešení v uzlech sítě; čárkovaně přesné řešení. Posuvníkem se volí časová vrstva.

Laxovo–Wendroffovo schéma pro transportní rovnici, podmínka CFL.

Zadání: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k =`

```
0.016; to = 0.4)
```

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Síť na $0 \le x \le 1$: 51 uzlů, 25 časových kroků až do t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ je Courantovo číslo.
- Přesné řešení je přenášené po charakteristikách $x - t = C$ rychlostí a = 1
- Laxovo–Wendroffovo schéma – Taylorův rozvoj do druhého řádu, u_{tt} nahrazeno $a^2 u_{xx}$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- Podmínka CFL (numerická oblast závislosti obsahuje charakteristiku): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Von Neumannova analýza: chybu rozložíme na vlny e^(iβx), každá se za krok vynásobí zesílením G. Schéma je stabilní, když |G| ≤ 1 pro všechna β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; to platí, protože $|\nu| \le 1$
- První časová vrstva

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

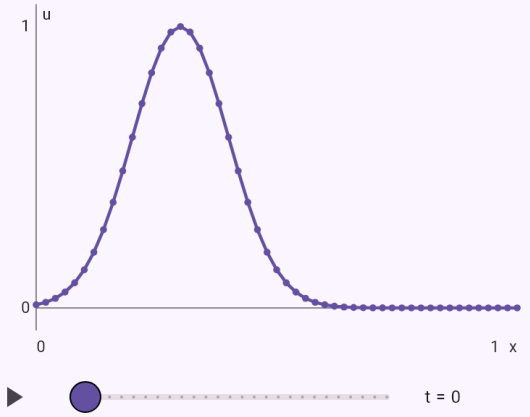
- Řešení na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (přesně uprostřed $0{,}135335$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Body: numerické řešení v uzlech sítě; čárkovaně přesné řešení.
Posuvníkem se volí časová vrstva.

Pětibodové schéma a superrelaxace SOR s optimálním ω – srovnání s Jacobim a Gaussem–Seidelem.

Zadání: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Čtvercová síť: $h = 0{,}1$, celkem 121 uzlů, z toho 81 vnitřních neznámých.
- Pětibodové schéma – u_xx + u_yy nahradíme diferencemi, v každém uzlu vznikne jedna rovnice: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Superrelaxace (SOR) – Gaussův–Seidelův krok „přetáhneme“ faktorem ω: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- Optimální relaxační faktor ze spektrálního poloměru Jacobiho iterace $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Iterace od nulového odhadu uvnitř (vybrané uzly a největší změna)

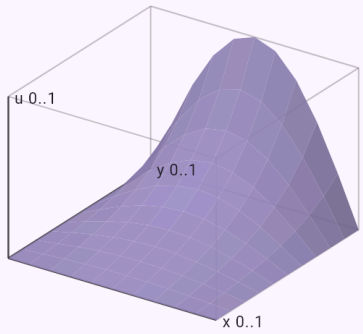
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- Iterace se zastavila po 20 krocích, kdy největší změna klesla pod 10^{-4}
- Srovnání metod na stejné síti a se stejnou tolerancí: Jacobi 102 iterací, Gauss–Seidel 61, SOR s ω = $1{,}528$ jen 20
- Rychlejší metody pro stejnou soustavu (81 neznámých): sdružené gradienty 10 iterací, multigrid 5 V-cyklů. Počet V-cyklů multigridu na jemnosti sítě skoro nezávisí.
- Hodnoty v uzlech sítě

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}0028$ (přesně uprostřed $0{,}199268$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Zdroj tepla, který s časem slábne – Duhamelův princip.

Zadání: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Výsledek

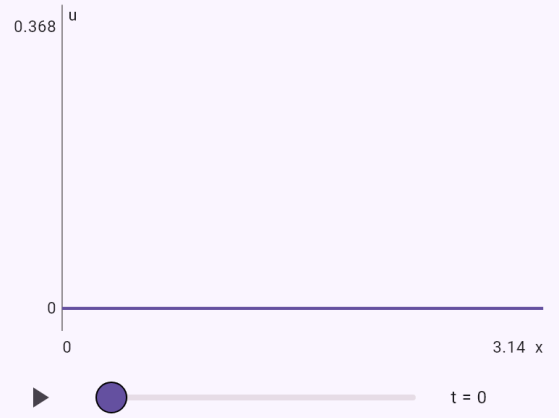
$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Podmínky: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu, po dosazení a vydělení se proměnné oddělí – obě strany se musí rovnat stejné konstantě: $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – exponenciální útlum, vyšší frekvence tlumí rychleji: $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Všechny koeficienty jsou nulové: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Zdroj $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ rozložíme do vlastních funkcí stejně jako počáteční podmínku: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, koeficienty spočteme integrálem.
- Počáteční (okrajová) funkce je už součtem vlastních funkcí, proto je nenulových jen několik koeficientů $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$: $f_1 = 1$, ostatní jsou nulové.
- Duhamelův princip: každý koeficient řady splňuje obyčejnou lineární rovnici se zdrojem; řešení je volný útlum plus konvoluce zdroje s útlumem $T_n' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \displaystyle\int_0^t e^{-n^2(t-s)}$
- Zdroj má jen konečně mnoho nenulových koeficientů, jejich příspěvky vyjdou přesně: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- Řešení: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Stálý zdroj tepla v tyči – ustálený stav je parabola.

Zadání: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Výsledek

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = u_{xx} + 1$
- Podmínky: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Zdroj ani okrajové hodnoty nezávisí na čase. Nejdřív najdeme ustálený stav – řešení rovnice bez časové derivace $w'' + 1 = 0$ s okrajovými podmínkami: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Hledáme $u = w(x) + v(x,t)$; odchylka v má nulové okrajové podmínky a žádný zdroj.
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu, po dosazení a vydělení se proměnné oddělí – obě strany se musí rovnat stejné konstantě: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – exponenciální útlum, vyšší frekvence tlumí rychleji: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi x)$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)

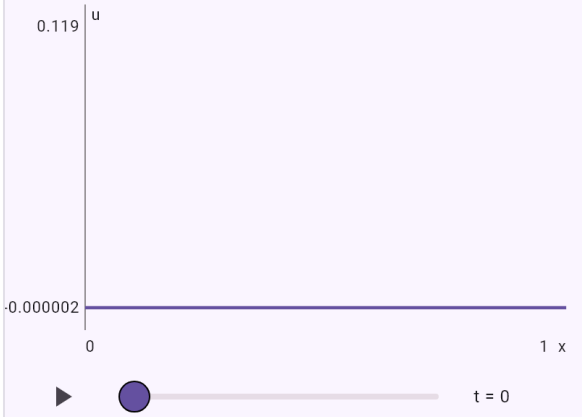
$$c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$$

- Řešení

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi$$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Izolovaná tyč, do které teče teplo jedním koncem – střední teplota roste lineárně.

Zadání: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Výsledek

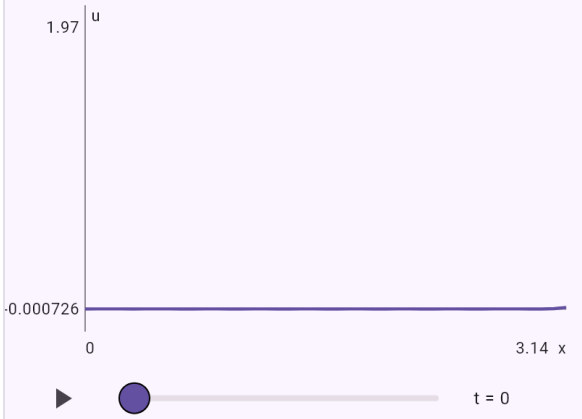
$$u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = u_{xx}$
- Podmínky: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnice je parabolická (jako rovnice vedení tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Oba konce jsou izolované, ale do tyče proudí teplo (tok na koncích nebo zdroj). Ustálený stav neexistuje – střední teplota roste rychlostí $R = \frac{1}{\pi}$. Hledáme $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, kde W splňuje rovnici bez časové derivace: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu, po dosazení a vydělení se proměnné oddělí – obě strany se musí rovnat stejné konstantě: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X' = 0 na obou koncích (izolované konce) má řešení $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – exponenciální útlum, vyšší frekvence tlumí rychleji: $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice): $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes): $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Řešení $u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Struna rozkmitávaná na konci její vlastní frekvencí – rezonance, amplituda roste s t.

Zadání: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Výsledek

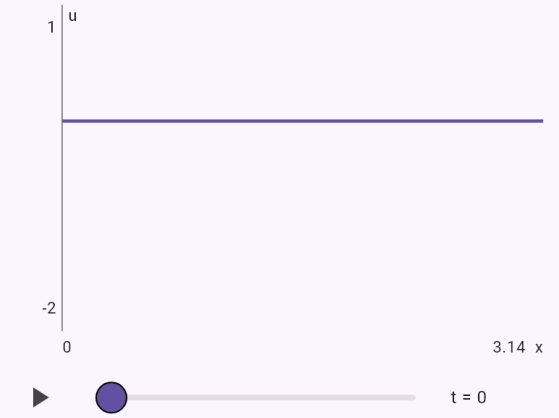
$$u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{tt} = u_{xx}$
- Podmínky:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, rovnice je hyperbolická (jako vlnová rovnice):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Okrajové hodnoty se mění s časem. Zvolíme funkci $w(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$, která okrajové podmínky splňuje, a hledáme $u = w + v$. Odchylka v má nulové okrajové podmínky, ale v rovnici přibude zdroj: $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x \sin t}{\pi}$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu – stojaté vlny; obě strany se rovnají stejné konstantě:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová část pro každé n – kmity s vlastní frekvencí:
  $T_n'' + n^2 T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$
- Rovnice je lineární – součet řešení je zase řešení (princip superpozice): $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, \sin(nx)$
- Všechny koeficienty jsou nulové:
  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0 \, \sin(nx)\, \mathrm{d}x$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)
  $b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi}$
- Zdroj $F(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$ rozložíme do vlastních funkcí stejně jako počáteční podmínku: $F_n(t) = f_n \sin t$, koeficienty spočteme integrálem.
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)
  $f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Duhamelův princip: každý koeficient řady je vynucený kmit – oscilátor s vlastní frekvencí a vnější silou F_n(t). Řešení je volný kmit plus konvoluce síly s odezvou na impuls sin(ω_n t)/ω_n
  $T_n'' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(n$
- Integrál spočteme obecně pro každé n (K_n je jádro z předchozího kroku); kde by obecný vzorec dělil nulou (rezonance), počítáme zvlášť
  $\int_0^t K_n(t-s)\, \sin s \, \mathrm{d}s = \frac{n \sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1: \int$
- Řešení
  $u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt)\, \sin(nx) + \frac{(\sin}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Laplaceova rovnice s izolovanou dolní stranou (u_y = 0) – cosh místo sinh.

Zadání: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Výsledek

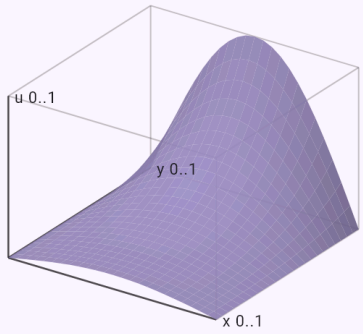
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Podmínky:
  $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, rovnice je eliptická (jako Laplaceova rovnice):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Strana s nenulovou hodnotou (ostatní strany mají u = 0):
  $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu:
  $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X = 0 na obou koncích má nenulová řešení jen pro
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Druhá rovnice Y" = λY s nulovou derivací na protější (izolované) straně – proto cosh –, normovaná tak, aby na dané straně byla 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- Počáteční (okrajová) funkce je už součtem vlastních funkcí, proto je nenulových jen několik koeficientů $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$: $c_1 = 1$, ostatní jsou nulové.

- Řešení: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Burgersova rovnice – charakteristiky se protnou a vznikne rázová vlna.

Zadání: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Výsledek

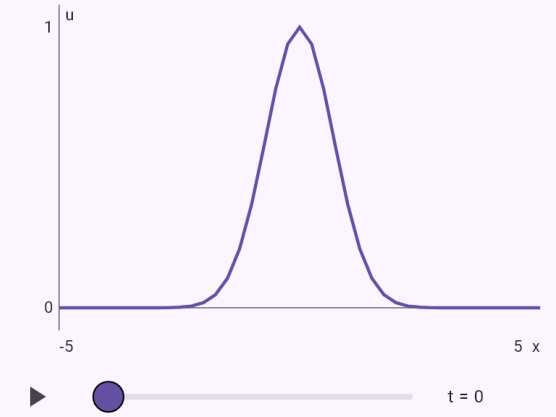
$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t + uu_x = 0$
- Podmínky: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Burgersova rovnice je nelineární – rychlost šíření je samo u. Podél charakteristik je u konstantní, takže charakteristiky jsou přímky
  $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$
- Řešení je dané implicitně rovnicí $u = f(x - ut)$ – pro každý bod se hledá x_0, z něhož do něj vede charakteristika.
- Kde f klesá, rychlejší část vlny dohání pomalejší a charakteristiky se protnou. První průsečík nastane v čase $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$ – vznikne rázová vlna a hladké řešení přestane existovat.
- Řešení (implicitně, do vzniku rázové vlny):
  $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



t = 0

Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Burgersova rovnice s viskozitou – Coleova–Hopfova transformace na vedení tepla.

Zadání: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

Výsledek

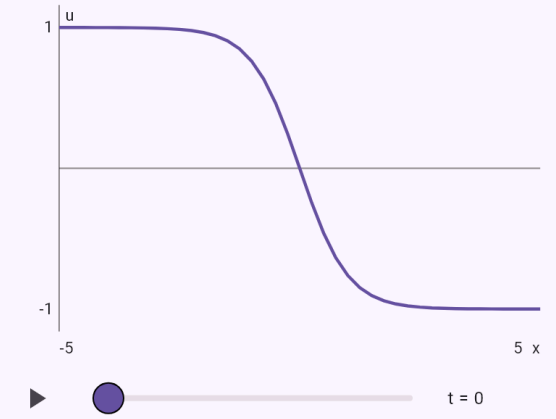
$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Podmínky: $u(x,0) = -\operatorname{tgh} x$
- S viskozitou v > 0 rovnici linearizuje Coleova–Hopfova transformace: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – z Burgersovy rovnice se stane rovnice vedení tepla.
- Počáteční podmínka pro φ
  $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- Rovnici vedení tepla řeší konvoluce s tepelným jádrem; po dosazení je u podílem dvou integrálů, které pro graf počítáme numericky
  $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}\,1}{\int K}$
- Integrál nemá elementární vyjádření – řešení zůstává ve tvaru konvoluce, graf je spočtený numericky:
  $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



t = 0

Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Godunovovo schéma – rázová vlna se posouvá rychlostí 1/2.

Zadání: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Výsledek

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1 - \operatorname{tgh}(10x)}{2}$
- Síť: 61 uzlů, 25 časových kroků; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Rázovou vlnu zvládne konzervativní Godunovovo schéma – tok F mezi buňkami z přesného řešení Riemannovy úlohy (skoku)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} \end{cases}$$

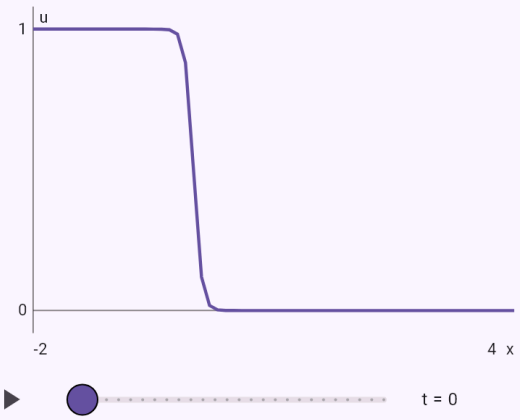
- Podmínka CFL (numerická oblast závislosti obsahuje charakteristiku): $\dfrac{k}{h} \max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- Pokles z u_L na u_R < u_L se šíří jako rázová vlna rychlostí z Rankinovy–Hugoniotovy podmínky: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- Řešení na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = -2$	$x = -1{,}4$	$x = -0{,}8$	$x = -0{,}$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- Výsledek v prostředním uzlu: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Vedení tepla ve čtvercové desce metodou ADI – stabilní i pro velký krok.

Zadání: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h =`

`0.1; k = 0.01; T = 0.1)`

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Síť: 121 uzlů, 10 časových kroků (poměry časového kroku a čtverců prostorových kroků).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- Metoda střídavých směrů (ADI) Peacemana a Rachforda: polovina kroku je implicitní ve směru x a explicitní v y, druhá polovina naopak

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Von Neumannova analýza: obě poloviny kroku mají dohromady zesílení pro libovolný krok – ADI je bezpodmínečně stabilní.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- V první polovině kroku řešíme 9 třídiagonálních soustav podél řádků sítě, ve druhé 9 podél sloupců – každou Thomasovým algoritmem. To je mnohem levnější než jedna velká soustava pro celou síť.
- Řešení na vybraných časových vrstvách

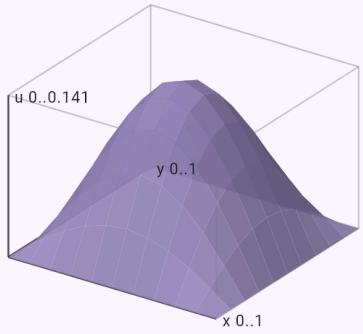
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max \lvert u \rvert$
0	1,000000	1,000000
0,01	0,822069	0,822069
0,02	0,675798	0,675798
0,03	0,555553	0,555553
0,04	0,456703	0,456703
0,05	0,375442	0,375442
0,06	0,308639	0,308639
0,07	0,253723	0,253723
0,08	0,208578	0,208578
0,09	0,171465	0,171465
0,1	0,140956	0,140956

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě (přesně uprostřed $0{,}138911$).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Laplaceova rovnice metodou sdružených gradientů – srovnání s SOR a multigridem.

Zadání: `cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

```
0.125)
```

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Čtvercová síť: $h = 0{,}125$, celkem 81 uzlů, z toho 49 vnitřních neznámých.
- Pětibodové schéma – u_xx + u_yy nahradíme diferencemi, v každém uzlu vznikne jedna rovnice: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Metoda sdružených gradientů – soustava $-\Delta_h u = -f$ je symetrická a pozitivně definitní; každý krok zmenší chybu v novém směru p_k, sdruženém s předchozími $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_i$
- Iterace od nulového odhadu uvnitř (vybrané uzly a největší změna)

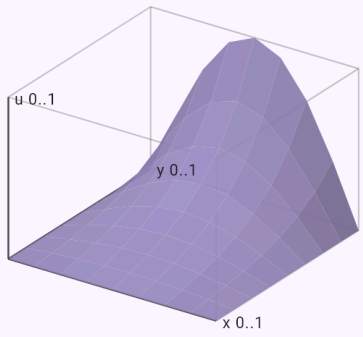
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- Iterace se zastavila po 8 krocích, kdy největší změna klesla pod 10^{-4}
- Srovnání metod na stejné síti a se stejnou tolerancí: Jacobi 71 iterací, Gauss–Seidel 42, SOR s ω = $1{,}446$ jen 16
- Rychlejší metody pro stejnou soustavu (49 neznámých): sdružené gradienty 8 iterací, multigrid 5 V-cyklů. Počet V-cyklů multigridu na jemnosti sítě skoro nezávisí.
- Hodnoty v uzlech sítě

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}00432$ (přesně uprostřed $0{,}199268$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Poissonova rovnice multigridem – pár V-cyklů na jemné síti.

Zadání: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Čtvercová síť: $h = 0{,}0625$, celkem 289 uzlů, z toho 225 vnitřních neznámých.
- Pětibodové schéma – u_xx + u_yy nahradíme diferencemi, v každém uzlu vznikne jedna rovnice

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Multigrid (V-cyklus): Gaussova–Seidelova iterace rychle utlumí jen rychle se měnící část chyby (S² – dva kroky). Hladký zbytek r převedeme na hrubší síť 2h, tam ho opravíme (opět multigridem) a opravu interpolujeme zpět

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- Iterace od nulového odhadu uvnitř (vybrané uzly a největší změna)

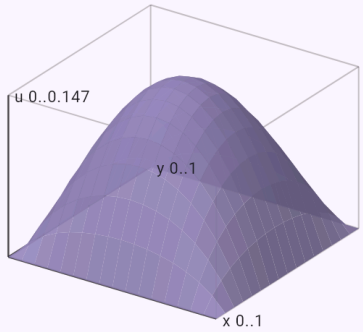
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- Iterace se zastavila po 4 krocích, kdy největší změna klesla pod 10^{-4}
- Srovnání metod na stejné síti a se stejnou tolerancí: Jacobi 179 iterací, Gauss–Seidel 108, SOR s ω = $1{,}674$ jen 25
- Rychlejší metody pro stejnou soustavu (225 neznámých): sdružené gradienty 15 iterací, multigrid 4 V-cyklů. Počet V-cyklů multigridu na jemnosti sítě skoro nezávisí.
- Hodnoty v uzlech sítě

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j} \rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (přesně uprostřed $0{,}147342$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Metoda konečných prvků s trojúhelníky – matice tuhosti a stejná soustava jako pětibodové schéma.

Zadání: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Čtvercová síť: $h = 0{,}25$, celkem 25 uzlů, z toho 9 vnitřních neznámých.
- Metoda konečných prvků: rovnici vynásobíme testovací funkcí v a zintegrujeme per partes (slabá formulace); řešení hledáme jako kombinaci „střížek“ φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Síť prvků: každou buňku rozdělíme úhlopříčkou na dva pravoúhlé trojúhelníky – 32 trojúhelníků, 25 uzlů, z toho 9 neznámých.
- Matice tuhosti jednoho trojúhelníku (gradienty lineárních funkcí jsou na něm konstantní)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\, \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0, \\ -0, \end{pmatrix}$$

- Sečtením příspěvků šesti trojúhelníků kolem vnitřního uzlu dostaneme jeho rovnici – na pravidelné síti je to pětibodové schéma vynásobené h_x·h_y

$$4{,}0000\, u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + $$

- Metoda sdružených gradientů – soustava $-\Delta_h u = -f$ je symetrická a pozitivně definitní; každý krok zmenší chybu v novém směru p_k, sdruženém s předchozími

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_$$

- Iterace od nulového odhadu uvnitř (vybrané uzly a největší změna)

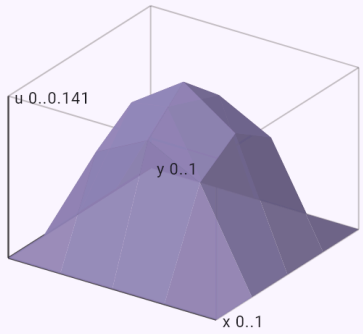
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- Iterace se zastavila po 4 krocích, kdy největší změna klesla pod 10^{-4}
- Srovnání metod na stejné síti a se stejnou tolerancí: Jacobi 19 iterací, Gauss–Seidel 11, SOR s ω = $1{,}172$ jen 8
- Rychlejší metody pro stejnou soustavu (9 neznámých): sdružené gradienty 4 iterací, multigrid 3 V-cyklů. Počet V-cyklů multigridu na jemnosti sítě skoro nezávisí.
- Hodnoty v uzlech sítě

$y \backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (přesně uprostřed $0{,}147342$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Poissonova rovnice na čtverci – dvojná Fourierova řada, srovnejte se schématem sor.

Zadání: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Výsledek

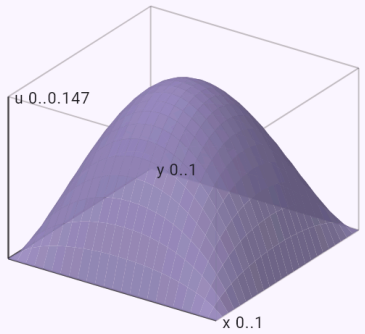
$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Podmínky:
  $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, rovnice je eliptická (jako Laplaceova rovnice):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Část se zdrojem hledáme jako dvojnou řadu z vlastních funkcí obou směrů – každý součin X_m·Y_n splňuje podmínky na stranách a Laplaceův operátor ho jen násobí číslem: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, kde
  $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- Zdroj rozložíme do stejné dvojné řady. Dosazením do Δv = f a porovnáním koeficientů dostaneme
  $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, tedy
  $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$
  $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- Řešení

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Derivace na všech čtyřech stranách – podmínka řešitelnosti a řešení až na konstantu.

Zadání: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 + cos(πx)`

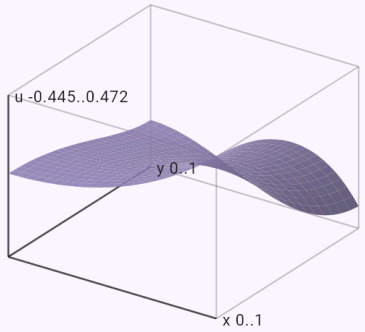
Výsledek

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Podmínky
  $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, rovnice je eliptická (jako Laplaceova rovnice):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Na všech čtyřech stranách je předepsaná derivace (tok). Podle Gaussovy věty musí celkový tok hranicí odpovídat zdroji uvnitř ($\iint_\Omega f \,\mathrm{d}S = 0$) – podmínka řešitelnosti. Podmínka platí, řešení existuje, ale jen až na přičtenou konstantu. Tok hranicí
  $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Kvadratický polynom P převezme průměrné toky stran; zbytek v má na každé straně tok s nulovým průměrem, a tak ho lze sečíst stranu po straně jako dřív:
  $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; průměrné toky
  $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- Strana s nenulovou hodnotou (ostatní strany mají u = 0):
  $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Separace proměnných: hledáme řešení ve tvaru součinu:
  $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Úloha na vlastní čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmínkami X' = 0 na obou koncích (izolované konce) má řešení
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Na dané straně je předepsaná derivace a protější strana je izolovaná: cosh, normovaný tak, aby jeho derivace na dané straně byla 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- Počáteční (okrajová) funkce je už součtem vlastních funkcí, proto je nenulových jen několik koeficientů $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$: $c_1 = 1$, ostatní jsou nulové.
- Řešení (C je libovolná konstanta – s derivacemi na všech stranách je u určené jen až na posun)
  $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Proměnné koeficienty – Sturmova–Liouvilleova úloha s vahou 1/x, vlastní funkce sin(n ln x).

Zadání: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Výsledek

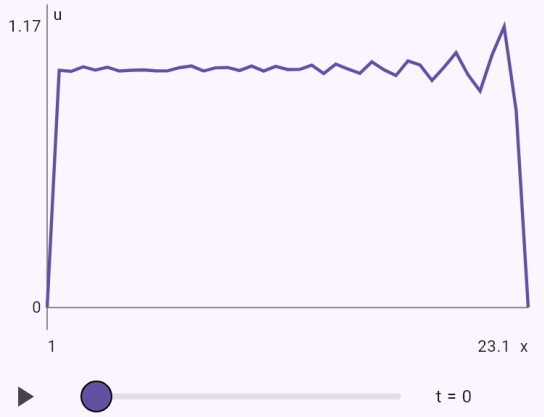
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Postup

- Řešíme parciální diferenciální rovnici $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Podmínky: $u(1,t) = 0, \quad u(e^{\pi},t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Separace proměnných u rovnice s proměnnými koeficienty – obě strany se musí rovnat stejné konstantě:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- Rovnici pro X vynásobíme vhodnou funkcí a dostaneme Sturmovu–Liouvilleovu úlohu
  $(xX')' + \lambda \dfrac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^{\pi}) = 0$ s p = x a vahou w = $\dfrac{1}{x}$. Její vlastní funkce jsou ortogonální s vahou w.
- Rovnice pro X je Eulerova, hledáme X = x^r:
  $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0.$
  Nenulové řešení s X = 0 na obou koncích existuje jen pro komplexní kořeny: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. Podmínky na koncích dávají
  $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Ortogonalita vlastních funkcí s vahou w:
  $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} X_m X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; jejich norma
  $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} X_n^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- Časová část pro každé n – exponenciální útlum, vyšší frekvence tlumí rychleji: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Koeficienty počáteční funkce f jsou její průměty s vahou w: $c_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} f(x)\, X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Po substituci se z nich stanou koeficienty obyčejné sinové řady funkce $\xi = \ln x: \quad 1$
- Koeficienty z počáteční (okrajové) funkce díky ortogonalitě vlastních funkcí (integrace per partes)
  $c_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- Řešení
  $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Řešení u v čase t zvoleném posuvníkem; tlačítkem se průběh přehraje.

Schéma MUSCL s limiterem – srovnejte chybu s Laxovým–Wendroffovým a Laxovým–Friedrichsovým schématem.

Zadání: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016; to`

= 0.4)

Výsledek

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Síť na $0 \le x \le 1$: 51 uzlů, 25 časových kroků až do t = $0{,}4$; $h = 0{,}02$, $k = 0{,}016$, $\nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ je Courantovo číslo.
- Přesné řešení je přenášené po charakteristikách $x - t = C$ rychlostí a = 1
- Schéma MUSCL – v každé buňce lineární průběh se sklonem σ_i omezeným limiterem; tok se bere z buňky proti proudu posunuté o půl kroku. Kde je řešení hladké, má druhý řád, u skoků nevznikají zákmity

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\nu}{2}$$

- Sklon v buňce omezí funkce minmod – u extrému je nulový, jinak menší z obou jednostranných diferencí

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- Podmínka CFL (numerická oblast závislosti obsahuje charakteristiku): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Schéma s limiterem je nelineární; místo von Neumannovy analýzy platí, že nezvětšuje celkovou variaci (TVD – nevzniknou nové zákmity): $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n)$, $TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, pokud $|\nu| \le 1$
- První časová vrstva

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

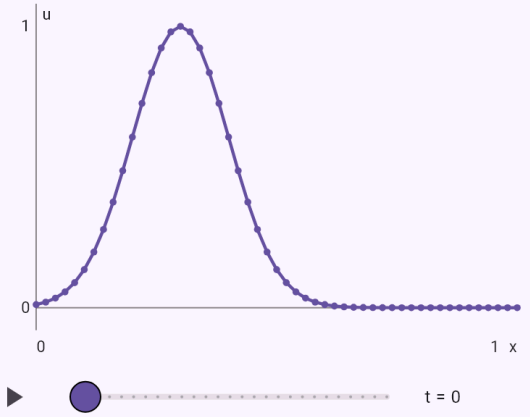
- Řešení na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0326$ (přesně uprostřed $0{,}135335$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Body: numerické řešení v uzlech sítě; čárkovaně přesné řešení. Posuvníkem se volí časová vrstva.

Burgersova rovnice s viskozitou schématem MUSCL – srovnání s Coleovou–Hopfovou transformací.

Zadání: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Výsledek

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1 - \operatorname{tgh} x}{2}$
- Síť: 41 uzlů, 10 časových kroků; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- Schéma MUSCL pro Burgersovu rovnici: z omezených sklonů σ_i (limiter) dopočteme hodnoty na hranicích buněk, tok mezi nimi z Godunovova řešení skoku a v čase krokujeme Heunovou metodou (dva kroky)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- Sklon v buňce omezí funkce minmod – u extrému je nulový, jinak menší z obou jednostranných diferencí

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

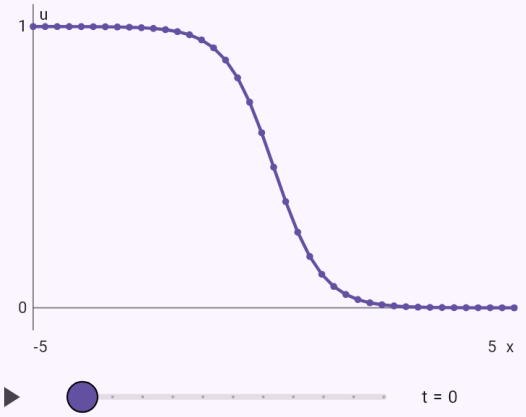
- Podmínka CFL (numerická oblast závislosti obsahuje charakteristiku): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- Viskózní člen ν·u_xx přičteme centrální diferencí: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. Explicitní krok je stabilní, protože $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- Pokles z u_L na u_R < u_L se šíří jako rázová vlna rychlostí z Rankinovy–Hugoniotovy podmínky: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54 \cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- Řešení na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- Největší chyba proti přesnému řešení v poslední vrstvě: $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (přesně uprostřed $0{,}811680$).
- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Graf

Průběh v čase | Plocha 3D



Body: numerické řešení v uzlech sítě; čárkovaně přesné řešení. Posuvníkem se volí časová vrstva.

Konečné prvky na oblasti tvaru L – triangulace ořezáváním uší, 3D plocha jen nad oblastí.

Zadání: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`

Výsledek

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Postup

- Řešíme numericky metodou sítí: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \quad (\partial\Omega)$
- Oblast je mnohoúhelník s vrcholy $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, obsah $|\Omega| = 3{,}0000$
- Metoda konečných prvků: rovnici vynásobíme testovací funkcí v a zintegrujeme per partes (slabá formulace); řešení hledáme jako kombinaci „střížek“ φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

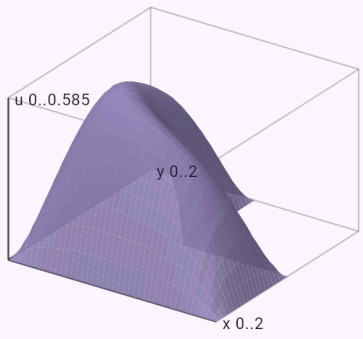
- Triangulace: ořezáváním „uší“ (konvexní vrchol, v jehož trojúhelníku neleží jiný vrchol) vznikne 4 trojúhelníků; $4\times$ je rozdělíme středy stran na čtyři menší − 1024 trojúhelníků, 561 uzlů, z toho 465 vnitřních (neznámých), nejdelší hrana $h = 0{,}1398$
- Matice tuhosti jednoho trojúhelníku (gradienty lineárních funkcí jsou na něm konstantní)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - \dots$$

- Hodnoty v uzlech na hranici jsou dané, jejich příspěvky převedeme na pravou stranu: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- Řídkou soustavu K·U = F pro 465 neznámých vyřeší metoda sdružených gradientů za 128 iterací. Největší hodnota: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$

- Výsledek v prostředním uzlu: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Graf



Řešení u jako plocha nad oblastí. Otáčejte tažením prstu.

Známá omezení

- Analyticky jen lineární rovnice s jednou neznámou funkcí u dvou proměnných a Burgersova rovnice; jiné nelineární rovnice a soustavy ne.
- Separací proměnných rovnice vedení tepla a vlnová rovnice na intervalu; zdroj jen jako součet součinů p(x)·q(t), u Poissonovy rovnice nejvýš tři součiny p(x)·q(y). Proměnné koeficienty jen eulerovského typu αx²u_xx + βxu_x s nulovými hodnotami na koncích.
- Fourierova transformace v uzavřeném tvaru pro Gaussovu funkci, polynom a funkce s f″ = λf; jinak zůstane konvoluce a graf se spočte numericky.
- Numericky ve 2D vedení tepla a Laplaceova rovnice na obdélníku s pravidelnou sítí; na mnohoúhelníku jen metoda konečných prvků s lineárními trojúhelníky a hodnotou na hranici (ne derivací), bez otvorů a nejvýš se 40 vrcholy.

39. Rekurence a vytvořující funkce

Aplikace řeší lineární rekurence s konstantními koeficienty libovolného řádu přes charakteristickou rovnici – i násobné a komplexní kořeny (komplexní tvar řešení a jeho převod na reálný podle Moivreovy věty) – a s pravou stranou ve tvaru $P(n)\cdot q^n$ (i $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, rezonance a součet pravých stran). Počáteční podmínky určí konstanty; jako kontrolu aplikace spočítá další členy z rekurence a porovná je se vzorcem.

Čipem „Metoda“ jde zvolit i vytvořující funkci ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, parciální zlomky, geometrické řady), mocniny matice (diagonalizace) nebo u 1. řádu sčítání. Rekurenci 1. řádu s proměnným koeficientem ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) vyřeší součinem (faktoriály), převoditelné nelineární rekurence substitucí $b_n = 1/a_n$ nebo $b_n = \ln a_n$. Soustavu dvou rekurencí vyřeší vyloučením jedné posloupnosti nebo maticí, rekurenci „rozděl a panuj“ $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ substitucí $n = b^k$ – i s odhadem podle mistrovské věty.

S operací „Vytvořující funkce“ aplikace najde vytvořující funkci posloupnosti zadané vzorcem ($n^2 + 2^n$) nebo prvními členy (1, 0, 1, 0, …), a obráceně z funkce $A(x)$ vzorec pro a_n. Počet celočíselných nezáporných řešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (i s mezemi nebo koeficienty – placení mincemi) spočítá jako koeficient vytvořující funkce.

Graf ukáže členy posloupnosti jako body (u soustavy obě posloupnosti).

Diference $\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n)$ („Δ(n^3)“) a diferenční rovnice $\Delta y_n = n$ jako rekurence y_{n+1} − y_n = n. Aritmetickou nebo geometrickou posloupnost dopočítá ze dvou zadaných údajů („a_3 = 7, a_7 = 19“, „geometrická posloupnost a_2 = 6, a_5 = 162“) – a_1, d nebo q, vzorec pro n-tý člen a hledané členy a součty (s_{10}, a_{20} = ?).

Posloupnost zadanou vzorcem pro n-tý člen (a_n = (n+1)/n) aplikace vyšetří: prvních pět členů, monotonii podle rozdílu sousedních členů, omezenost a limitu.

Jak zadat

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Zápis se závorkami, podmínky za čárkou.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Zápis s indexy (i z fotky). Bez podmínek vyjde obecné řešení s konstantami C_1, C_2.
`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	Index může klesat (a_{n-1}, a_{n-2}); stejnou hodnotu lze zadat více členům.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Soustava – rovnice na řádcích, podmínky na posledním.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Rozděl a panuj – člen v n/b.
`n^2 + 2^n`	Vzorec posloupnosti s operací „Vytvořující funkce“ (i a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	První členy posloupnosti oddělené čárkou.
`1/(1 - x - x^2)`	Vytvořující funkce v x (i A(x) = …) – vzorec pro a_n.
`počet řešení x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	Počet nezáporných celočíselných řešení s mezemi.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Diference a diferenční rovnice.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Posloupnost ze zadaných členů – bez slova aritmetická, se slovem „geometrická“ geometrická.

Ukázky

Dva různé reálné kořeny, kontrola dalšími členy.

Zadání: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Výsledek

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

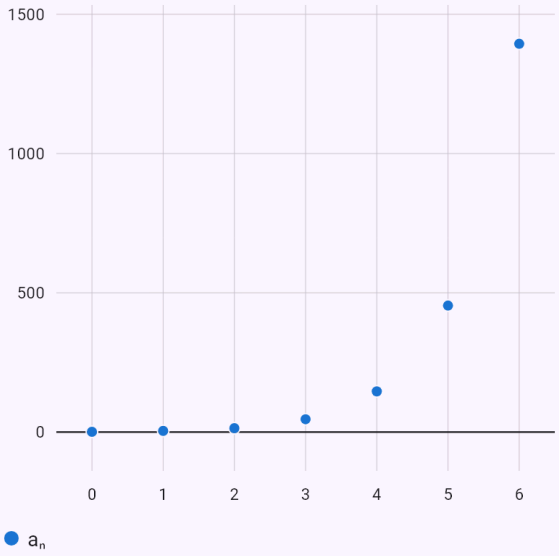
Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Diskriminant $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; kořeny: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Obecné řešení: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

  $C_1 + C_2 = 1$

  $2C_1 + 3C_2 = 4$
- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Fibonacciho posloupnost – Binetův vzorec.

Zadání: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Výsledek

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

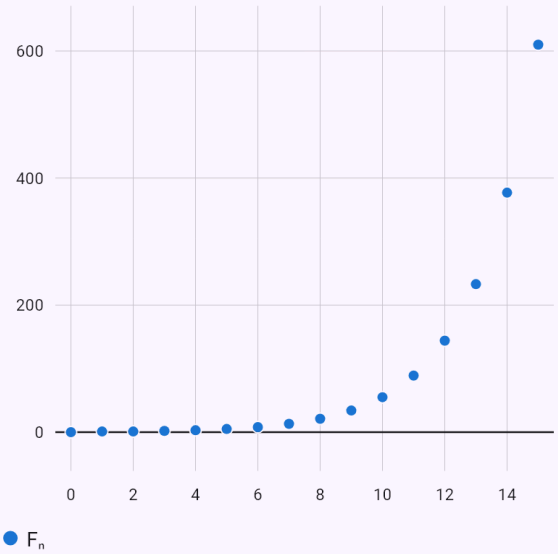
Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Řešení hledáme ve tvaru $F_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^{n-2} dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Diskriminant $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; kořeny: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Obecné řešení $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- Řešení splňující zadané podmínky $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Kontrola: z rekurence vychází $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Komplexní kořeny 1 ± i – komplexní tvar a Moivreova věta.

Zadání: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

Výsledek

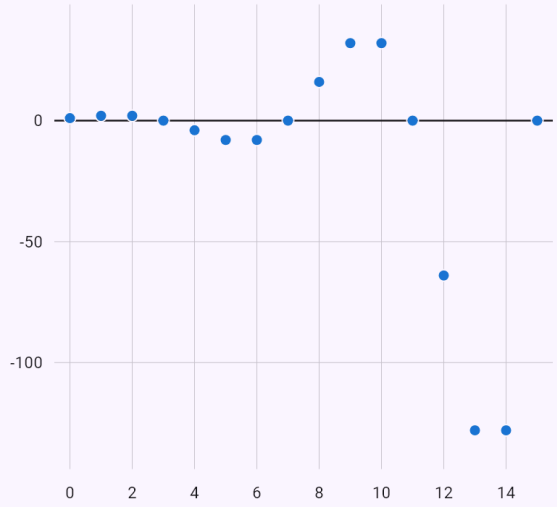
$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; kořeny: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Komplexní kořeny $1 \pm i$ zapíšeme v goniometrickém tvaru: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, tedy $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Podle Moivreovy věty $\lambda^n =$ $\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Obecné řešení v komplexním tvaru (komplexní konstanty): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Sdružené členy sečteme a s novými reálnými konstantami dostaneme reálný tvar $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 1,\ C_2 = 1$
  $C_1 = 1$
  $C_1 + C_2 = 2$
- Řešení splňující zadané podmínky $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$

- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Pravá strana n, dvojnásobný kořen 2.

Zadání: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Výsledek

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; kořeny: $\lambda_{1,2} = 2$
- Obecné řešení homogenní rekurence: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Pravá strana n má speciální tvar; číslo 1 není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $a_n^{(p)} = An + B$
- Dosadíme do rekurence a sloučíme členy: $An + B - 2A = n$
- Porovnáme koeficienty u stejných členů na obou stranách odtud $A = 1,\ B = 2$

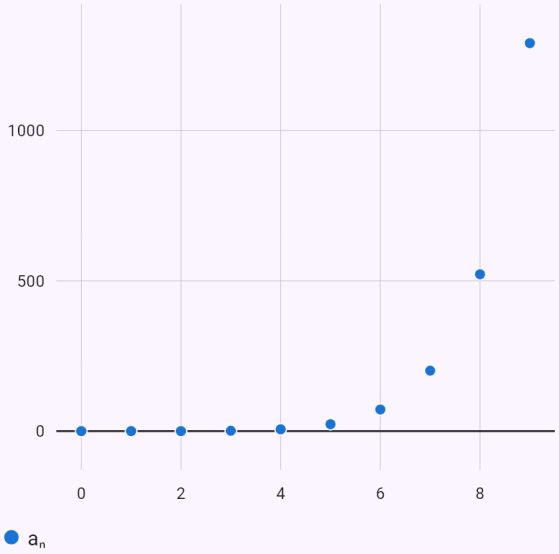
$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - 2A &= 0 \end{aligned}$$

- Partikulární řešení: $a_n^{(p)} = n + 2$
- Obecné řešení: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_1 + 2 &= 0 \\ 2C_1 + 2C_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Táž rekurence vytvořující funkcí.

Zadání: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Vytvořující funkce

Výsledek

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Zavedeme vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Rekurenci vynásobíme x^{n+2} a sečteme pro všechna n ≥ 0

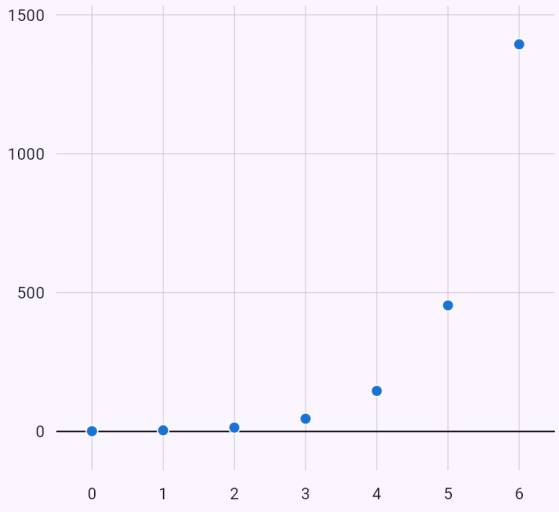
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Součty vyjádříme pomocí vytvořující funkce a počátečních hodnot: $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- Vyjádříme vytvořující funkci a rozložíme jmenovatel: $A(x) = \frac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Rozklad na parciální zlomky: $A(x) = -\frac{1}{1 - 2x} + \frac{2}{1 - 3x}$
- Zlomky rozvineme v geometrické řady

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Koeficient u x^n je hledaný člen: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Táž rekurence mocninami matice.

Zadání: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Mocniny matice

Výsledek

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Rekurenci zapíšeme maticově tedy $v_{n+1} = M \cdot v_n$ s maticí

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Opakovaným dosazením $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla matice: $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, odtud $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Vlastní vektory – řešení $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Matici diagonalizujeme, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

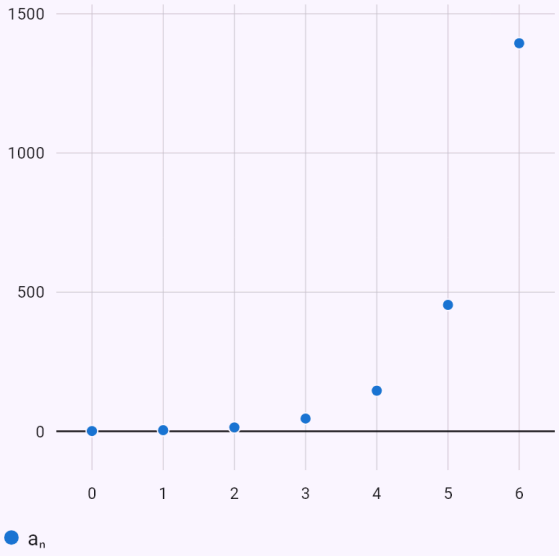
- Mocnina matice koeficienty takže $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Rekurence 1. řádu sčítáním.

Zadání: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Sčítání

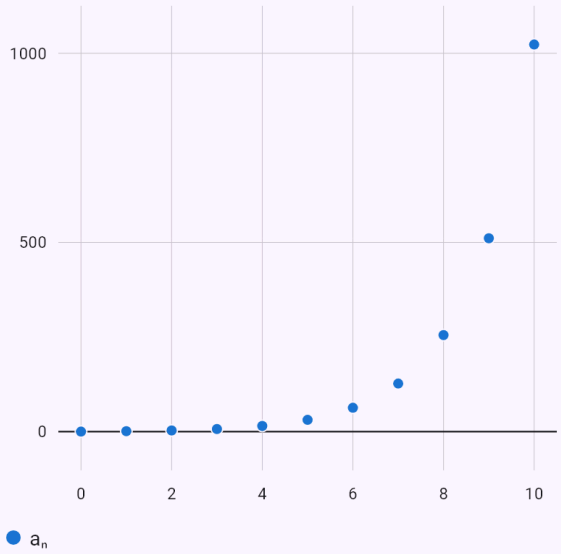
Výsledek

$$a_n = 2^n - 1$$

Postup

- Lineární rekurence 1. řádu s konstantními koeficienty: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Rekurenci opakovaně dosadíme do sebe: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$, obecně $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- Součet sečteme: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = 2^n - 1$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Proměnný koeficient – součin vede na faktoriál.

Zadání: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Výsledek

$$a_n = n!$$

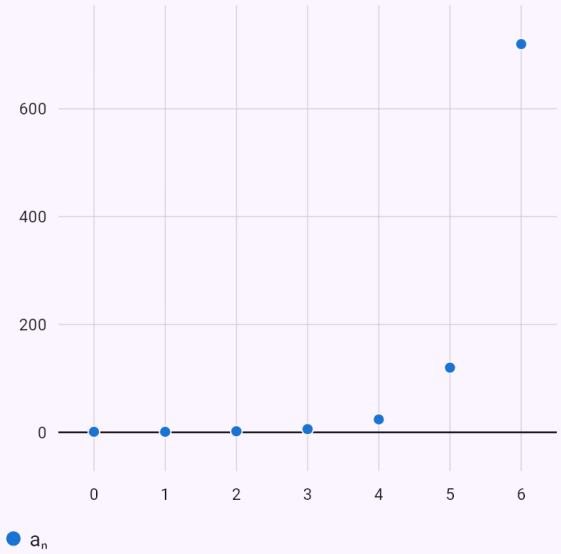
Postup

- Lineární rekurence 1. řádu s proměnným koeficientem: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Rekurenci opakovaně dosadíme do sebe – člen je součinem

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$$

- Součin zjednodušíme (faktoriály se zkrátí): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = n!$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Nelineární rekurence – substituce $b_n = 1/a_n$.

Zadání: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

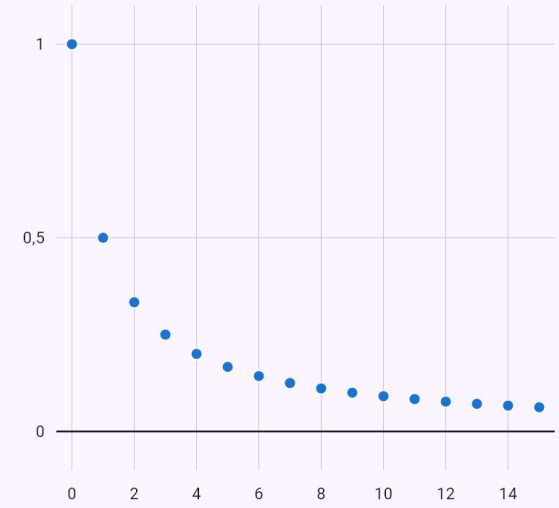
Výsledek

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Postup

- Nelineární rekurence – převrácené hodnoty členů ji převedou na lineární: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Obě strany převrátíme: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; substituce $b_n = \frac{1}{a_n}$ tak převede rekurenci na lineární: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Počáteční podmínky pro novou posloupnost: $b_0 = 1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $b_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda - 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = 1$
- Obecné řešení homogenní rekurence: $b_n^{(h)} = C_1$
- Pravá strana 1 má speciální tvar; číslo 1 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme n: $b_n^{(p)} = An$
- Dosadíme do rekurence a sloučíme členy: $A = 1$
- Partikulární řešení: $b_n^{(p)} = n$
- Obecné řešení: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Řešení splňující zadané podmínky: $b_n = 1 + n$
- Kontrola: z rekurence vychází $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – stejně jako ze vzorce.
- Vrátíme se k původní posloupnosti: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Soustava dvou rekurencí vyloučením posloupnosti b_n.

Zadání: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Výsledek

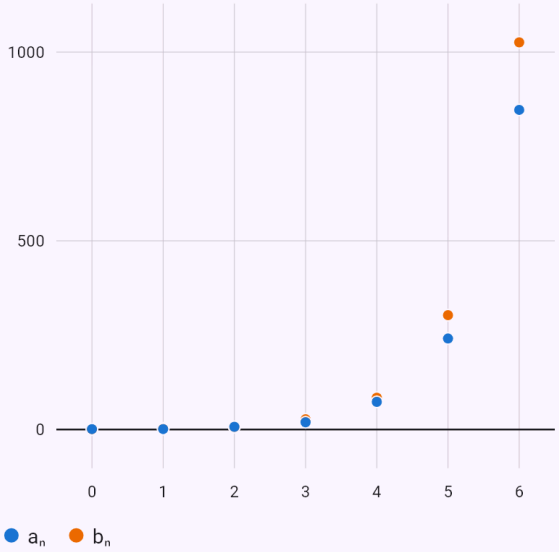
$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Postup

- Soustava dvou lineárních rekurencí
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$
- Z první rovnice vyjádříme $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, tedy i $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; dosazením do druhé rovnice dostaneme rekurenci pro jedinou posloupnost:
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$
- Druhou počáteční podmínku dostaneme z první rovnice:
  $a_1 = 1 + 0 = 1$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici:
  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$
- Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; kořeny:
  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$
- Obecné řešení: $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud
  $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$
  $$C_1 + C_2 = 1$$
  $$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$
- Řešení splňující zadané podmínky:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – stejně jako ze vzorce.
- Druhou posloupnost dopočítáme z vyjádření
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Rozděl a panuj (merge sort) – substituce n = 2ᵏ a mistrovská věta.

Zadání: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Výsledek

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Podmínky: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Postup

- Rekurence typu „rozděl a panuj“: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Pro n mocninu základu: substituce $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ dává lineární rekurenci 1. řádu: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Počáteční podmínky pro novou posloupnost: $S_0 = 1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $S_k = \lambda^k$; po dosazení a vydělení λ^k dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda - 2 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = 2$
- Obecné řešení homogenní rekurence: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Pravá strana 2^{k+1} má speciální tvar; číslo 2 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme k: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Dosadíme do rekurence, vydělíme 2^k a sloučíme členy: $2A = 2$
- Odtud $A = 1$
- Partikulární řešení: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- Obecné řešení: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Řešení splňující zadané podmínky: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Kontrola: z rekurence vychází
  $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – stejně jako ze vzorce.
- Vrátíme se k n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- Mistrovská věta (a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)): $2 = 2^1$, proto T(n) = $\Theta(n \log n)$

Vytvořující funkce posloupnosti n² + 2ⁿ.

Zadání: `n^2 + 2^n` Vytvořující funkce

Výsledek

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Postup

- Zavedeme vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + 2^n\right)x^n$
- Řadu rozdělíme podle linearity:
  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Známá řada: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Známá řada: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Vynásobení členů n odpovídá derivaci vynásobené x
  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Vynásobení členů n odpovídá derivaci vynásobené x
  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- Vytvořující funkce: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Kontrola – rozvoj funkce začíná členy posloupnosti:
  $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \ldots$

Z vytvořující funkce vzorec pro a_n – parciální zlomky přes iracionální kořeny.

Zadání: `1/(1 - x - x^2)` Vytvořující funkce

Výsledek

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}($$

Postup

- Vyjádříme vytvořující funkci a rozložíme jmenovatel

$$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Rozklad na parciální zlomky

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Zlomky rozvineme v geometrické řady

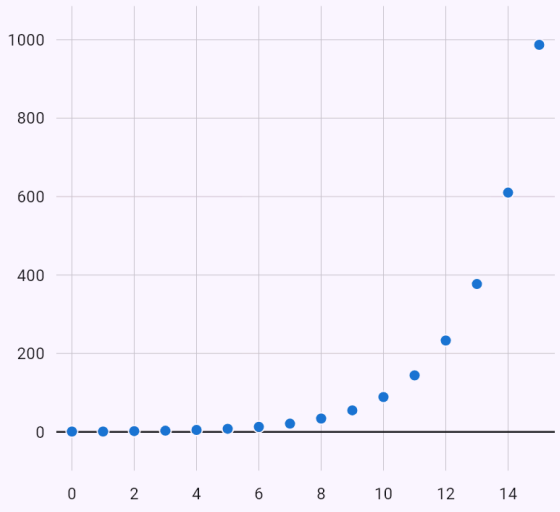
$$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$

- Koeficient u x^n je hledaný člen

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Kontrola – rozvoj funkce začíná členy posloupnosti: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Graf



Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Počet řešení $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ s podmínkou $x_1 \le 3$.

Zadání: `počet řešení x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Výsledek

38

Postup

- Neznámá x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ přispívá řadou $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
- Neznámá x_2 $(x_2 \ge 0)$ přispívá řadou $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- Neznámá x_3 $(x_3 \ge 0)$ přispívá řadou $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- Vytvořující funkce je jejich součin – koeficient u x^N udává počet řešení: $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- Počet řešení je koeficient u x^{10}: 38

Diference funkce.

Zadání: `Δ(n^3)`

Výsledek

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Postup

- Diference – přírůstek funkce, když n zvětšíme o 1
  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Diferenční rovnice jako rekurence.

Zadání: `\Delta y_n = n`

Výsledek

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rekurence 1. řádu s konstantními koeficienty: $y_{n+1} - y_n = n$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda - 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = 1$
- Obecné řešení homogenní rekurence: $y_n^{(h)} = C_1$
- Pravá strana n má speciální tvar; číslo 1 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme n: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- Dosadíme do rekurence a sloučíme členy:
  $2An + A + B = n$
- Porovnáme koeficienty u stejných členů na obou stranách odtud $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$
  $2A = 1$
  $A + B = 0$
- Partikulární řešení: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- Obecné řešení: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Aritmetická posloupnost ze dvou členů a součet deseti členů.

Zadání: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Výsledek

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Postup

- Aritmetická posloupnost: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Zadané údaje dávají soustavu
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- Řešení soustavy: $a_1 = 1,\ d = 3$
- Vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Hledané hodnoty: $s_{10} = 145$

Geometrická posloupnost ze dvou členů.

Zadání: `geometrická posloupnost a_2 = 6, a_5 = 162`

Výsledek

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Postup

- Geometrická posloupnost: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Zadané údaje dávají soustavu
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- Řešení soustavy: $a_1 = 2,\ q = 3$
- Vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Vlastnosti posloupnosti zadané vzorcem.

Zadání: `a_n = (n+1)/n`

Výsledek

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Postup

- Prvních pět členů
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- Rozdíl sousedních členů $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ je pro všechna $n \geq 1$ záporný – posloupnost je klesající.
- Limita $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ – posloupnost je konvergentní.
- Posloupnost je omezená: $1 < a_n \leq 2$

Známá omezení

- Zatím neumí: lineární rekurence s proměnnými koeficienty vyššího řádu, soustavy tří a více rekurencí, rozděl a panuj s více členy (T(n/2) a T(n/3)) a nelineární rekurence, které uvedené substituce nepřevedou na lineární.
- Posloupnost ze zadaných členů potřebuje právě dva údaje (členy, součty, d nebo q).

40. Numerické metody

Numerické metody najdete na úvodní obrazovce v sekci „Aplikace“, obor Numerické metody: kořeny rovnic (bisekce, metoda tečen, sečen, regula falsi, prostá iterace), numerický integrál (lichoběžníková, Simpsonova a Rombergova metoda), numerická derivace poměrnými diferencemi, diferenciální rovnice (Eulerova, Heunova a Rungeova–Kuttova metoda), soustavy lineárních rovnic (Jacobiho a Gaussova–Seidelova metoda, LU rozklad), interpolace (Lagrangeův a Newtonův polynom, kubický splajn) a metoda nejmenších čtverců. Integrál a derivaci lze počítat i z tabulky naměřených hodnot.

Diferenciální rovnice dále vícekrokovými metodami – Adamsovou–Bashforthovou a prediktorem–korektorem Adams–Bashforth–Moulton (rozběh přes Rungeovu–Kuttovu metodu) –, adaptivní metodou RK45 (Dormandova–Princeova, tabulka přijatých a odmítnutých kroků podle odhadu chyby, zápis tol=…) a implicitními metodami pro tuhé rovnice: implicitní Eulerovou a lichoběžníkovou (Crankova–Nicolsonové) s Newtonovou metodou v každém kroku. U rovnice s $\partial f/\partial y < 0$ postup ukáže stabilitu metody: $h\lambda$ a růstový faktor $|R(h\lambda)|$; když je větší než 1, explicitní metoda diverguje a výpočet to oznámí.

Okrajové úlohy $y'' = f(x, y, y')$ s podmínkami $y(a)$, $y(b)$: metodou střelby (počáteční sklon hledá metoda sečen, každou střelu řeší Runge–Kutta) a diferenční metodou (lineární rovnice jako třídiagonální soustava, řešená Thomasovým algoritmem s tabulkami dopředného chodu i zpětného dosazení); kde přesné řešení najde řešič diferenciálních rovnic, porovná ho v uzlech. Pohybovou rovnici $x'' = a(x)$ řeší symplektická Verletova metoda vedle RK4 a ukáže, jak se jim vyvíjí chyba celkové energie.

Postup ukazuje vzorec metody, tabulku iterací nebo hodnot v uzlech, podmínku zastavení (výchozí přesnost $\varepsilon = 10^{-4}$, nejvýš 50 iterací) a odhad chyby; kde přesnou hodnotu známe, porovná s ní výsledek. Podmínky konvergence se ověří: změna znaménka na intervalu, Fourierova podmínka pro start metody tečen, $|g'(x)| < 1$ u prosté iterace, diagonální dominance a spektrální poloměr u soustav. Graf ukáže tečny nebo sečny, lichoběžníky či paraboly, numerické řešení diferenciální rovnice proti přesnému a proložený polynom s body.

U běžné úlohy – rovnice o jedné neznámé, určitého integrálu, diferenciální rovnice s počáteční podmínkou – nabídne aplikace pod výsledkem čipy „Řešit numerickou metodou“; formulář se předvyplní zadáním. Kde přesný postup nejde nebo vyjde zbytečně složitě ($x = \cos x$, Cardanovy vzorce), je nabídka zvýrazněná a rovnici, kterou nejde řešit algebraicky, rovnou vyřeší metodou tečen. Aplikace, které počítají číslo potichu (vnitřní výnosové procento, RPSN, výnos dluhopisu, pH vícesytné kyseliny, Rungeova–Kuttova metoda v modelech), mají pod výsledkem sbalený řádek „Postup metody“ s krátkou tabulkou iterací.

Jak zadat

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	Metoda – anglický název – a za středníky rovnice, počáteční odhad x0, přesnost tol, případně max (iterací) a stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Funkce f(x) (řeší se f(x) = 0) a interval a, b. Bez intervalu i odhadu se kořeny oddělí automaticky.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	Integrál funkce v mezích a, b s n dílky; také trapezoid a romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	Integrál naměřených hodnot – x a y oddělené mezerami.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	Derivace v bodě at s krokem h; z tabulky x=…; y=… (at nepovinné).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Diferenciální rovnice 1. řádu s počáteční podmínkou, krok h a konec intervalu to; také euler a heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Soustava – rovnice za středníky nebo na řádcích; také jacobi a lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Body x, y a bod at; také newtonpoly a spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Polynom nejmenších čtverců stupně degree.

Ukázky

Rovnici nejde řešit algebraicky – aplikace ji vyřeší metodou tečen a nabídne další metody.

Zadání: `x = cos x`

Výsledek

$$x \approx 0{,}7391$$

Řešit numerickou metodou:

Σ Bisekce | Σ Sečny | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterace

Postup

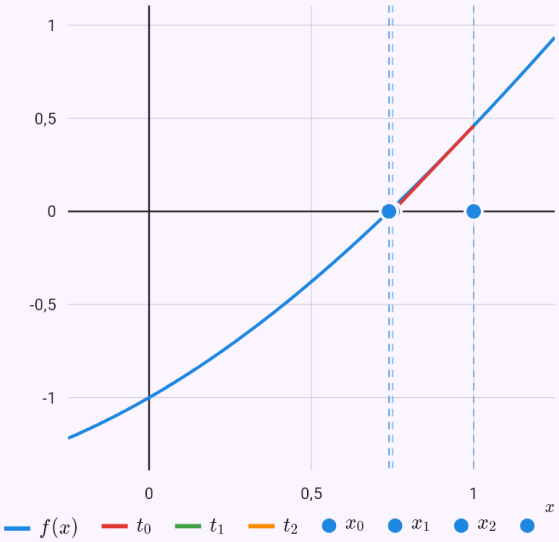
- Hledáme kořen rovnice $x = \cos x$, tj. nulový bod funkce $f(x) = x - \cos x$
- Kořeny oddělíme z tabulky hodnot: funkce mění znaménko v intervalech $\langle 0;\ 1\rangle$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Spojitá funkce má v každém takovém intervalu kořen.
- Metoda tečen potřebuje derivaci: $f'(x) = \sin x + 1$
- Počáteční odhad $x_0 = 1$ zvolíme podle Fourierovy podmínky – v krajním bodě, kde $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); odtud tečny ke kořeni konvergují monotónně.
- Metoda tečen: z bodu x_n jdeme po tečně ke průsečíku s osou x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- Podmínka zastavení $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ je splněna po 3 iteracích.

- Odhad chyby z věty o střední hodnotě, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 1$ na intervalu $\langle 0;\ 1\rangle$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Výsledek metody: $x \approx 0{,}7391$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Metoda tečen s automatickým oddělením kořene a počátečním odhadem podle Fourierovy podmínky.

Zadání: `newton(x^3 - x - 2)`

Výsledek

$$x \approx 1{,}5214$$

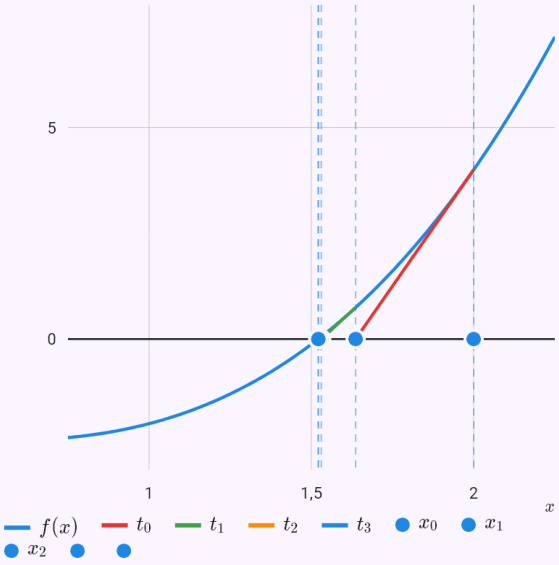
Postup

- Hledáme kořen rovnice $x^3 - x - 2 = 0$, tj. nulový bod funkce $f(x) = x^3 - x - 2$
- Kořeny oddělíme z tabulky hodnot: funkce mění znaménko v intervalech $\langle 1;\ 2\rangle$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Spojitá funkce má v každém takovém intervalu kořen.
- Metoda tečen potřebuje derivaci: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- Počáteční odhad $x_0 = 2$ zvolíme podle Fourierovy podmínky – v krajním bodě, kde $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); odtud tečny ke kořeni konvergují monotónně.
- Metoda tečen: z bodu x_n jdeme po tečně ke průsečíku s osou x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- Podmínka zastavení $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ je splněna po 4 iteracích.
- Odhad chyby z věty o střední hodnotě, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 2$ na intervalu $\langle 1;\ 2\rangle$:
  $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$
- Výsledek metody: $x \approx 1{,}5214$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Bisekce na zadaném intervalu s odhadem chyby.

Zadání: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Výsledek

$$x \approx 1{,}5214$$

Postup

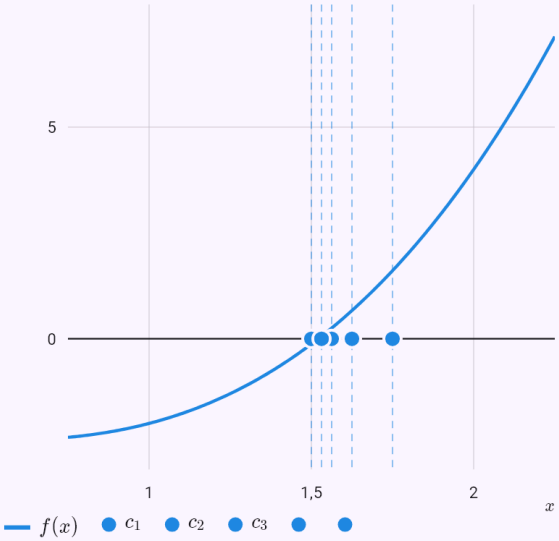
- Hledáme kořen rovnice $x^3 - x - 2 = 0$, tj. nulový bod funkce $f(x) = x^3 - x - 2$
- V intervalu $\langle 1;\ 2\rangle$ je $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – opačná znaménka, spojitá funkce tu má kořen.
- Bisekce: střed intervalu $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, ponecháme polovinu, na které f mění znaménko.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- Podmínka zastavení $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ je splněna po 14 iteracích.
- Odhad chyby: kořen ξ leží v posledním intervalu, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Výsledek metody: $x \approx 1{,}5214$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Metoda sečen ze dvou odhadů.

Zadání: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Výsledek

$$x \approx 2{,}0946$$

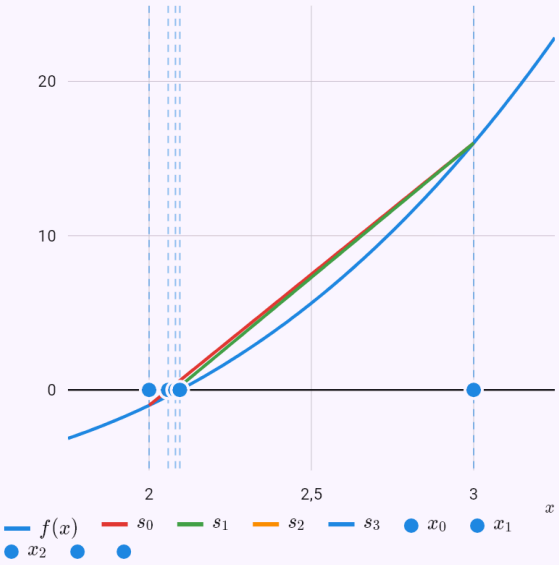
Postup

- Hledáme kořen rovnice $x^3 - 2x - 5 = 0$, tj. nulový bod funkce $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Metoda sečen: tečnu nahradí sečna posledních dvou bodů, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	−1,000000	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	−0,390800	0,941176
3	2,081264	−0,147204	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	−0,000023	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- Podmínka zastavení $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ je splněna po 6 iteracích.
- Odhad chyby z věty o střední hodnotě, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ na intervalu $\langle 2;\, 3\rangle$: $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Výsledek metody: $x \approx 2{,}0946$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Prostá iterace s ověřením podmínky konvergence |g'(x)| < 1.

Zadání: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Výsledek

$$x \approx 0{,}7391$$

Postup

- Rovnici $x = \cos x$ zapíšeme ve tvaru x = g(x): $g(x) = \cos x$
- Podmínka konvergence: $g'(x) = -\sin x$, na intervalu $\langle 0;\ 1\rangle$ je $q = \max|g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 – g je kontrakce a iterace konverguje.
- Prostá iterace: $x_{n+1} = g(x_n)$.

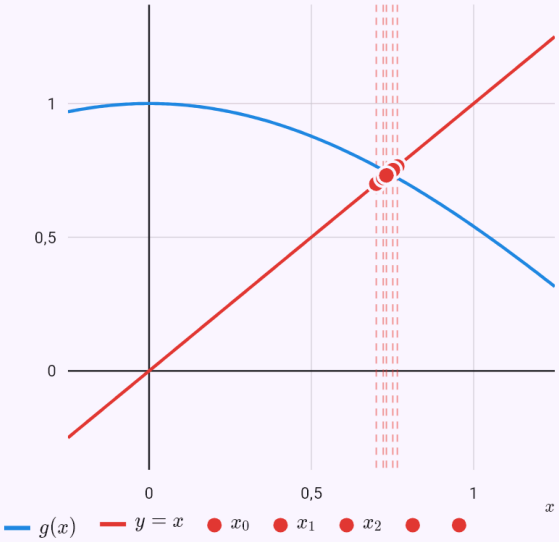
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- Podmínka zastavení $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ je splněna po 18 iteracích.
- Odhad chyby prosté iterace

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Výsledek metody: $x \approx 0{,}7391$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Simpsonova metoda, Rungeův odhad chyby a srovnání s přesnou hodnotou.

Zadání: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Výsledek

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$$

Postup

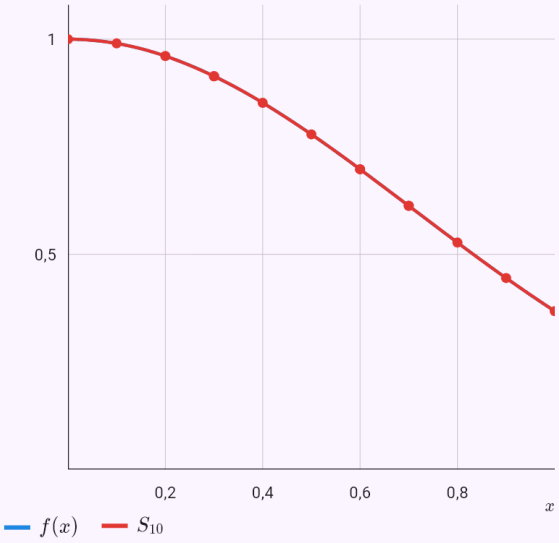
- Integrál $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ spočítáme numericky.
- Krok: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Hodnoty v uzlech a jejich koeficienty

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Simpsonova metoda
  $S_n = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \frac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Pro srovnání přesná hodnota
  $I = \frac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, chyba metody
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Výsledek metody: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Rombergova tabulka pro integrál bez elementární primitivní funkce.

Zadání: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Výsledek

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

Postup

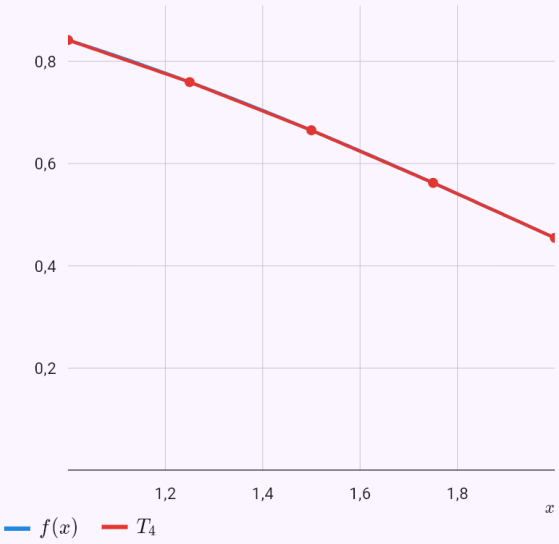
- Integrál $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ spočítáme numericky.
- Rombergova metoda: první sloupec jsou lichoběžníky s krokem h, h/2, h/4, …, další sloupce je Richardsonovou extrapolací zpřesňují,

$$R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- Podmínka zastavení $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ je splněna po 2 iteracích.
- Pro srovnání přesná hodnota chyba metody
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Výsledek metody: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Dráha z naměřené rychlosti lichoběžníkovou metodou.

Zadání: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Výsledek

$$\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

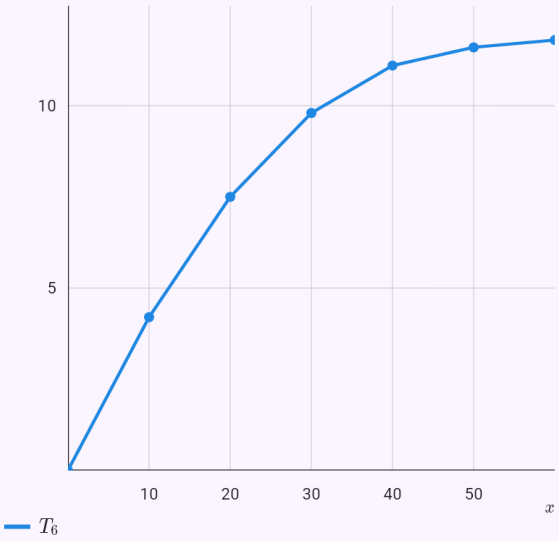
Postup

- Integrujeme tabulku 6 dílků na intervalu $\langle 0;\ 60\rangle$
- Krok: $h = 10$
- Hodnoty v uzlech a jejich koeficienty

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	0,000000
1	10	4,2	2	8,400000
2	20	7,5	2	15,000000
3	30	9,8	2	19,600000
4	40	11,1	2	22,200000
5	50	11,6	2	23,200000
6	60	11,8	1	11,800000
Σ				100,200000

- Lichoběžníková metoda $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Odhad chyby Rungeovým pravidlem (výpočet s dvojnásobným krokem):
  $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Výsledek metody: $\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Dopředná, zpětná a centrální diference pro tři kroky.

Zadání: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Výsledek

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$

$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

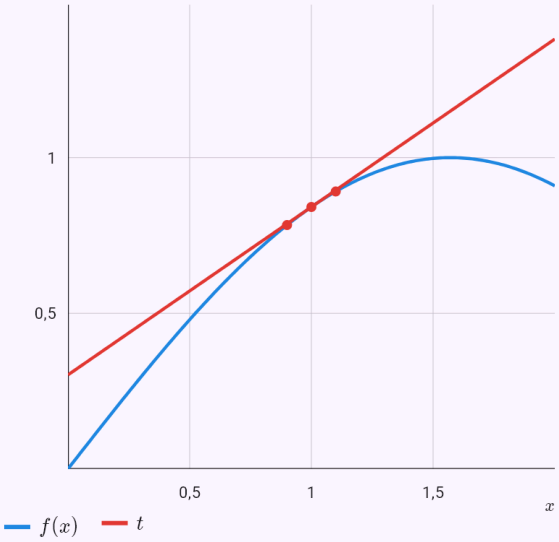
Postup

- Derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 1$ odhadneme poměrnými diferencemi.
- Dopředná diference $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ má chybu úměrnou h, zpětná $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ také; centrální $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ jen h². Druhá derivace: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
$0{,}1$	$0{,}497364$	$0{,}581441$	$0{,}539402$	$-0{,}840770$
$0{,}05$	$0{,}519045$	$0{,}561110$	$0{,}540077$	$-0{,}841296$
$0{,}025$	$0{,}529728$	$0{,}550764$	$0{,}540246$	$-0{,}841427$

- Přesně: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. Chyba dopředné diference s prvním krokem je $0{,}0429$, centrální jen $9 \cdot 10^{-4}$
- Výsledek metody: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Metoda Runge–Kutta 4. řádu s tabulkou sklonů a srovnáním s přesným řešením.

Zadání: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Výsledek

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Postup

- Počáteční úloha $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na intervalu $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 kroků).
- Rungeova–Kuttova metoda 4. řádu – vážený průměr čtyř sklonů

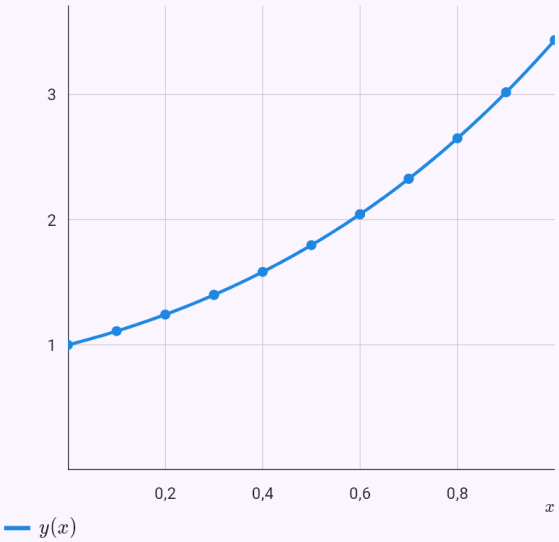
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Pro srovnání přesné řešení: $y = -x + 2e^x - 1$
- Výpočet krok za krokem

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- Na konci intervalu přesně $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Výsledek metody: $y(1) \approx 3{,}436559$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Eulerova metoda pro rovnici bez elementárního řešení.

Zadání: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Výsledek

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

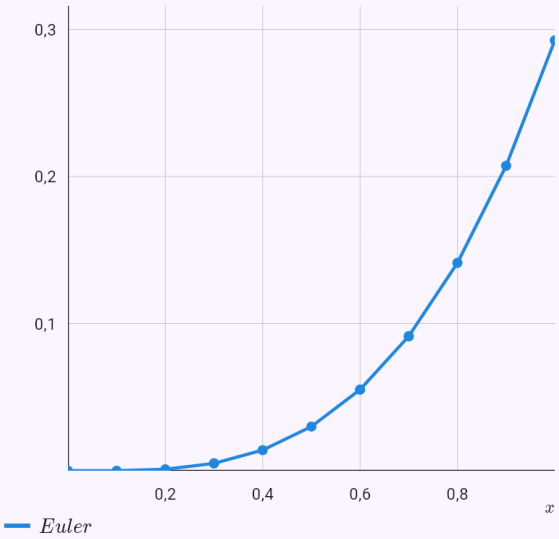
Postup

- Počáteční úloha $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ na intervalu $\langle 0;\ 1 \rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 kroků).
- Eulerova metoda – krok po tečně: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Výpočet krok za krokem

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Výsledek metody: $y(1) \approx 0{,}292542$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Prediktor–korektor ABM – přesnější než samotná Adamsova–Bashforthova metoda.

Zadání: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Výsledek

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Postup

- Počáteční úloha $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na intervalu $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 kroků).
- Prediktor–korektor: Adamsova–Bashforthova metoda odhadne nový bod, Adamsova–Moultonova ho opraví sklonem v odhadnutém bodě. Rozběh přes Rungeovu–Kuttovu metodu

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

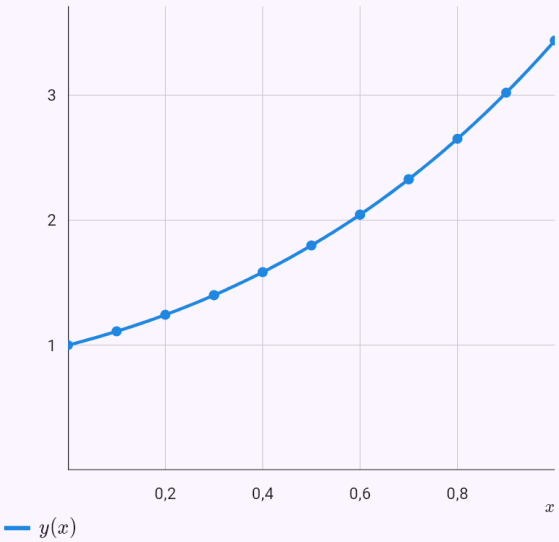
- Pro srovnání přesné řešení: $y = -x + 2e^x - 1$
- Výpočet krok za krokem

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + $
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + $
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + $
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + $
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + $
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + $
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + $
10	1	3,436567	4,436567		

- Na konci intervalu přesně $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Výsledek metody: $y(1) \approx 3{,}436567$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Adaptivní RK45 – první krok se odmítne a zmenší, dál si krok řídí sám.

Zadání: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Výsledek

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Postup

- Počáteční úloha $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na intervalu $\langle 0;\, 2\rangle$, krok $h = 0{,}5$ (4 kroků).
- Adaptivní krok: v každém kroku dvě metody (5. a 4. řádu) ze stejných sklonů – jejich rozdíl odhadne chybu. Krok se přijme, je-li chyba pod tolerancí, a podle ní se zvětší nebo zmenší

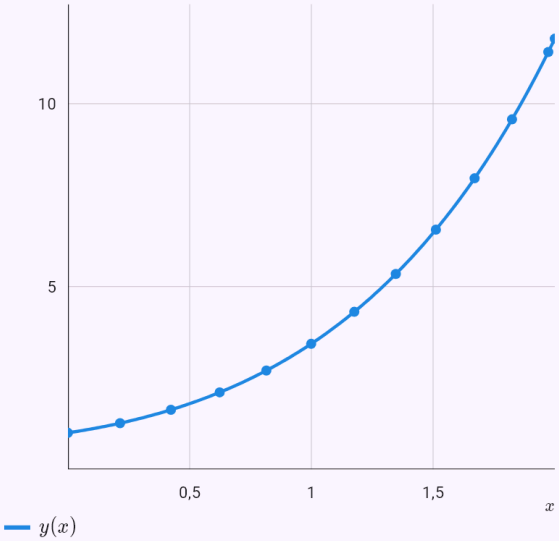
$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Pro srovnání přesné řešení: $y = -x + 2e^x - 1$
- Kroky s tolerancí $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ přijatý krok, × odmítnutý (krok se zmenšil a výpočet se opakoval). Přijatých 12, odmítnutých 1.

k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- Na konci intervalu přesně $y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
- Výsledek metody: $y(2) \approx 11{,}778114$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Tuhá rovnice – explicitní Euler s krokem 0,05 je nestabilní (|1 + hλ| = 1,5) a diverguje.

Zadání: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Výsledek

Numerické řešení s tímto krokem diverguje (viz postup).

Postup

- Počáteční úloha $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ na intervalu $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}05$ (20 kroků).
- Eulerova metoda – krok po tečně:
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Pro srovnání přesné řešení:
  $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Stabilita: rovnice se chová jako y' = λy s $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$.
  Metoda chybu v každém kroku zvětší:
  $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – s tímto krokem je nestabilní, hodnoty budou kmitat a růst. Pomůže menší krok nebo implicitní metoda.
- Výpočet krok za krokem

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Hodnoty rostou nade všechny meze (u $x \approx 0{,}6000$) – metoda je s tímto krokem nestabilní. Zkuste menší krok nebo implicitní metodu.

Táž rovnice implicitní Eulerovou metodou – stabilní i s velkým krokem.

Zadání: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Výsledek

$$y(1) \approx 0{,}556616$$

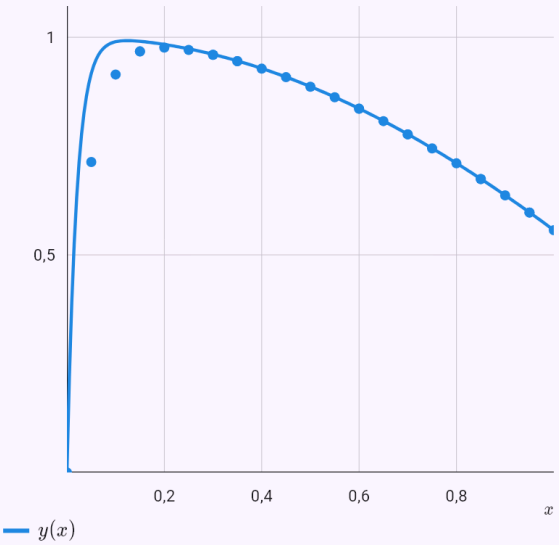
Postup

- Počáteční úloha $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ na intervalu $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}05$ (20 kroků).
- Implicitní Eulerova metoda – sklon na konci kroku, takže y_{n+1} je v rovnici na obou stranách. Řešíme ji v každém kroku Newtonovou metodou:
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Pro srovnání přesné řešení:
  $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Stabilita: rovnice se chová jako y' = λy s $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$.
  Metoda zmenšuje chybu v každém kroku:
  $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – výpočet je stabilní.
- Výpočet krok za krokem

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- Na konci intervalu přesně
  $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Výsledek metody: $y(1) \approx 0{,}556616$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Nelineární okrajová úloha metodou střelby – sklon opraví pět sečen.

Zadání: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Výsledek

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Postup

- Okrajová úloha $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, krok $h = 0{,}05$ (20 dílků).
- Metoda střelby: zvolíme počáteční sklon s = y'(a), úlohu vyřešíme jako počáteční (Runge–Kutta) a zjistíme, jak minula pravý konec. Sklon opravujeme metodou sečen

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_k}$$

- Střely – každá je jedna počáteční úloha; opravujeme, dokud F(s) není pod tolerancí.

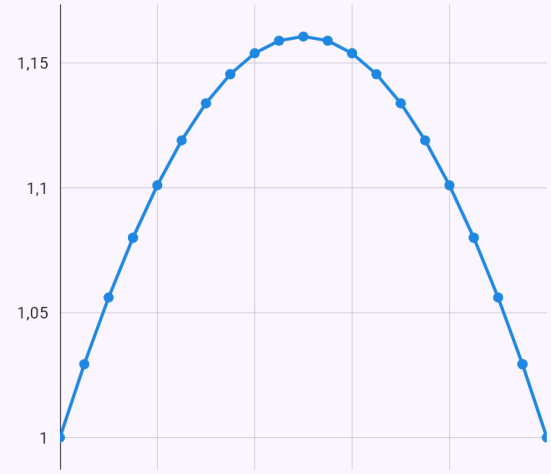
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	$-0{,}429$
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- Počáteční sklon, se kterým řešení zasáhne okrajovou podmínku: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- Řešení v uzlech

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Výsledek metody: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Graf





Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Diferenční metoda a Thomasův algoritmus – pro y = x³ přesně v uzlech.

Zadání: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Výsledek

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Postup

- Okrajová úloha $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, krok $h = 0{,}25$ (4 dílků).
- Diferenční metoda: v uzlech x_i nahradíme y'' a y' centrálními diferencemi

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- Třídiagonální soustava a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; okrajové hodnoty jsme převedli na pravou stranu

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- Thomasův algoritmus – Gaussova eliminace pro třídiagonální matici: dopředný chod a pak zpětné dosazení od konce

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

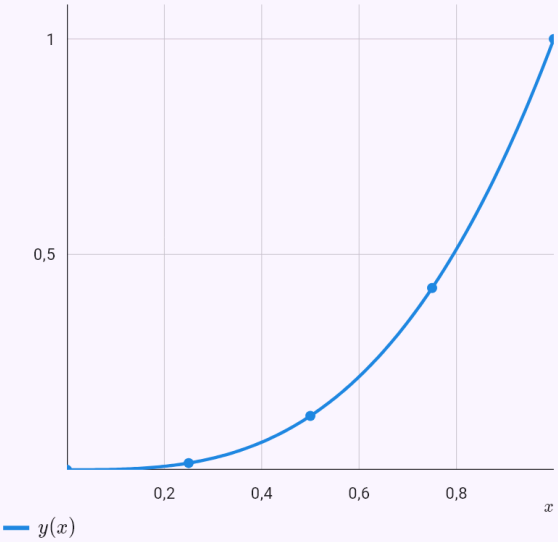
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Pro srovnání přesné řešení: $y = x^3$
- Řešení v uzlech

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- Největší chyba v uzlech proti přesnému řešení: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Výsledek metody: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Okrajová úloha metodou konečných prvků – v uzlech přesně.

Zadání: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Výsledek

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Postup

- Okrajová úloha $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, krok $h = 0{,}25$ (4 dílků).
- Metoda konečných prvků: rovnici vynásobíme „stříškou“ φ_i (po částech lineární funkcí, v uzlu i rovnou 1, v ostatních 0) a zintegrujeme per partes. Řešení hledáme jako kombinaci stříšek, integrály po prvcích počítáme Gaussovým pravidlem

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- Sestavená soustava – jeden řádek pro každý vnitřní uzel (matice tuhosti K je třídiagonální, okrajové hodnoty jsou převedené na pravou stranu)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- Thomasův algoritmus – Gaussova eliminace pro třídiagonální matici: dopředný chod a pak zpětné dosazení od konce

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+}$$

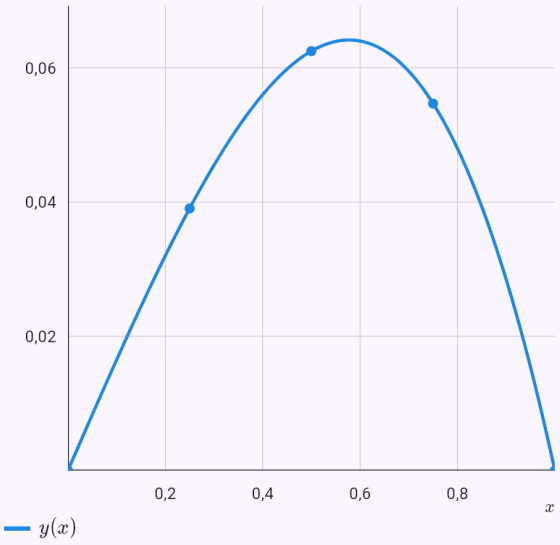
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Pro srovnání přesné řešení: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- Řešení v uzlech

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- Největší chyba v uzlech proti přesnému řešení: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Výsledek metody: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Kyvadlo Verletovou metodou – chyba energie se nemění, u RK4 roste desetkrát.

Zadání: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Výsledek

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0$$

Postup

- Pohybová rovnice $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, krok $h = 0{,}5$ (1000 kroků).
- Rychlostní Verletova metoda – nová poloha z rychlosti a zrychlení, rychlost z průměru zrychlení na začátku a na konci kroku. Celková energie $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ se počítá pro obě metody

$$x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \tfrac{h^2}{2}a(x_n)$$
$$v_{n+1} = v_n + \tfrac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$$

- Verlet proti RK4 se stejným krokem (vybrané řádky)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^R
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

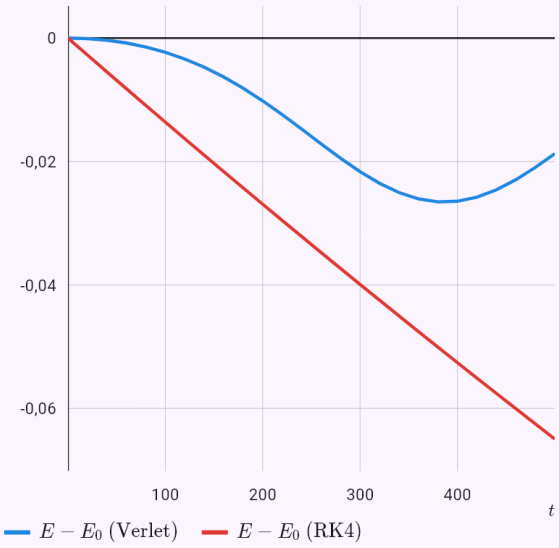
- U Verletovy metody chyba energie zůstává stejná, u RK4 s časem roste – při dlouhém výpočtu je Verlet věrnější. Největší chyba na začátku a na konci, nahoře Verlet, dole RK4

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$$

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$$

- Výsledek metody: $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Graf



Odchylka celkové energie od počáteční: Verlet kolísá kolem nuly, RK4 se pozvolna vzdaluje.

Gaussova–Seidelova metoda – rovnice přehozené kvůli diagonální dominanci.

Zadání: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Výsledek

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Postup

- Soustavu zapíšeme maticově
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Přehodíme rovnice, aby matice byla diagonálně dominantní ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- Iterační matice její spektrální poloměr $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333$ < 1 – metoda konverguje.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Gaussova–Seidelova metoda – nové hodnoty dosazujeme hned, jak je spočítáme

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Iterace

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- Podmínka zastavení $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ je splněna po 6 iteracích.
- Výsledek metody: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

LU rozklad v přesných zlomcích, dopředná a zpětná substituce.

Zadání: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Výsledek

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Postup

- Soustavu zapíšeme maticově
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Gaussova eliminace – násobky řádků tvoří matici L:
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- LU rozklad A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Dopředná substituce Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$

- Zpětná substituce Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$

- Výsledek metody: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

Lagrangeův interpolační polynom a jeho hodnota v bodě.

Zadání: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Výsledek

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Postup

- Zadané body (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Lagrangeovy základní polynomy $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

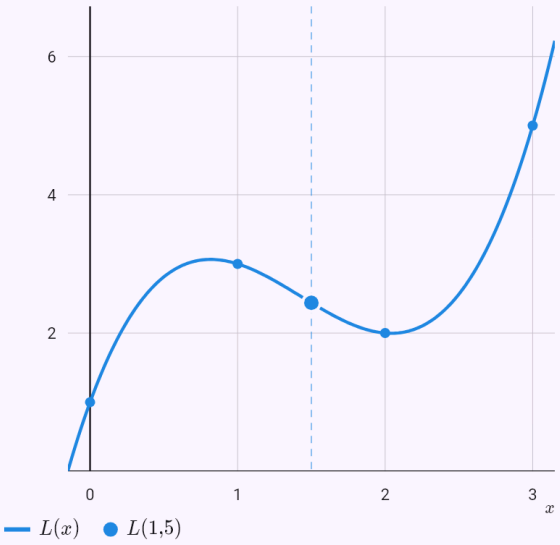
- Lagrangeův interpolační polynom

$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^3$$

- Hodnota v zadaném bodě: $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$
- Výsledek metody

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Newtonův polynom z tabulky poměrných diferencí.

Zadání: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Výsledek

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Postup

- Zadané body (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Tabulka poměrných diferencí

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

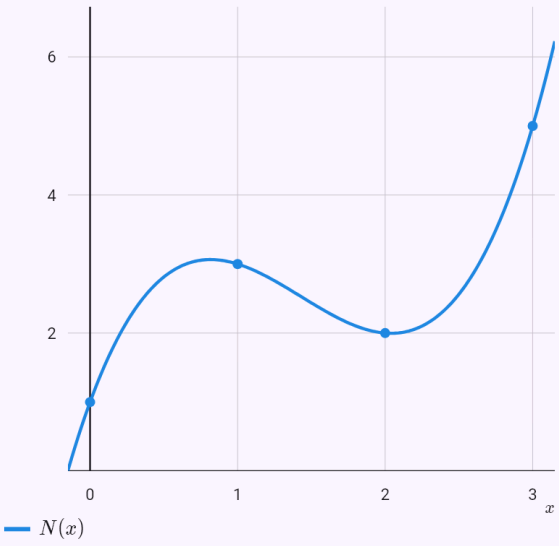
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- Newtonův interpolační polynom (koeficienty z horní úhlopříčky tabulky)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Výsledek metody: $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Přirozený kubický splajn – soustava pro momenty a dílčí polynomy.

Zadání: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Výsledek

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Postup

- Zadané body (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Přirozený kubický splajn: druhé derivace M⃰ v uzlech splňují přitom $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

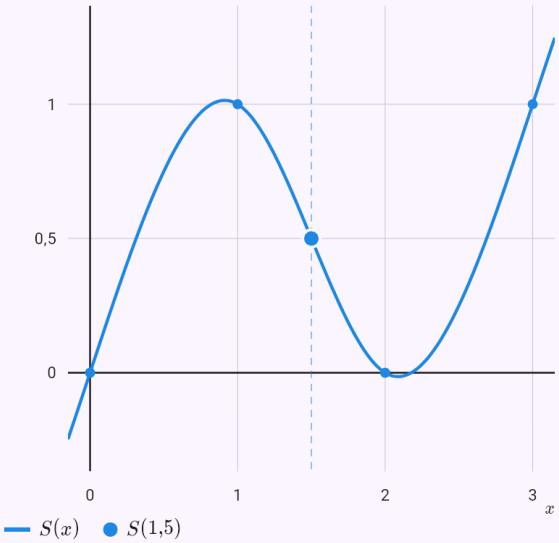
- Řešení soustavy:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- Na každém dílku

$$S_i(x) = y_i + b_i(x-x_i) + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x -$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- Hodnota v zadaném bodě: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Výsledek metody: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Kvadratická aproximace metodou nejmenších čtverců.

Zadání: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Výsledek

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Postup

- Zadané body (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Hledáme polynom, pro který $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. Potřebné součty

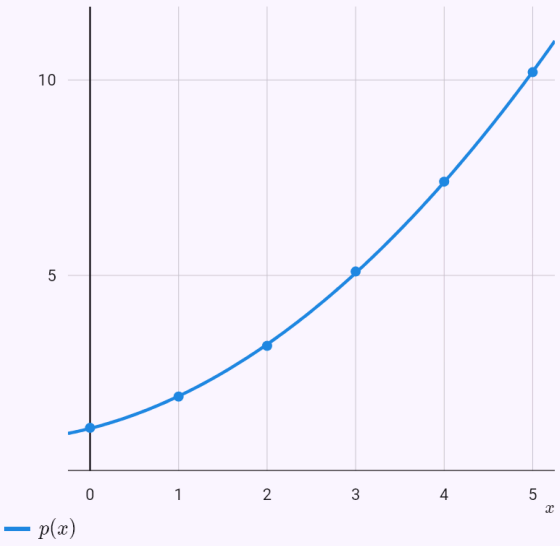
$$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

- Normální rovnice pro koeficienty $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- Řešení: $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- Součet čtverců odchylek: $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Výsledek metody: $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Vnitřní výnosové procento – pod výsledkem sbalený postup bisekce.

Zadání: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

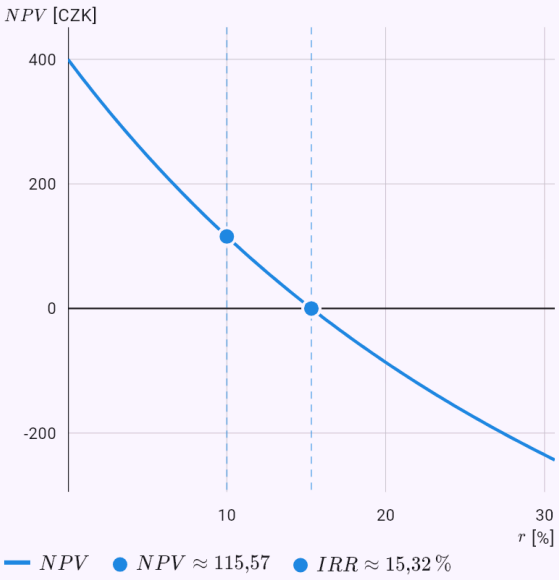
Výsledek

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Postup

- Zadáno:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Převedeme jednotky: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Čistá současná hodnota NPV sečte peněžní toky projektu CF_0, CF_1, … diskontované požadovanou výnosností r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Projekt s NPV > 0 vydělá víc, než je požadovaný výnos. Vnitřní výnosové procento IRR je sazba, při které NPV = 0 – kořen polynomiální rovnice, hledá se numericky. Doba návratnosti udává, kdy součet toků (prostý, nebo diskontovaný) přestane být záporný. Rovnice modelu:
  $$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$
- Čistá současná hodnota
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – projekt vynese aspoň požadovaný výnos.
- Rovnici vyřešíme numericky (půlením intervalu):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Postup metody: bisekce, 14 iterací

Graf



Graf vypočtený z řešení modelu; tečky jsou zadané hodnoty nebo odpověď.

Známá omezení

- Kořeny: jedna rovnice o jedné neznámé, reálné kořeny; automaticky se oddělí nejvýš tři kořeny v intervalu ⟨−50; 50⟩.
- Diferenciální rovnice: jen jedna rovnice 1. řádu y′ = f(x, y), nejvýš 2 000 kroků; soustavy a vyšší řády zatím ne.
- Soustavy: 2 až 6 rovnic; interpolace nejvýš 12 bodů, polynom nejmenších čtverců nejvýš 5. stupně.
- Simpsonova a Rombergova metoda z tabulky potřebují stejně dlouhé kroky (Romberg 2, 4, 8, … dílků).
- Okrajové úlohy jen 2. řádu s hodnotami y(a), y(b) (ne s derivací na kraji); diferenční metoda jen pro rovnici lineární v y a y′. Verletova metoda jen pro pohyb x″ = a(x) v jedné souřadnici – dráha planety v rovině zatím ne.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace